



第一单元 预备知识

第1讲 集合

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1)确定性 互异性 (2)① $\in$ ② $\notin$
(3)描述法 图示法(Venn图)
(4) $\mathbb{N}^+$ 或 $\mathbb{N}_+$ **Z** **Q** **R**
- 任意一个元素 $B \supseteq A$ 至少 $\subseteq$
相同 $A=B$ 不含
- 且 $A \cap B$ 或 $A \cup B$ 不
 $\in \mathbb{U}A$
- (1) $\subseteq$ (2) $B \cup A$ A (3) $\emptyset$ $A \cap$
 $(\mathbb{U}A)$ $(\mathbb{U}B)$

【对点演练】

- $\in$ $\subseteq$ [解析] 由 $x^2 - 5x + 6 = 0$,
解得 $x = 2$ 或 $x = 3$, 所以 $A = \{2, 3\}$, 所以
 $3 \in A, \{2\} \subseteq A, \{2, 3\} = A$.
- $\{(1, 1)\} \supseteq$ [解析] 由 $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 4y = 5, \end{cases}$ 得
 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ 所以 $D = \{(1, 1)\}$. 显然点 $(1, 1)$
在直线 $y = x$ 上, 所以 $C \supseteq D$.
- $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\} \cap \{x | 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$ [解析] $\because A = \{x | 3 \leq x < 7\}, B = \{x | 2 < x < 10\}, \therefore A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}, \therefore \mathbb{C}_R(A \cup B) = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$. 又 $\mathbb{C}_R A = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 7\}$,
 $\therefore (\mathbb{C}_R A) \cap B = \{x | 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$.
- 1 [解析] 因为集合 $\{1, a\} = \{a, a^2\}$,
所以 $a^2 = 1$, 即 $a = 1$ 或 $a = -1$, 当 $a = 1$
时, 与集合中元素的互异性矛盾, 当 $a = -1$
时, $\{1, -1\} = \{-1, 1\}$, 故 $a = -1$.
- $[-4, +\infty)$ [解析] $A = \{x | y = \ln(x - 1)\}$
 $= \{x | x > 1\}$, 因为 $y = x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \geq -4$, 当且仅当 $x = 2$ 时取等号,
所以 $B = \{y | y = x^2 - 4x, x \in A\} = \{y | y \geq -4\}$, 所以 $A \cup B = [-4, +\infty)$.
- $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ [解析] 因为 $A \cap B = B$,
所以 $B \subseteq A$. 若 B 为空集, 则关于 x 的方
程 $ax = 1$ 无解, 可得 $a = 0$; 若 B 不为空
集, 则 $a \neq 0$, 由 $ax = 1$, 得 $x = \frac{1}{a}$, 所以
 $\frac{1}{a} = 2$ 或 $\frac{1}{a} = 3$, 可得 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{3}$.
综上, 实数 a 的所有可能取值组成的集合
为 $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.
- $\{x | x \leq -1\}$ [解析] 因为 $A \cup B = \{x | x > -1\}$, 所以 $(\mathbb{C}_R A) \cap (\mathbb{C}_R B) = \mathbb{C}_R(A \cup B) = \{x | x \leq -1\}$.

● 课堂考点探究

- 例1** [思路点拨] (1)根据集合中的元素之和为1, 确定一元二次方程的根, 即可得出 a 的所有取值组成的集合. (2)利用列举法得集合 $B = \{(2, 1), (4, 2)\}$, 即可求解.
- (1)D (2)2 [解析] (1)由题得, 当一元二次方程 $(x - a^2)(x - 1) = 0$ 有两个相等的实根时, 得 $a^2 = 1$, 即 $a = \pm 1$; 当一元二次方程 $(x - a^2)(x - 1) = 0$ 有两个不相等的实根时, 得 $a^2 = 0$, 即 $a = 0$. 综上, 实数 a 的所有取值组成的集合为 $\{0, 1, -1\}$. 故选 D.
- (2)当 $x = 1, y = 1, 2, 4$ 时, $x - y$ 分别为 $0, -1, -3$, 均不满足 $x - y \in A$. 当 $x = 2, y = 1$ 时, 满足 $x - y \in A$; 当 $x = 2, y = 2$ 时, 不满足 $x - y \in A$; 当 $x = 2, y = 4$ 时, 不满足 $x - y \in A$. 当 $x = 4, y = 1$ 时, 不满足 $x - y \in A$; 当 $x = 4, y = 2$ 时, 满足 $x - y \in A$; 当 $x = 4, y = 4$ 时, 不满足 $x - y \in A$. 所以 $B = \{(2, 1), (4, 2)\}$, 故集合

B 中的元素有 2 个.

变式题 (1)A (2)-1 [解析] (1)当 $x = -1$ 时, $y = -1, 0, 1$; 当 $x = 0$ 时, $y = -1, 0, 1$; 当 $x = 1$ 时, $y = -1, 0, 1$. 所以集合 $A = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$, 共有 9 个元素.

(2)由题意得 $a \neq 0, a \neq 1$, 则 $\begin{cases} \frac{b}{a} = 0, \\ a + b = 1 \text{ 或 } a^2 = 1, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = 0, \end{cases}$ 经验证, 符合题意, 所以 $(a + b)^{2025} = -1$.

例2 [思路点拨] (1)先求出集合 B , 再根据集合的包含关系, 求得 C , 即可得集合 C 的个数. (2)由已知可得 $0 \in B$, 结合 $A \subseteq B$ 得到结果.

(1)4 (2)B [解析] (1)由 $x^2 - 5x < 0$, 得 $0 < x < 5$, 所以 $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 5x < 0\} = \{1, 2, 3, 4\}$, 因为 $A = \{1, 2\}, A \subseteq C \subseteq B$, 所以 $C = \{1, 2\}$ 或 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$ 或 $\{1, 2, 3, 4\}$, 所以集合 C 的个数为 4.

(2)由 $A \subseteq B$, 可得 $0 \in B$. 若 $a - 2 = 0$, 则 $a = 2$, 此时 $A = \{0, -2\}, B = \{1, 0, 2\}$, 不满足 $A \subseteq B$; 若 $2a - 2 = 0$, 则 $a = 1$, 此时 $A = \{0, -1\}, B = \{1, -1, 0\}$, 满足 $A \subseteq B$. 故选 B.

变式题 (1)A (2)D [解析] (1) $M = \left\{x \mid x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \mid x = \frac{2k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}, N = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + 1, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \mid x = \frac{k+2}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 因为 $2k+1, k \in \mathbb{Z}$ 表示所有的奇数, 而 $k+2, k \in \mathbb{Z}$ 表示所有的整数, 所以 $M \subseteq N$. 故选 A.

(2)由 $x - a \geq 0$ 可得 $x \geq a$, 由 $4x - 8 \geq 0$ 可得 $x \geq 2$. 依题意得 $[a, +\infty) \subseteq [2, +\infty)$, 所以 $a \geq 2$. 故选 D.

例3 [思路点拨] (1)根据根式、一元二次不等式和指数函数的性质求出集合 A, B , 然后进行交集的运算即可. (2)由交集、并集和补集的运算得到结果.

(1)A (2)A [解析] (1)因为 $A = \{x | 2x - x^2 \geq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}, B = \{y | y > 1\}$, 所以 $A \cap B = (1, 2]$. 故选 A.

(2)由题意得 $M \cup N = \{x | x < 2\}$, 所以 $\{x | x \geq 2\} = \mathbb{C}_U(M \cup N)$, 故选 A.

变式题 (1)A (2)B [解析] (1)易知 $0 \in A, -1 \in A, -3 \notin A, 2 \notin A, 3 \notin A$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$. 故选 A.

(2) $\because A = \{x | |x - 2| \geq 1\} = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}, \therefore \mathbb{C}_R A = \{x | 1 < x < 3\}$, 图中阴影部分表示的集合是 $(\mathbb{C}_R A) \cap B = \{x | 2 \leq x < 3\}$. 故选 B.

例4 [思路点拨] 先求出集合 A , 再根据 $A \cap B = \emptyset$ 求得 a 的取值范围.

$[1, +\infty)$ [解析] 由题意知 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, 又 $B = \{x | x > a, a \in \mathbb{R}\}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $a \geq 1$, 即 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

变式题 B [解析] 因为 $S = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}, T = \{x | a < x < a + 8\}$, 且 $S \cup T = \mathbb{R}$, 所以 $\begin{cases} a < -1, \\ a + 8 > 5, \end{cases}$ 解得 $-3 < a < -1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-3, -1)$. 故选 B.

例5 [思路点拨] (1)设该中学的学生总数为 m , 喜欢足球的学生组成集合 A , 喜欢游泳的学生组成集合 B , 根据集合 $A, B, A \cup B, A \cap B$ 中元素个数的关系可得答案. (2)由“真分拆”的定义即可求解.

(1)C (2)A [解析] (1)设该中学的学生总数为 m , 喜欢足球的学生组成集合 A , 喜欢游泳的学生组成集合 B , 则

$\text{card}(A) = 60\% m, \text{card}(B) = 82\% m$,
 $\text{card}(A \cup B) = 96\% m$, 所以 $\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B) = 46\% m$. 故选 C.

(2)由题意, 集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的“真分拆”有 $A_1 = \{5\}, A_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\}; A_1 = \{1, 4\}, A_2 = \{2, 3, 5, 6\}; A_1 = \{3, 4\}, A_2 = \{1, 2, 5, 6\}; A_1 = \{4, 5\}, A_2 = \{1, 2, 3, 6\}; A_1 = \{4, 6\}, A_2 = \{1, 2, 3, 5\}$. 共 5 种, 故选 A.

变式题 AD [解析] 因为 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 所以 P 中必有一个非零实数. 对于选项 A, 若 P 为数域, $a, b \in P$, 则当 $a = b \neq 0$ 时, $a - b = 0 \in P$, $\frac{a}{b} = 1 \in P$, 故 A 正确; 对于选项 B, 取

$a = 1, b = 2$, 但 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, 不满足条件, 故 B 错误; 对于选项 C, 例如 $M = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$, 取 $a = 1, b = \sqrt{2}$, 但 $1 + \sqrt{2} \notin M$, 所以数集 M 不是一个数域, 故 C 错误; 对于选项 D, 由选项 A 可知, 数域中必含有 0, 1 两个数, 根据数域的定义可知, 数域必为无限集, 故 D 正确. 故选 AD.

第2讲 常用逻辑用语

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- 充分 必要 充分不必要 必要不充分
充要 既不充分也不必要
- (1)全称量词 $\forall$ (2)存在量词 $\exists$
(3) $\exists x \in M, \neg p(x) \quad \forall x \in M, \neg p(x)$

【对点演练】

- 充分不必要 [解析] 由三角形是等边三角形可得到该三角形一定是等腰三角形, 但反之不成立, 所以“三角形是等边三角形”是“三角形是等腰三角形”的充分不必要条件.
- 存在 真 $\forall x \in \mathbb{Q}, |x| \notin \mathbb{N}$ [解析] 命题“ $\exists x \in \mathbb{Q}, |x| \in \mathbb{N}$ ”含有存在量词, 所以是存在量词命题. 因为 $1 \in \mathbb{Q}, |1| \in \mathbb{N}$ 成立, 所以该命题是真命题. 存在量词命题的否定需要把存在量词改为全称量词, 并否定结论, 所以“ $\exists x \in \mathbb{Q}, |x| \in \mathbb{N}$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{Q}, |x| \notin \mathbb{N}$ ”.
- 充要 [解析] 当 $a^2 + b^2 = c^2$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形, 充分性成立; 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 因为 $a \leq b \leq c$, 所以 $a^2 + b^2 = c^2$, 必要性也成立. 故“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”是“ $\triangle ABC$ 为直角三角形”的充要条件.
- 3 [解析] 因为“ $\forall x \in [-1, 2], x^2 - m \leq 1$ ”为真命题, 所以 $m \geq x^2 - 1$ 对 $x \in [-1, 2]$ 恒成立, 所以 $m \geq 3$, 故 m 的最小值为 3.
- ① $a < 3$ ② $a > 3$ ③ $a = 3$
[解析] ①因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 所以 $A \subseteq B$, 则 $a < 3$; ②因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要不充分条件, 所以 $B \subseteq A$, 则 $a > 3$; ③因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分必要条件, 所以 $A = B$, 则 $a = 3$.
- 存在一个奇数, 它的立方不是奇数
[解析] 命题“奇数的立方是奇数”是省略了全称量词“所有的”的全称量词命题, 由全称量词命题的否定是存在量词命题, 可得命题“奇数的立方是奇数”的否定是“存在一个奇数, 它的立方不是奇数”.
- 充分不必要 [解析] 依题意知 $p \Rightarrow r, r \Rightarrow p, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$, 所以 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$, 故 p 是 q 的充分不必要条件.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1)解不等式, 确定集合 A, B , 由集合的包含关系判断即可. (2)根

据向量数量积的求法可知 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ 等价于 $|a| = |b|$, 结合充分、必要条件分析判断即可. (3) 根据充分不必要条件的概念, 逐项判断即可.

(1) A (2) B (3) D [解析] (1) 由 $\ln x \leq 0$, 解得 $0 < x \leq 1$, 则 $A = (0, 1]$. 由 $2^x \leq 2$, 解得 $x \leq 1$, 则 $B = (-\infty, 1]$. 因为 $(0, 1] \subseteq (-\infty, 1]$, 所以 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分不必要条件. 故选 A.

(2) 由 $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 = 0$, 得 $a^2 = b^2$, 即 $|a| = |b|$, 可知 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ 等价于 $|a| = |b|$. 若 $a = b$ 或 $a = -b$, 则 $|a| = |b|$, 即 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$, 可知必要性成立; 若 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$, 则 $|a| = |b|$, 无法推出 $a = b$ 或 $a = -b$, 例如 $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, 满足 $|a| = |b|$, 但 $a \neq b$ 且 $a \neq -b$, 可知充分性不成立. 综上所述, “ $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ ” 是 “ $a = b$ 或 $a = -b$ ” 的必要不充分条件. 故选 B.

(3) $|x| > |y|$ 等价于 $x^2 > y^2$, 推不出 $x > y$, 排除 A, B; 由 $\frac{x}{y} > 1$, 可得 $\frac{x-y}{y} > 0$, 解得 $x > y > 0$ 或 $x < y < 0$, 所以 $\frac{x}{y} > 1$ 是 $x > y$ 的既不充分也不必要条件, 排除 C; 由 $2^{x-y} > 2$, 得 $x - y > 1$, 即 $x > y + 1$, $x > y + 1$ 可以推出 $x > y$, 反之推不出, D 正确. 故选 D.

变式题 (1) B (2) C [解析] (1) 若 $a < -1$, 且 $b < -1$, 则根据不等式的性质可得 $a + b < -2$, 且 $ab > 1$, 即必要性成立, 当 $a = -3, b = -\frac{1}{2}$ 时, 满足 $a + b < -2$,

且 $ab > 1$, 但是 $b = -\frac{1}{2} > -1$, 故充分性不成立. 所以 “ $a + b < -2$, 且 $ab > 1$ ” 是 “ $a < -1$, 且 $b < -1$ ” 的必要不充分条件. 故选 B.

(2) 因为 $\alpha \cap \beta = l$, 所以 $l \subset \alpha$ 且 $l \subset \beta$. 若 $l \perp \gamma$, 则 $\alpha \perp \gamma$ 且 $\beta \perp \gamma$, 故充分性成立; 若 $\alpha \perp \gamma$ 且 $\beta \perp \gamma$, 设 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$, 则存在直线 $a \subset \gamma$, 使得 $a \perp m$, 所以 $a \perp \alpha$, 由于 $l \subset \alpha$, 故 $a \perp l$, 同理存在直线 $b \subset \gamma$, 使得 $b \perp n$, 所以 $b \perp \beta$, 由于 $l \subset \beta$, 故 $b \perp l$, 易知 a, b 不平行, 即 a, b 是平面 γ 内的两条相交直线, 所以 $l \perp \gamma$, 故必要性成立. 故选 C.

例 2 [思路点拨] 根据充分不必要条件的定义进行转化即可得解.

A [解析] 由 $1 < 2^x < 4$, 得 $0 < x < 2$. 因为 p 是 q 的充分不必要条件, 所以 $x^2 - ax - 1 < 0$ 在 $(0, 2)$ 上恒成立, 所以 $\begin{cases} \Delta = a^2 + 4 < 0, \\ -1 \leq 0, \\ 4 - 2a - 1 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{3}{2}$. 故选 A.

变式题 $(-\infty, -1]$ [解析] 由 $|x + 2a| < 3$, 得 $-2a - 3 < x < -2a + 3$, 记 $A = \{x | -2a - 3 < x < -2a + 3\}, B = \{x | x \geq a\}$. 因为 p 是 q 的必要不充分条件, 所以 $A \subseteq B$, 所以 $a \leq -2a - 3$, 解得 $a \leq -1$.

例 3 [思路点拨] 举例说明 A, B 中命题是真命题, C 中命题是假命题, 根据指数函数的性质, 判断 D 中命题是真命题.

C [解析] 因为 $\log_2 \frac{1}{2} = -1, \cos 0 = 1, 0^2 = 0$, 所以选项 A, B 中命题均为真命题, 选项 C 中命题为假命题; 因为 $y = 2^x, x \in \mathbf{R}$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 所以 $2^x > 0$, 所以 D 中命题为真命题. 故选 C.

变式题 BD [解析] 对于选项 A, 当 $x > 0$ 时, $\frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$, 所以 $2^x < 3^x$ 恒成立, 故 A 中命题是假命题; 对于选项 B, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \frac{\lg x}{\lg 2} \times \frac{\lg 3}{\lg x} = \frac{\lg 3}{\lg 2} > 1$, 且 $\log_3 x > 0$, 所以 $\log_2 x > \log_3 x$, 故 B 中命题是真命题; 对于选项 C, D, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 时, $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$,

$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$, 则 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$, 故 C 中命题是假命题, D 中命题是真命题. 故选 BD.

例 4 [思路点拨] (1) 根据全称量词命题的否定为存在量词命题, 将 “ $\forall$ ” 改为 “ $\exists$ ” 并否定原结论即可. (2) 根据存在量词命题的否定是全称量词命题求解即可.

(1) $\exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x \leq \sin x$ (2) D

[解析] (1) 命题 $p: \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x > \sin x$ 的否定是 “ $\exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x \leq \sin x$ ”.

(2) 因为命题 p 是存在量词命题, 存在量词命题的否定为全称量词命题, 所以命题 p 的否定是 “所有的等差数列都不是等比数列”. 故选 D.

变式题 (1) D (2) B [解析] (1) 命题 “ $\exists m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2 + 1} \in \mathbf{N}$ ” 为存在量词命题, 其否定是 “ $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2 + 1} \notin \mathbf{N}$ ”, 故选 D.

(2) 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $\left| -\frac{1}{2} + 1 \right| = \frac{1}{2} < 1$, 故 p 是假命题, 则 $\neg p$ 是真命题; 当 $x = 1$ 时, $1^3 = 1$, 故 q 是真命题, 则 $\neg q$ 是假命题. 故选 B.

例 5 [思路点拨] 根据条件可得 $ax^2 - 2ax + 2a - 3 > 0$ 对任意 $x \in [2, 6]$ 恒成立, 令 $h(x) = ax^2 - 2ax + 2a - 3$, 利用二次函数的性质列不等式组求解即可得解.

A [解析] 因为 “ $\exists x \in [2, 6], f(x) \leq -2a + 3$ ” 是假命题, 所以 “ $\forall x \in [2, 6], f(x) > -2a + 3$ ” 是真命题, 则 $ax^2 - 2ax + 2a - 3 > 0$ 对任意 $x \in [2, 6]$ 恒成立. 令 $h(x) = ax^2 - 2ax + 2a - 3$, 当 $a = 0$ 时, $h(x) = -3 < 0$, 不符合题意, 故 $a \neq 0$, 则函数 $h(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1$, 要使得对任意 $x \in [2, 6], h(x) > 0$ 恒成立, 只需 $\begin{cases} h(2) = 2a - 3 > 0, \\ h(6) = 26a - 3 > 0, \end{cases}$ 解得 $a > \frac{3}{2}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. 故选 A.

变式题 $(-1, +\infty)$ [解析] 若 “ $\exists \alpha \in [0, +\infty), \cos \alpha < m$ ” 为真命题, 则 $m > (\cos \alpha)_{\min}, \alpha \in [0, +\infty)$. 因为 $y = \cos \alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 -1 , 所以 $m > -1$.

第 3 讲 等式与不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1) $>$ (2) $<$
- (2) $=$ (3) $=$
- (1) $b < a$ (3) $>$ (4) $<$
- (5) $a + c > b + d$ (6) $>$ (7) $>$

【对点演练】

1. $M > N$ [解析] $M - N = x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y + 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 > 0$. 故 $M > N$.

2. $(-\pi, 0)$ [解析] 由已知得 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < -\beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\pi < \alpha - \beta < \pi$, 又 $\alpha < \beta$, 所以 $\alpha - \beta < 0$, 故 $-\pi < \alpha - \beta < 0$.

3. ①②④ [解析] 对于①, 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $c^2 > 0$, 所以 $a > b$, 故①为真命题; 对于②, 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$, 故②为真命题; 对于③, 若 $a = -2, b = -1$, 则 $a^2 > ab > b^2$, 故③为假命题; 对于④, 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{ab} > 0$, 所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故④为真命题.

4. (2, 5) [解析] 因为 $2 < a < 3$, 所以 $4 < 2a < 6$, 又 $1 < b < 2$, 所以 $-2 < -b < -1$, 所以 $2 < 2a - b < 5$.

5. $(-24, 8)$ [解析] 当 $-3 < a \leq 0$ 时, $\frac{a}{b} \in (-24, 0]$; 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{a}{b} \in (0,$

8). 综上所述, $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(-24, 8)$.

6. $p \geq q$ [解析] $p - q = 2x^4 + 1 - 2x^3 - x^2 = 2x^3(x - 1) - (x + 1)(x - 1) = (x - 1)(2x^3 - x - 1) = (x - 1)(x^3 - x + x^3 - 1) = (x - 1)[x(x - 1)(x + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)] = (x - 1)^2(x^2 + x + x^2 + x + 1) = (x - 1)^2(2x^2 + 2x + 1) = (x - 1)^2[2(x^2 + x) + 1] = (x - 1)^2\left[2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 2 \times \frac{1}{4} + 1\right] = (x - 1)^2\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \geq 0$, 故 $p \geq q$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 把 $(x^2 - y^2)^2, xy(x - y)^2$ 作差分解因式后判断符号, 进而得出结论. (2) 把 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 作商后对 a, b 的大小关系分类, 借助指数函数的性质比较大小.

解: (1) $(x^2 - y^2)^2 - xy(x - y)^2 = (x + y)^2(x - y)^2 - xy(x - y)^2 = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) = (x - y)^2\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right] \geq 0$, $\therefore (x^2 - y^2)^2 \geq xy(x - y)^2$.

(2) $\frac{a^a b^b}{a^b b^a} = a^{a-b} \cdot b^{b-a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$.

当 $a > b > 0$ 时, $\frac{a}{b} > 1, a - b > 0$,

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1, \therefore a^a b^b > a^b b^a$;

当 $a = b > 0$ 时, $\frac{a}{b} = 1, a - b = 0$,

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} = 1, \therefore a^a b^b = a^b b^a$;

当 $b > a > 0$ 时, $0 < \frac{a}{b} < 1, a - b < 0$,

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1, \therefore a^a b^b > a^b b^a$.

综上所述, $a^a b^b \geq a^b b^a$.

变式题 (1) D (2) B [解析] (1) $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}, \therefore \sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{3} + 1 > 0$,

$a = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}, \therefore b > a$. 又 $0 < a < 1, \therefore a - a^2 = a(1 - a) > 0, \therefore a > c, \therefore b > a > c$. 故选 D.

(2) 方法一: 易知 a, b, c 都是正数. $\therefore \frac{b}{a} = \frac{3 \ln 4}{4 \ln 3} = \log_{81} 64 < 1, \therefore a > b$, $\therefore \frac{a}{c} = \frac{5 \ln 4}{4 \ln 5} = \log_{625} 1024 > 1, \therefore b > c$, $\therefore c < b < a$. 故选 B.

方法二: 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 则

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > e$. $\therefore f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore f(3) > f(4) > f(5)$, 即 $a > b > c$. 故选 B.

例 2 [思路点拨] (1) 举反例判断 A, B, C 选项, 根据不等式的性质判断 D 选项.

(2) 由题得 $c \neq 0$, 分 $c > 0$ 和 $c < 0$ 两种情况判断 A, D; 由 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$, 得 $\frac{c^3}{a} - \frac{c^3}{b} = \frac{c^3(b - a)}{ab} < 0$, 由 $ab > 0$, 得 c 与 $a - b$ 同号, 即可判断 B, C.

(1) D (2) ACD [解析] (1) 取 $a = 1, b = -1$, 则 $\frac{1}{a^2 + 1} = \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{1}{2}, a^2 b = -1, ab^2 = 1$, 则 $a^2 b < ab^2$, 故 A, B 错误. 取 $a = 0, b = -2$, 则 $a^2 = 0, ab = 0, b^2 = 4$, 故 C 错误. 因为 $a > b$, 所以 $2a > b + a >$

2b, 所以 $a > \frac{a+b}{2} > b$, 故 D 正确. 故选 D.

(2) 由 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$ 得 $c \neq 0$. 当 $c > 0$ 时, 由 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$, 得 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 即 $b < a < 0$.

所以 $|b| > |a|$, $0 < \frac{a}{b} < 1$; 当 $c < 0$ 时, 由 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$, 得 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$, 即 $b > a > 0$.

所以 $|b| > |a|$, $0 < \frac{a}{b} < 1$, 故 A, D 正确;

由 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$, 得 $\frac{c^3}{a} - \frac{c^3}{b} = \frac{c^3(b-a)}{ab} < 0$, 由上述分析可知 a 与 b 同号, 即 $ab > 0$, 所以 c 与 $b-a$ 异号, 即 c 与 $a-b$ 同号, 故 C 正确; 由 $c(a-b) > 0$, 得 $ac > bc$, 故 B 错误. 故选 ACD.

变式题 (1) D (2) ABC **【解析】** (1) 当

$a=1, b=-1$ 时, 满足 $a > b$, 但 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 A 中不等式不一定成立; 当 $a=1, b=-1$ 时, 满足 $a > b$, 但 $a^2 = b^2$, 故 B 中不等式不一定成立; 当 $a=1, b=-1$ 时, 满足 $a > b$, 但 $\ln b$ 不存在, 故 C 中不等式不一定成立; 由 $a > b$, 得 $a-b > 0$, 则 $2^{a-b} > 1$, 故 D 中不等式一定成立. 故选 D.

(2) 对于 A, 因为 $a+c > b+c$, 所以 $a > b$, 故 A 符合题意; 对于 B, 因为 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$,

所以 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0$, 所以 $a-b > 0$, 即 $a > b$, 故 B 符合题意; 对于 C, 因为 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$, 所以 $\frac{a}{c^2} - \frac{b}{c^2} = \frac{a-b}{c^2} > 0$, 即 $a > b$, 故 C 符合题意; 对于 D, 取 $a=-1, b=0$, 满足 $a^2 > b^2$, 但 $a < b$, 故 D 不符合题意. 故选 ABC.

例 3 **【思路点拨】** 利用不等式的性质可得结论.

$(-2, -\frac{2}{3})$ **【解析】** $\because -3 < a < -2$,

$\therefore -\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < -\frac{1}{3}$, 故 $\frac{1}{3} < -\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$.

又 $\because 2 < b < 4$, $\therefore \frac{2}{3} < -\frac{b}{a} < 2$, 则 $-2 <$

$\frac{b}{a} < -\frac{2}{3}$.

变式题 $(-2, -\frac{1}{2})$ **【解析】** 因为 $a >$

$b > c$, 且 $a+b+c=0$, 所以 $a > 0, c < 0$,

$b = -a-c$. 由 $b = -a-c < a$, 得 $2a >$

$-c$, 故 $\frac{c}{a} > -2$. 由 $b = -a-c > c$, 得 $-a >$

$2c$, 故 $\frac{c}{a} < -\frac{1}{2}$, 所以 $-2 < \frac{c}{a} < -\frac{1}{2}$.

第 4 讲 基本不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $a > 0, b > 0$ (2) $a = b$ (3) $\frac{a+b}{2}$

2. (1) $2ab$ (2) 2 3. (1) $2\sqrt{p}$ (2) $\frac{p^2}{4}$

【对点演练】

1. ± 1 2 **【解析】** $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} = 2$, 当且仅当 $x = \pm 1$ 时, 等号成立, 则 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的最小值为 2.

2. $\frac{9}{8}$ **【解析】** 因为 $0 \leq x \leq 1$, 所以 $3-2x > 0$, 所以 $y = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (3-2x) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2x+(3-2x)}{2} \right]^2 = \frac{9}{8}$, 当且仅当

$2x = 3-2x$, 即 $x = \frac{3}{4}$ 时取等号.

3. 3 **【解析】** 因为 $x > 2$, 所以 $f(x) = x + \frac{1}{x-2} = (x-2) + \frac{1}{x-2} + 2 \geq$

$2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 2 = 4$, 当且仅当 $x-2 = \frac{1}{x-2}$, 即 $x=3$ 时, 等号成立. 故 $a=3$.

4. 40 9 **【解析】** 设矩形菜园的相邻两条边的长分别为 x m, y m, 则篱笆的长度为 $2(x+y)$ m. 由题知 $xy=100$, 由

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, 可得 $x+y \geq 2\sqrt{xy} = 20$,

所以 $2(x+y) \geq 40$, 当且仅当 $x=y=10$ 时, 等号成立. 因此, 当这个矩形菜园是边长为 10 m 的正方形时, 所用篱笆最短, 此时所用篱笆的长度是 40 m. 若矩形菜园和墙平行的边长为 x ($0 < x \leq 9$) m, 与墙不平行的边长为 y m, 则篱笆的长度为 $(x+2y)$ m, 又 $xy=100$, 所以 $x+2y = x + \frac{200}{x}$, 因为 $f(x) = x + \frac{200}{x}$ 在 $(0, 9]$ 上单调递减, 所以当 $x=9$ 时所用篱笆最短.

5. $3+2\sqrt{3}$ **【解析】** 因为 $x < 0$, 所以 $-3x > 0$, $-\frac{1}{x} > 0$, 所以 $y = 3-3x - \frac{1}{x} = 3 + \left[(-3x) + \left(-\frac{1}{x} \right) \right] \geq 3 +$

$2\sqrt{(-3x) \cdot \left(-\frac{1}{x} \right)} = 3+2\sqrt{3}$, 当且仅当 $-3x = -\frac{1}{x}$, 即 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立,

所以 $y = 3-3x - \frac{1}{x}$ 的最小值是 $3+2\sqrt{3}$.

6. 3 **【解析】** 设 $x+2=t$, 则 $x = \frac{4}{t} - 2$, 由 $x \geq 2$ 得 $t \geq 4$, 因为函数

$y = t + \frac{4}{t} - 2$ 在 $[4, +\infty)$ 上单调递增, 所以

当 $t=4$ 时, $y = t + \frac{4}{t} - 2$ 取得最小值,

最小值为 $4 + \frac{4}{4} - 2 = 3$, 故 $x + \frac{4}{x+2}$ 的最小值为 3.

● **课堂考点探究**

例 1 **【思路点拨】** (1) 根据基本不等式及其成立的条件依次判断各选项即可得答案.

(2) 利用基本不等式判断即可.

(1) BD (2) ABD **【解析】** (1) 对于 A, 当 $a=1, b=-1$ 时, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = -2$, 故 A

错误; 对于 B, 因为 $(a-b)^2 \geq 0$, 所以 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 所以 $\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \geq ab$, 即

$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 故 B 正确; 对于 C, 当 $a=-1, b=-1$ 时, $a+b = -2 < 2\sqrt{ab} = 2$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $(a+b)^2 \geq 0$, 所以 $a^2 + b^2 + 2ab \geq 0$, 即 $a^2 + b^2 \geq -2ab$, 当且仅当 $a = -b$ 时取等号, 故 D 正确. 故选 BD.

(2) 对于 A, 因为正实数 m, n 满足 $m+n=1$, 所以 $0 < mn \leq \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{1}{mn} \geq 4$, 当且仅当 $m=n = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 A 正确; 对于 B, $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 = m+n+2\sqrt{mn} \leq m+n+m+n = 2$, 则 $\sqrt{m} + \sqrt{n} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $m=n = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 B 正确; 对于 C, $1 = m+n \geq 2\sqrt{mn}$, 所以 $\sqrt{mn} \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $m = n = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 C 错误; 对于 D, 由

$\frac{m+n}{2} \leq \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$, 可得 $m^2 + n^2 \geq$

$\frac{(m+n)^2}{2} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $m=n = \frac{1}{2}$ 时等

号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 (1) D (2) B **【解析】** (1) 对于选项 A, 当 $x < 0$ 时, $y = x + \frac{2}{x} < 0$, 即最小值不是 $2\sqrt{2}$, 故选项 A 不符合题意; 对于选项 B, 当 $x > 0$ 时, $y = x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 即 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最小值是 2, 故选项 B 不符合题意; 对于选项 C, $y = \sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$, 令 $t = \sqrt{x^2+3}$, 则 $t \geq \sqrt{3}$, $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调递增, 当 $t = \sqrt{3}$ 时, $y = t + \frac{1}{t}$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 故选项 C 不符合题意; 对于选项 D, $y = e^x + \frac{2}{e^x} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \ln \sqrt{2}$ 时取等号, 即 $y = e^x + \frac{2}{e^x}$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$, 故选项 D 符合题意. 故选 D.

(2) 由题知, $0 < a < b$, 且 $a+b=1$, 所以 $0 < a < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < b < 1$, 故排除 D. 因为

$a^2 + b^2 > \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{1}{2}$, 所以排除 A. 因为

$a^2 + b^2 > 2ab$, 所以排除 C. 故选 B.

例 2 **【思路点拨】** (1) 由已知得 $x+1 > 1$, 将

$y = 2+3x + \frac{4}{x+1}$ 变形为 $y = 3(x+1) + \frac{4}{x+1} - 1$, 再利用基本不等式求原函数的最小值. (2) 由于 $-1 < x < 0$, 将所求式子化为 $-\sqrt{x^2(3-2x^2)}$, 结合基本不等式可得结果.

(1) A (2) C **【解析】** (1) $\because x > 0$, $\therefore x+1 > 1$, $\therefore y = 2+3x + \frac{4}{x+1} = 2 + 3(x+1) - 3 + \frac{4}{x+1} = 3(x+1) + \frac{4}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{3(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 4\sqrt{3} - 1$, 当且仅当 $3(x+1) = \frac{4}{x+1}$, 即 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ 时, 等号成立, $\therefore$ 函数 $y = 2+3x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值为 $4\sqrt{3} - 1$. 故选 A.

(2) 因为 $-1 < x < 0$, 所以 $x\sqrt{3-2x^2} = -\sqrt{x^2(3-2x^2)} = -\sqrt{2x^2 \left(\frac{3}{2} - x^2 \right)} \geq -\sqrt{2 \times \frac{9}{16}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (当且仅当 $x^2 = \frac{3}{2} - x^2$, 即 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号), 故 $x\sqrt{3-2x^2}$ 的最小值为 $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

例 3 **【思路点拨】** (1) 由 $2x+(1-2x)=1$, 得到 $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-2x} = [2x + (1-2x)] \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-2x} \right)$, 结合基本不等式, 即可求解. (2) 先将 $4x+2y-xy=0$ 化为 $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1$, 则 $2x+y = (2x+y) \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{y} \right)$

$\frac{4}{y}$), 结合基本不等式计算即可.

(1) A (2) A [解析] (1) 因为 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以 $1-2x > 0$, 且 $2x + (1-2x) = 1$,

则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-2x} = [2x + (1-2x)] \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-2x} \right) = 3 + \frac{1-2x}{x} + \frac{2x}{1-2x} \geq 3 +$

$2\sqrt{\frac{1-2x}{x} \cdot \frac{2x}{1-2x}} = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1-2x}{x} = \frac{2x}{1-2x}$, 即 $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成

立, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-2x}$ 的最小值是 $3 + 2\sqrt{2}$. 故选 A.

(2) 由题意可知 $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1$, $\therefore 2x + y = (2x + y) \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{y} \right) = \frac{8x}{y} + \frac{2y}{x} + 8 \geq$

$2\sqrt{\frac{8x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 8 = 16$, 当且仅当 $\frac{8x}{y} = \frac{2y}{x}$, 即 $x = 4, y = 8$ 时, 等号成立, 则 $2x + y$ 的最小值为 16.

例 4 [思路点拨] 根据题意可得 $y = \frac{x}{2} +$

$\frac{1}{x}$, 所以 $x + y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x}$, 再利用基本不等式求解.

A [解析] 由 $x^2 - 2xy + 2 = 0$ 可得 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, 所以 $x + y = x + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} =$

$\frac{3x}{2} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{6}$, 当且仅当 $\frac{3x}{2} = \frac{1}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时, 等号成立, 所以

$x + y$ 的最小值为 $\sqrt{6}$. 故选 A.

【应用演练】

1. A [解析] 因为 $0 < x < 2$, 所以 $y = x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{x^2(4-x^2)} \leq \frac{x^2 + (4-x^2)}{2} =$

2, 当且仅当 $x^2 = 4 - x^2$, 即 $x = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 所以 $y = x\sqrt{4-x^2}$ 的最大值为 2. 故选 A.

2. C [解析] 因为 $\frac{1}{x} + 2y = 2$, 所以 $\frac{1}{2x} + y = 1$, 因为 $x > 0, y > 0$, 所以 $x + \frac{1}{y} =$

$\left(x + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{2x} + y\right) = \frac{1}{2} + xy + \frac{1}{2xy} + 1 = \frac{3}{2} + xy + \frac{1}{2xy} \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{2xy}} =$

$\frac{3}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, 当且仅当 $\begin{cases} xy = \frac{1}{2xy}, \\ \frac{1}{2x} + y = 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \\ y = 2-\sqrt{2} \end{cases}$ 时取等号. 故

选 C.

3. BC [解析] 由 $a > 1, b > 1, ab - a - b = 0$, 得 $ab = a + b$. 对于 A, $ab = a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 即 $\sqrt{ab} \geq 2$, 即 $ab \geq 4$. 当且仅当 $a = b = 2$ 时, 等号成立, 故 ab 的最小值为 4, 故 A 错误; 对于 B, 由 $ab = a + b$, 得

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $2a + b = (2a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} =$

$3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2} + 1$ 时, 等号成立, 故 B 正确;

对于 C, 由 $ab = a + b$, 得 $(a-1)(b-1) =$

1, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(a-1)(b-1)}} = 2$, 当且仅当 $a = b = 2$ 时, 等号成立, 故 C

正确; 对于 D, $a + b = (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} =$

4, 当且仅当 $a = b = 2$ 时, 等号成立, 故 D 错误. 故选 BC.

4. 4 [解析] 由 $a > 0, b > 0, ab = 2$, 得 $a =$

$\frac{2}{b}$, 故 $\frac{a+4b+2b^3}{b^2+1} = \frac{\frac{2}{b} + 4b + 2b^3}{b^2+1} =$

$\frac{2+4b^2+2b^4}{b(b^2+1)} = 2 \times \frac{(b^2+1)^2}{b(b^2+1)} = 2 \times \frac{b^2+1}{b} = 2 \left(b + \frac{1}{b} \right) \geq 2 \times 2\sqrt{b \times \frac{1}{b}} = 4$,

当且仅当 $b = 1$ 时等号成立.

例 5 [思路点拨] (1) 根据题意, 当 $t = 0$ 时, $x = 1$, 代入已知等式解出 k , 进而得到函数关系式; (2) 根据 (1) 中的式子, 结合基本不等式即可得到答案.

解: (1) 根据题意, 当 $t = 0$ 时, $x = 1$, 则 $1 = 4 - \frac{k}{1}$, 解得 $k = 3$, 所以 $x = 4 -$

$\frac{3}{2t+1}$, 所以 $y = 1.5 \cdot \frac{6+12x}{x} \cdot x - (6 +$

$12x) - t = 3 + 6x - t = 3 + 6 \left(4 - \frac{3}{2t+1} \right) - t = 27 - \frac{18}{2t+1} - t (t \geq 0)$.

(2) 由 (1) 知, $y = 27 - \frac{18}{2t+1} - t = 27.5 -$

$\left[\frac{9}{t+0.5} + (t+0.5) \right] \leq 27.5 -$

$2\sqrt{\frac{9}{t+0.5} \cdot (t+0.5)} = 21.5$, 当且仅当

$\frac{9}{t+0.5} = t+0.5$, 即 $t = 2.5$ 时等号成立, 所以该厂家 2026 年该产品的年促销费用为 2.5 万元时该产品的年利润最大.

变式题 (1) 20 (2) $y = \frac{7x}{4} + \frac{11200}{x}, x \in$

$[60, 120]$ 80 280 [解析] (1) 由题知

$\bar{C} = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{1}{4}q^2 + 100}{q} = \frac{q}{4} + \frac{100}{q} \geq$

$2\sqrt{\frac{q}{4} \cdot \frac{100}{q}} = 10$, 当且仅当 $\frac{q}{4} = \frac{100}{q}$, 即 $q = 20$ 时取等号, 故当 $q = 20$ 时, 平均成本最少.

(2) 若车速为 x km/h, 则从 A 地到 B 地所需时间为 $\frac{100}{x}$ h, 依题意可得 $y =$

$\frac{100}{x} \left(42 + \frac{7x^2}{400} + 70 \right) = \frac{7x}{4} + \frac{11200}{x}, x \in [60,$

$120]$. $y = \frac{7x}{4} + \frac{11200}{x} \geq 2\sqrt{\frac{7x}{4} \cdot \frac{11200}{x}} =$

280, 当且仅当 $\frac{7x}{4} = \frac{11200}{x}$, 即 $x = 80$ 时取

等号, 所以以 80 km/h 的车速行驶, 快递公司需要支付的总费用最少, 最少费用为 280 元.

拓展应用 1 三元基本不等式、柯西不等式

【典型例题】

例 1 9 [解析] $y = 6x + \frac{3}{x^2} = 3x + 3x + \frac{3}{x^2} \geq 3\sqrt{3x \cdot 3x \cdot \frac{3}{x^2}} = 9$, 当且仅当

$3x = \frac{3}{x^2}$, 即 $x = 1$ 时, 等号成立.

例 2 (1) 25 (2) 3 [解析] (1) 方法一 (基本不等式): $\because 0 < x < \frac{1}{2}, \therefore 1-2x > 0$,

$\therefore f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} = \left(\frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} \right) (2x +$

$1-2x) = 4 + 9 + \frac{2(1-2x)}{x} + \frac{18x}{1-2x} \geq 13 +$

$2\sqrt{36} = 25$, 当且仅当 $\frac{2(1-2x)}{x} = \frac{18x}{1-2x}$,

即 $x = \frac{1}{5}$ 时取等号, $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} (0 < x < \frac{1}{2})$ 的最小值为 25.

方法二 (柯西不等式): $\because 0 < x < \frac{1}{2}, \therefore 1-2x > 0, \therefore f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x} =$

$\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2x}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{1-2x}} \right)^2 \right] [(\sqrt{2x})^2 +$

$(\sqrt{1-2x})^2] \geq \left(\frac{2}{\sqrt{2x}} \times \sqrt{2x} + \frac{3}{\sqrt{1-2x}} \times \sqrt{1-2x} \right)^2 = 25$, 当且仅当 $\frac{2}{2x} = \frac{3}{1-2x}$, 即

$x = \frac{1}{5}$ 时取等号, $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} (0 < x < \frac{1}{2})$ 的最小值为 25.

方法三 (权方和不等式): 由 $0 < x < \frac{1}{2}$, 得 $1-2x > 0$, 由权方和不等式可得

$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x} \geq \frac{(2+3)^2}{2x+1-2x} = 25$, 当且仅当 $\frac{2}{2x} = \frac{3}{1-2x}$,

即 $x = \frac{1}{5}$ 时取等号, $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} (0 < x < \frac{1}{2})$ 的最小值为 25.

(2) 由题意得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 函数 $y =$

$2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{2} \times \sqrt{2-2x} + 1 \cdot \sqrt{2x+1} \leq \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot$

$\sqrt{(\sqrt{2-2x})^2 + (\sqrt{2x+1})^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$, 当且仅当 $\sqrt{2-2x} \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x+1}$, 即 $x = 0$ 时取等号, 所以函数

$y = 2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x+1}$ 的最大值为 3.

【巩固演练】

1. C [解析] 因为 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 1$, 所以 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 所以 $(1-a)(1-b)(1-c) \leq$

$\left[\frac{(1-a) + (1-b) + (1-c)}{3} \right]^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$, 当且仅当 $1-a = 1-b = 1-c$, 即 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时, 等号成立.

2. B [解析] 方法一 (基本不等式): 由题意得 $k \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立. $\because \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}} \right)^2 =$

$\frac{x+5y+2\sqrt{5xy}}{x+y} \leq \frac{x+5y+5x+y}{x+y} = 6$, 当且仅当 $5x = y$ 时, 等号成立,

$\therefore \frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{6}, \therefore k \geq \sqrt{6}$.

方法二 (柯西不等式): 由题意得 $k \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立. $\because (\sqrt{x} + \sqrt{5y})^2 \leq$

$(x+y)(1+5) = 6(x+y)$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{5}}$, 即 $5x = y$ 时, 等号成立,

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{5y} \leq \sqrt{6}\sqrt{x+y}$, 即 $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{6}, \therefore k \geq \sqrt{6}$.

方法三 (权方和不等式): 由题意得 $k \geq$

$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立. $\because (\sqrt{x} + \sqrt{5y})^2 \leq$

$(x+y)(1+5) = 6(x+y)$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{5}}$, 即 $5x = y$ 时, 等号成立,

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{5y} \leq \sqrt{6}\sqrt{x+y}$, 即 $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{6}, \therefore k \geq \sqrt{6}$.

方法三 (权方和不等式): 由题意得 $k \geq$

$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立. $\because (\sqrt{x} + \sqrt{5y})^2 \leq$

$(x+y)(1+5) = 6(x+y)$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{5}}$, 即 $5x = y$ 时, 等号成立,

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{5y} \leq \sqrt{6}\sqrt{x+y}$, 即 $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{6}, \therefore k \geq \sqrt{6}$.

方法三 (权方和不等式): 由题意得 $k \geq$

$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立. $\therefore \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{5y})^2}{x+y} \leq \frac{x}{x+y} + \frac{5y}{x+y} = 6$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{5y}}{y}$, 即 $5x=y$ 时, 等号成立, $\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}} \leq \sqrt{6}$, $\therefore k \geq \sqrt{6}$.

3. $\sqrt{11}$ [解析] 令 $a_1 = \sqrt{3}x, a_2 = \sqrt{2}y$, $b_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 代入柯西不等式 $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$, 得 $(2x+y)^2 \leq (3x^2 + 2y^2) \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = 6 \times \frac{11}{6} = 11$, 当且仅当 $\frac{3x}{2} = 2y$ 时等号成立, 所以 $-\sqrt{11} \leq 2x+y \leq \sqrt{11}$, 所以 $2x+y$ 的最大值为 $\sqrt{11}$.

4. -1 [解析] $\frac{1}{2x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{1}{2x^2+1} - \frac{4}{2x^2+2}$, 且 $\left(\frac{1}{2x^2+1} - \frac{4}{2x^2+2}\right) [(2x^2+1) - (2x^2+2)] = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\right)^2\right] [(\sqrt{2x^2+1})^2 - (\sqrt{2x^2+2})^2] \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot \sqrt{2x^2+1} - \frac{2}{\sqrt{2x^2+2}} \cdot \sqrt{2x^2+2}\right)^2 = 1$, 当且仅当 $\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}$, 即 $\sqrt{2x^2+2} = \frac{2}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot \sqrt{2x^2+1}$, 即 $x=0$ 时, 等号成立, 即 $-\left(\frac{1}{2x^2+1} - \frac{4}{2x^2+2}\right) \leq 1$, 所以 $\frac{1}{2x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{1}{2x^2+1} - \frac{4}{2x^2+2} \geq -1$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

第5讲 一元二次方程、不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. $\{x|x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$ $\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$

$R \setminus \{x|x_1 < x < x_2\} \cap \emptyset \cap \emptyset$

【对点演练】

1. $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$ [解析] 由 $x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1) \geq 0$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 6$, 即原不等式的解集为 $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$.

2. -14 [解析] 由题意知 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 是 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两根, 则 $\begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a}, \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -12, \\ b = -2, \end{cases}$ 所以 $a+b = -14$.

3. $[0, 4)$ [解析] 当 $m=0$ 时, $1 > 0$, 不等式恒成立; 当 $m \neq 0$ 时, 由题得 $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = m^2 - 4m < 0, \end{cases}$ 解得 $0 < m < 4$. 综上, m 的取值范围是 $[0, 4)$.

4. $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ [解析] 由 $-2x^2 + x \leq -3$ 可得 $2x^2 - x - 3 \geq 0$, 即 $(2x-3)(x+1) \geq 0$, 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq \frac{3}{2}$, 故不等式的解集为 $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

5. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ [解析] 由 $\frac{2}{x+1} \leq 1$ 得 $\frac{2}{x+1} - 1 \leq 0$, 得 $\frac{2-x-1}{x+1} \leq 0$, 得 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, 得 $x-1=0$ 或 $(x-1)(x+1) > 0$, 得 $x=1$ 或 $x < -1$ 或 $x > 1$, 得 $x < -1$ 或 $x \geq 1$, 所以原不等式的解集为 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

6. $(-\infty, 1)$ [解析] 当 $a=0$ 时, 不等式为 $2x+1 < 0$, 有实数解, 满足题意; 当 $a < 0$ 时, 不等式对应的二次函数的图象开口向下, $\Delta = 4-4a > 0$, 所以不等式有实数解, 满足题意; 当 $a > 0$ 时, 若不等式有实数解, 则 $\Delta = 4-4a > 0$, 解得 $a < 1$, 所以 $0 < a < 1$. 综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1) 对于分式不等式, 要先等价变形, 可以先把二次项系数化成正数, 再求解, 注意不等式分母不为0. (2) 求出分式不等式 $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-2} > 0$ 和 $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-2} \leq 0$ 的解集, 然后求交集.

(1) $\left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x < 3\right\}$ (2) $[-2, -1) \cup (2, 3]$

[解析] (1) 不等式 $\frac{2x+1}{3-x} \geq 1$ 可变形为 $\frac{3x-2}{x-3} \leq 0$, 即 $(3x-2)(x-3) \leq 0$,

且 $x-3 \neq 0$, 解得 $\frac{2}{3} \leq x < 3$, 故原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x < 3\right\}$.

(2) 由题得 $\begin{cases} x^2-x-2 > 0, \\ x^2-x-2 \leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2-x-6 > 0, \\ x^2-x-6 \leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (x-2)(x+1) > 0, \\ (x-2)(x+1) \leq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x > 2 \text{ 或 } x < -1, \\ -2 \leq x \leq 3, \end{cases}$ 故原不等式的解集为 $[-2, -1) \cup (2, 3]$.

例2 [思路点拨] 对 a 进行分类讨论, 分别解出不等式即可.

解: 若 $a=0$, 则不等式化为 $-2x+2 < 0$, 解得 $x > 1$, 不等式的解集为 $\{x|x > 1\}$. 若 $a \neq 0$, 则不等式化为 $(ax-2)(x-1) < 0$, 一元二次方程 $(ax-2)(x-1)=0$ 的解为 $x_1 = \frac{2}{a}, x_2 = 1$. 当 $0 < a < 2$ 时, $\frac{2}{a} > 1$, 则原不等式的解集为 $\left\{x \mid 1 < x < \frac{2}{a}\right\}$; 当 $a=2$ 时, $\frac{2}{a} = 1$, 则原不等式的解集为 $\emptyset$; 当 $a > 2$ 时, $\frac{2}{a} < 1$, 则原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} < x < 1\right\}$;

当 $a < 0$ 时, $\frac{2}{a} < 1$, 不等式化为 $(-ax+2)(x-1) > 0$, 解得 $x > 1$ 或 $x < \frac{2}{a}$, 故原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < \frac{2}{a}\right\}$.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < \frac{2}{a}\right\}$; 当 $a=0$ 时, 不等式的解集为 $\{x|x > 1\}$; 当 $0 < a < 2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid 1 < x < \frac{2}{a}\right\}$; 当 $a=2$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$; 当 $a > 2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} < x < 1\right\}$.

例3 [思路点拨] 设 $e^x = t > 0$, 通过换元, 将不等式化为 $(at-1)(2t+1) < 0$, 再对 a 进行讨论求解.

解: 设 $e^x = t > 0$, 不等式 $f(x) < 0$ 可化为 $(at-1)(2t+1) < 0$. 当 $a \leq 0$ 时, $\therefore t > 0$, $\therefore$ 不等式 $(at-1)(2t+1) < 0$ 恒成立, 此时不等式的解集为 R ; 当 $a > 0$ 时, $\therefore t > 0$, $\therefore$ 由 $(at-1)(2t+1) < 0$ 得 $0 < t < \frac{1}{a}$, $\therefore 0 < e^x < \frac{1}{a}$, 解得 $x < -\ln a$, 此时不等

式的解集为 $(-\infty, -\ln a)$. 综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 不等式的解集为 R ; 当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, -\ln a)$.

变式题 解: 当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq a \leq 2$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$; 当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即 $a > 2$ 或 $a < -2$ 时, $x^2 - ax + 1 = 0$ 的根为 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, 不

等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right\}$. 综上, 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$; 当 $a > 2$ 或 $a < -2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right\}$.

例4 [思路点拨] 分 $k=0$ 与 $k \neq 0$ 两种情况进行讨论, 结合二次不等式恒成立问题的解法即可得解.

C [解析] 当 $k=0$ 时, 不等式 $kx^2 + (k-6)x + 2 > 0$ 可化为 $-6x + 2 > 0$, 显然不符合题意; 当 $k \neq 0$ 时, 因为 $kx^2 + (k-6)x + 2 > 0$ 的解集为 R , 所以 $\begin{cases} k > 0, \\ \Delta = (k-6)^2 - 4k \times 2 < 0, \end{cases}$ 解得 $2 < k < 18$. 综上, 实数 k 的取值范围是 $(2, 18)$. 故选 C.

变式题 B [解析] 不等式 $mx^2 + mx - 4 < 2x^2 + 2x - 1$ 对任意实数 x 恒成立, 即不等式 $(m-2)x^2 + (m-2)x - 3 < 0$ 对任意实数 x 恒成立. 当 $m=2$ 时, 不等式可化为 $-3 < 0$, 恒成立, 符合题意; 当 $m \neq 2$ 时, 由题意得 $m-2 < 0$, 且 $\Delta = (m-2)^2 + 12(m-2) = m^2 + 8m - 20 = (m+10)(m-2) < 0$, 解得 $-10 < m < 2$. 综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(-10, 2]$. 故选 B.

例5 [思路点拨] 当 $x=0$ 时不等式恒成立, 当 $x \in (0, 2]$ 时, 参变分离可得 $2a > x - \frac{3}{x}$ 恒成立, 令 $f(x) = x - \frac{3}{x}, x \in (0, 2]$, 根据函数的单调性求出 $f(x)_{\max}$, 即可求出 a 的取值范围.

D [解析] 当 $x=0$ 时, 原不等式为 $-3 < 0$, 恒成立; 当 $x \in (0, 2]$ 时, 由题得 $2a > \frac{x^2-3}{x} = x - \frac{3}{x}$ 恒成立, 令 $f(x) = x - \frac{3}{x}, x \in (0, 2]$, 易知 $f(x) = x - \frac{3}{x}$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 所以当 $x=2$ 时, $f(x) = x - \frac{3}{x}$ 取得最大值, 即 $f(x)_{\max} = f(2) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $2a > \frac{1}{2}$, 则 $a > \frac{1}{4}$. 综上, 实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$. 故选 D.

变式题 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ [解析] 由题意得函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$ 在 $[m, m+1]$ 上的最大值小于0, 因为函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$ 的图象开口向上, 所以

$\begin{cases} f(m) = m^2 + m^2 - 1 < 0, \\ f(m+1) = (m+1)^2 + m(m+1) - 1 < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2m^2 - 1 < 0, \\ 2m^2 + 3m < 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 0$, 故实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

例6 [思路点拨] 先把 $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m$ 化为 $f(x) = (x-2)m + x^2 - 4x + 4$, 再令 $g(m) = (x-2)m + x^2 - 4x + 4$, 然后分类讨论即可求解.

B [解析] $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m = (x-2)m + x^2 - 4x + 4$, 令 $g(m) = (x-2)m + x^2 - 4x + 4, m \in [-1, 1]$. 当 $x=2$ 时, $g(m) = 0$, 不符合题意; 当 $x > 2$ 时, $g(m)$ 单调递增, 由 $g(-1) = (x-2)(-1) + x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x + 6$

2) $\cdot (-1) + x^2 - 4x + 4 > 0$, 可得 $x > 3$;
当 $x < 2$ 时, $g(m)$ 单调递减, 由 $g(1) = (x-2) \cdot 1 + x^2 - 4x + 4 > 0$, 可得 $x < 1$.
综上, x 的取值范围是 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, 故选 B.

变式题 A [解析] 由题得不等式 $(x-4)a - x^2 - 3x + 16 \leq 0$ 对任意 $a \in [-2, 4]$ 恒成立,
所以 $\begin{cases} -2(x-4) - x^2 - 3x + 16 \leq 0, \\ 4(x-4) - x^2 - 3x + 16 \leq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -x^2 - 5x + 24 \leq 0, \\ -x^2 + x \leq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -8$. 故选 A.

第二单元 函数

第6讲 函数的概念及其表示

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1) 非空的实数集 任意一个数 x
唯一确定的数 y
(2) 定义域 值域 自变量的取值
定义域 函数值
- 解法 列表法 图象法 3. 对应关系

【对点演练】

- $(-\infty, -3) \cup (-3, 8]$ [解析] 要使函数 $f(x)$ 有意义, 只需 $8-x \geq 0$ 且 $x+3 \neq 0$, 即 $x \leq 8$ 且 $x \neq -3$, 故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -3) \cup (-3, 8]$.

- $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ [解析] 函

数的定义域为 $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}\right\}$, $y =$

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x+\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}, \text{ 因为}$$

$$\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)} \neq 0, \text{ 所以 } y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)} \neq$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 故函数 } y = \frac{x}{2x+1} \text{ 的值域为 } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

- ② [解析] 对于①, 在集合 N 中找不到与 2 对应的元素, 故不是从集合 M 到集合 N 的函数; 对于③, 在集合 N 中可以找到两个元素与 1 对应, 故不是从集合 M 到集合 N 的函数; 对于④, 在集合 N 中找不到与 2 对应的元素, 故不是从集合 M 到集合 N 的函数, 故填②.

- $x-1(x>0)$ [解析] 令 $t=e^x$, 则 $t>0$, 所以 $f(t)=t-1(t>0)$, 则 $f(x)=x-1(x>0)$.

- $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$ [解析] 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) \geq 2$ 即为 $x^2+1 \geq 2$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$, 所以 $x \leq -1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 2$ 即为 $-x+3 \geq 2$, 解得 $x \leq 1$, 所以 $0 < x \leq 1$. 综上所述, x 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$.

- $[-3, 0] \cup [2, 3]$ [1, 5] [1, 2] $\cup$ (4, 5] [解析] 由函数图象可知, 函数的定义域是 $[-3, 0] \cup [2, 3]$, 函数的值域是 $[1, 5]$, 其中只有唯一的 x 值与之对应的 y 值的范围是 $[1, 2) \cup (4, 5]$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 利用对数、分式、根式的性质列不等式组, 求 x 的取值范围, 即得函数 $f(x)$ 的定义域. (2) 由函数 $y=f(x)$ 的定义域求出 $y=f(x+1)$ 的定义域, 再与 $x-1>0$ 及 $x-2 \neq 0$ 联立, 即可求函数的定义域.

(1) D (2) C [解析] (1) 要使函数 $f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-3)}$ 有意义, 需满足

$$\begin{cases} |x-2|-1 \geq 0, \\ x-3 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } x > 3 \text{ 且 } x \neq 4, \text{ 故}$$

$\begin{cases} x-3 \neq 1, \end{cases}$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3, 4) \cup (4, +\infty)$. 故选 D.

(2) 由题意, 要使函数 $y = \frac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}} +$

$(x-2)^0$ 有意义, 需满足 $\begin{cases} 0 \leq x+1 \leq 4, \\ x-1 > 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$

解得 $1 < x < 2$ 或 $2 < x \leq 3$, 所以函数 $y = \frac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}} + (x-2)^0$ 的定义域是 $(1, 2) \cup (2, 3]$. 故选 C.

变式题 (1) B (2) $(-2, 2]$ [解析] (1) 因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1, 10]$, 所以要使函数 $y=(x-3)^0 f(3x)$ 有意义, 需满足 $\begin{cases} x-3 \neq 0, \\ 1 \leq 3x \leq 10, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{10}{3}$ 且 $x \neq 3$, 所以 $y=(x-3)^0 f(3x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, 3\right) \cup \left(3, \frac{10}{3}\right]$. 故选 B.

(2) 因为函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 由 $-1 \leq 1-x < 3$, 解得 $-2 < x \leq 2$, 所以函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $(-2, 2]$.

例 2 [思路点拨] (1) 思路一: 利用配凑法求解解析式; 思路二: 利用换元法求解解析式. (2) 设出二次函数 $f(x)$ 的解析式, 然后利用待定系数法求解其解析式. (3) 用 $\frac{1}{x}$ 替换 x , 构造方程组求出 $f(x)$.

(1) D (2) $f(x) = x^2 - x + 1$

(3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (x \neq 0)$ [解析] (1) 方法一: 因为 $f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + \frac{2}{x} - 2 = \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}-1\right)$, 所以 $f(x) = x^2 + 2x (x \neq -1)$. 故选 D.

方法二: 设 $t = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 (t \neq -1)$, 则 $\frac{1}{x} = t+1 (t \neq -1)$, 所以 $f(t) = (t+1)^2 - 1 = t^2 + 2t$, 所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 + 2x (x \neq -1)$. 故选 D.

(2) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, $\because f(0) = 1, \therefore c = 1$, 则 $f(x) = ax^2 + bx + 1$. 在 $f(x+1) - f(x) = 2x$ 中, 令 $x=0$, 则 $f(1) - f(0) = 0, \therefore f(1) = 1$, 即 $a+b+1=1$, 故 $a+b=0$ ①; 令 $x=1$, 则 $f(2) - f(1) = 2, \therefore f(2) = 3$, 即 $4a+2b+1=3$, 故 $2a+b=1$ ②. 由 ①② 得 $a=1, b=-1, \therefore f(x) = x^2 - x + 1$.

(3) $\because 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{\sqrt{1+x^2}}$ ①,
 $\therefore 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} + 1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$

$$\frac{2+x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ②, 由 ①} \times 2 - \text{② 得 } 3f(x) =$$

$$\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}, \therefore f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (x \neq 0).$$

变式题 (1) AC (2) D (3) $f(x) = x^2 - 2x - 3 (x \geq 1)$ [解析] (1) 设 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$, 则 $f(2x) = 2kx + b$, 故 $f[f(2x)] = f(2kx + b) = 2k^2x + kb + b$. 因为 $f[f(2x)] = 8x + 3$, 所以 $\begin{cases} 2k^2 = 8, \\ kb + b = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=2, \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=-2, \\ b=-3. \end{cases}$ 所以 $f(x) = 2x + 1$ 或 $f(x) = -2x - 3$. 故选 AC.

(2) 用 $-x$ 替换 x , 则由 $f(x) + 2f(-x) =$

$x^2 - x$ 得 $f(-x) + 2f(x) = x^2 + x$, 联立可解得 $f(x) = \frac{x^2}{3} + x$. 故选 D.

(3) 令 $t = \sqrt{x} + 1 \geq 1$, 则 $x = (t-1)^2$, 故 $f(t) = (t-1)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3 (t \geq 1)$, 即 $f(x) = x^2 - 2x - 3 (x \geq 1)$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据分段函数的解析式先计算出 $f(e^2) = 0$, 进而求出 $f[f(e^2)] = f(0) = 1$. (2) 先根据当 $x > 0$ 时, $f(x) = f(x-3)$ 得 $f(2024) = f(-1)$, 再根据分段函数的解析式求解即可.

(1) C (2) $-\frac{2}{e}$ [解析] (1) 因为 $e^2 > 3$, 所以 $f(e^2) = \ln e^2 - 2 = 0$, 所以 $f[f(e^2)] = f(0) = e^0 - 0 = 1$. 故选 C. (2) 由题可知 $f(2024) = f(2021) = \dots = f(2) = f(-1) = e^{-1+\ln 2} = \frac{e^{\ln 2}}{e} = \frac{2}{e}$.

例 4 [思路点拨] (1) 先根据分段函数的解析式求出 $f(1)$, 即可得到 $f(a) = -2$, 再分 $a > 0$ 和 $a \leq 0$ 两种情况求解即可. (2) 分 $x < 0$ 和 $x \geq 0$ 两种情况化简不等式求解即可.

(1) A (2) B [解析] (1) $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ x+1, & x \leq 0, \end{cases} \therefore f(1) = 2^1 = 2$, 又 $f(a) + f(1) = 0, \therefore f(a) = -2$. 当 $a > 0$ 时, $f(a) = 2^a = -2$, 无解; 当 $a \leq 0$ 时, $f(a) = a+1 = -2$, 解得 $a = -3$. 故选 A. (2) 当 $x < 0$ 时, 不等式 $f(x) < 2$ 即为 $-x^2 - 2x < 2$, 所以 $x^2 + 2x + 2 > 0$, 可得 $x < 0$; 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) < 2$ 即为 $\log_2(x+1) < 2$, 所以 $x+1 < 4$, 且 $x+1 > 0$, 所以 $0 \leq x < 3$. 综上, 不等式 $f(x) < 2$ 的解集是 $(-\infty, 3)$. 故选 B.

【应用演练】

- B [解析] 由题意知, $f(1) = a+3$, $f(-1) = \frac{1}{2}$, 即 $f(a+3) = \frac{1}{2}$. 当 $a+3 \geq 0$, 即 $a \geq -3$ 时, $f(a+3) = a+3(a+3) = 4a+9 = \frac{1}{2}$, 解得 $a = -\frac{17}{8}$, 满足题意; 当 $a+3 < 0$, 即 $a < -3$ 时, $f(a+3) = 2^{a+3} = \frac{1}{2}$, 解得 $a = -4$, 满足题意. 所以 $a = -\frac{17}{8}$ 或 $a = -4$. 故选 B.

- C [解析] 当 $a > 0$ 时, $-a < 0$, 由 $f(a) > f(-a)$ 得 $\log_2 a > \log_{\frac{1}{2}}(-a)$, 所以 $2\log_2 a > 0$, 可得 $a > 1$; 当 $a < 0$ 时, $-a > 0$, 由 $f(a) > f(-a)$ 得 $\log_{\frac{1}{2}}(-a) > \log_2(-a)$, 所以 $2\log_2(-a) < 0$, 可得 $0 < -a < 1$, 即 $-1 < a < 0$. 综上所述, $-1 < a < 0$ 或 $a > 1$. 故选 C.

- ABD [解析] 由 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}, \end{cases}$ 可得 $D(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$, 所以 $D[D(x)] = 1$, 故选项 A, B 正确. 因为当 x 是无理数时, $D(x) = 0$ 且 $x+1$ 是无理数, 所以 $D(x+1) = 0$, 所以 $D(x+1) \neq D(x)+1$, 故选项 C 错误. 当 x 是有理数时, $x+1, -x-1$ 均为有理数, 此时有 $D(x+1) = D(-x-1) = 1$; 当 x 是无理数时, $x+1, -x-1$ 均为无理数, 此时有 $D(x+1) = D(-x-1) = 0$. 所以对任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $D(x+1) = D(-x-1)$, 故选项 D 正确. 故选 ABD.

- $\frac{81}{16}$ [解析] $\because \log_3 \frac{1}{16} = -\log_3 16, 3^2 < 16 < 3^3, \therefore -3 < \log_3 \frac{1}{16} < -2, \therefore f\left(\log_3 \frac{1}{16}\right) =$

$$f\left(\log_3 \frac{1}{16} + 2\right) = f\left(\log_3 \frac{1}{16} + 2 + 2\right) = f\left(\log_3 \frac{81}{16}\right) = 3^{\log_3 \frac{81}{16}} = \frac{81}{16}.$$

第7讲 函数的单调性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $f(x_1) < f(x_2)$ $f(x_1) > f(x_2)$
上升的 下降的
2. 单调性 单调区间
3. $f(x) \leq M$ $f(x_0) = M$ $f(x) \geq M$
 $f(x_0) = M$ 纵坐标 纵坐标

【对点演练】

1. $(2, 3]$ $[-3, 2]$ [解析] 由函数 $f(x) = (x-2)^2 + 5$ ($x \in [-3, 3]$) 的图象可得 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(2, 3]$, 单调递减区间是 $[-3, 2]$.
2. $>$ [解析] 因为对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 都有 $\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $-3 > -\pi$, 所以 $f(-3) > f(-\pi)$.
3. $(-\infty, 2]$ [解析] 函数 $f(x) = |x - a| + 1$ 的单调递增区间是 $[a, +\infty)$, 当 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增时, $[2, +\infty) \subseteq [a, +\infty)$, 所以 $a \leq 2$, 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.
4. $[3, +\infty)$ [解析] 由 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. 由函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[3, +\infty)$.
5. $(-\infty, \frac{13}{8}]$ [解析] 由题知 $\begin{cases} a - 2 < 0, \\ (a - 2) \times 2 \leq (\frac{1}{2})^2 - 1, \end{cases}$ 解得 $a \leq \frac{13}{8}$, 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{13}{8}]$.
6. (1) $(-\infty, -3]$ (2) -3 [解析] (1) 函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1 - a$, 由题意得 $1 - a \geq 4$, 解得 $a \leq -3$, 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$. (2) 函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1 - a$, 由题意得 $1 - a = 4$, 解得 $a = -3$.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] 利用定义证明函数的单调性即可.

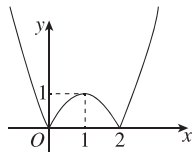
解: 任取 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, 且 $x_1 < x_2$, 易知 $f(x) = \frac{a(x-1)+1}{x-1} = a\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = a\left(1 + \frac{1}{x_1-1}\right) - a\left(1 + \frac{1}{x_2-1}\right) = \frac{a(x_2 - x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)},$$

又 $x_2 - x_1 > 0, x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 < 0$, 故当 $a > 0$ 时, $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减; 当 $a < 0$ 时, $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

变式题 BD [解析] 对于

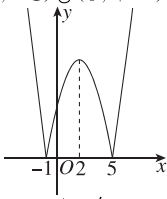
A, 画出函数 $y = |x^2 - 2x|$ 的图象, 如图所示, 易知函数 $y = |x^2 - 2x|$ 在其定义域内不是增函数, 故 A 错误; 对于 B, 因为函数 $y = e^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $y = e^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 所以 $y = e^x - e^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 B 正确; 对于 C, 函数 $y = \log_{0.5} x$ 在定义域上是减函数, 而 $y = x + 1$ 在定义域上为增函数, 所以函数 $y = \log_{0.5}(x+1)$ 在定义域 $(-1, +\infty)$ 上为减函数, 故 C 错误; 对于 D, $y = x + \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}, y' = 1 - \sin x \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 故 $y = x + \cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 D 正确. 故选 BD.



例2 [思路点拨] (1) 作出函数 $y = |-x^2 + 4x + 5|$ 的图象, 根据图象即可得解. (2) 对函数求导, 利用导数的符号确定函数的单调区间.

(1) $(-1, 2), (5, +\infty)$ (2) A

[解析] (1) 函数 $y = |-x^2 + 4x + 5| = \begin{cases} -x^2 + 4x + 5, & x \in [-1, 5], \\ x^2 - 4x - 5, & x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty), \end{cases}$ 由 $|-x^2 + 4x + 5| = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 5$, 作出函数 $y = |-x^2 + 4x + 5|$ 的图象如图所示. 由图可知, 函数 $y = |-x^2 + 4x + 5|$ 的单调递增区间为 $(-1, 2), (5, +\infty)$.



(2) 由题得 $f'(x) = 1 + \ln x$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递

增, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{e})$. 故选 A.

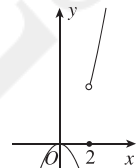
变式题 (1) C (2) $(\pi, 2\pi)$ (3) $[0, 2)$

[解析] (1) 由 $x^2 - 2x > 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x > 2$, 所以函数 $y = \ln(x^2 - 2x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. 令 $u = x^2 - 2x$, 则函数 $u = x^2 - 2x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 而函数 $y = \ln u$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故由复合函数的单调性可得 $y = \ln(x^2 - 2x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$. 故选 C.

(2) 由 $y = \sin x - x \cos x$ ($0 < x < 2\pi$), 得 $y' = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$, 令 $y' < 0$, 得 $\pi < x < 2\pi$, 所以函数 $y = \sin x - x \cos x$ ($0 < x < 2\pi$) 的单调递减区间为 $(\pi, 2\pi)$.

(3) 由题意知 $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 2, \\ 0, & x = 2, \\ -x^2, & x < 2, \end{cases}$

作出函数 $g(x)$ 的图象, 如图所示. 由图可知, $g(x)$ 的单调递减区间是 $[0, 2)$.



例3 [思路点拨] (1) 先求出函数的定义域, 再根据复合函数的单调性得出 $f(x)$ 的单调递增区间, 根据题意列出不等式组求解即可. (2) 根据分段函数在 $\mathbf{R}$ 上的单调性求解即可.

(1) D (2) B [解析] (1) 由 $-x^2 + 4x > 0$, 得 $0 < x < 4$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 4)$. 令 $g(x) = -x^2 + 4x, x \in (0, 4)$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 在 $[2, 4)$ 上单调递减, 又 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2]$. 因为 $f(x)$ 在 $(a, a+1)$ 上单调递增, 所以 $\begin{cases} a \geq 0, \\ a+1 \leq 2, \end{cases}$ 解得 $0 \leq a \leq 1$. 故选 D.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $-\frac{2a}{2} \geq 0$, 且 $-a \leq e^0 + \ln 1$, 解得 $-1 \leq a \leq 0$, 故选 B.

变式题 (1) D (2) $[2, 3]$ [解析] (1) 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以根据复合函数的单调性可得 $u = x(x-a) = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$, 故选 D.

(2) 因为函数 $f(x)$ 满足对任意实数 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ 成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则 $\begin{cases} \frac{a}{2} \geq 1, \\ a > 0, \\ -a + 6 \geq a, \end{cases}$ 解得 $2 \leq a \leq 3$, 所以 a 的取值范围是 $[2, 3]$.

值范围是 $[2, 3]$.

例4 [思路点拨] 先确定 a, b, c 的大小关系, 再根据复合函数的单调性进行比较.

B [解析] 因为 $a = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}} < b = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < 1 < c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3$, 所以 $0 < a < b < c$.

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3$, 所以 $0 < a < b < c$.

$f(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} - x) = \lg \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lg \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$ ($x \in \mathbf{R}$), 易知 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, $y = \lg u$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以 $f(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} - x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 所以 $f(a) > f(b) > f(c)$. 故选 B.

例5 [思路点拨] (1) 由题得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 利用单调性可得 $a - 1 \leq -a^2 + 1$, 解不等式即可. (2) 利用已知等式结合赋值法可得 $f(1) = 1$, 再利用函数 $f(x)$ 的单调性进行求解.

(1) $[-2, 1]$ (2) D [解析] (1) 因为 $y = e^{-x}$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, $y = -x^2 - 2x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 并且 $e^{-0} = 1, -0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 因为 $f(a - 1) \geq f(-a^2 + 1)$, 所以 $a - 1 \leq -a^2 + 1$, 解得 $-2 \leq a \leq 1$, 故实数 a 的取值范围是 $[-2, 1]$.

(2) 在 $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$ 中, 令 $x = y = 1$, 得 $f(1) = f(1) + f(1) - 1$, 即 $f(1) = 1$, 所以 $f(\log_2 x - 1) > f(1)$. 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 所以 $\begin{cases} \log_2 x - 1 > 0, \\ \log_2 x - 1 < 1, \end{cases}$ 解得 $2 < x < 4$, 故选 D.

【应用演练】

1. A [解析] $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 由 $f(2x) > f(1-x)$, 得 $2x > 1-x$, 解得 $x > \frac{1}{3}$. 故选 A.

2. B [解析] 由 $x_0 > 0$, 得 $x_0 + 1 > x_0 > 0$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x_0 + 1) < f(x_0)$, 故 B 正确, A 错误. 当 $x_0 > 0$ 时, $x_0 - 1$ 与 0 的大小关系无法确定, 无法比较 $f(x_0 - 1)$ 与 $f(x_0)$ 的大小, 故 C, D 错误. 故选 B.

3. A [解析] 构造函数 $f(x) = 2^x - 3^{-x}$, 易知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 由 $2^x - 2^{-x} < 3^{-x} - 3^{-y}$ 得 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$, 即 $f(x) < f(y)$, $\therefore x < y$, $\therefore y - x + 1 > 1$, $\therefore \ln(y - x + 1) > 0$. 故选 A.

4. $(-\infty, 0)$ [解析] 当 $x \leq 3$ 时, $f(x) = x^2 - 3x$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{3}{2}, 3]$ 上单调递增, 当 $x > 3$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ 单调递增, 且 $\frac{1}{3} \times 3 - 1 = 3^2 - 3 \times 3$, 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 易知 $1 - x < 2 - x$, 则当 $1 - x \geq \frac{3}{2}$ 时, 即 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(1-x) < f(2-x)$ 恒成立; 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $2 - x < \frac{5}{2} < 3$, 原不等式化为 $(1-x)^2 - 3(1-x) < (2-x)^2 - 3(2-x)$, 解得 $x < 0$, 则 $-\frac{1}{2} < x < 0$, 综

上,不等式 $f(1-x) < f(2-x)$ 的解集为 $(-\infty, 0)$.

增分微课 1 函数的值域与最值

例 1 (1) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$ (2) $\left[\log_{\frac{1}{2}} 5, \log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{4}\right]$

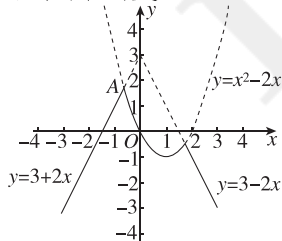
[解析] (1) 因为 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \frac{1}{2^x}$ 在 $[1, 2)$ 上均单调递减, 所以 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2^x}$ 在 $[1, 2)$ 上单调递减, 所以 $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \frac{1}{2} < y \leq \log_{\frac{1}{2}} 1 + \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{3}{4} < y \leq \frac{1}{2}$, 所以函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2^x}, x \in [1, 2)$ 的值域为 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 设 $t = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$, $\therefore 0 \leq x \leq 2, \therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, t 取得最小值 $\frac{11}{4}$, 当 $x = 0$ 时, t 取得最大值 5, 即 $\frac{11}{4} \leq t \leq 5$. $\therefore$ 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 为减函数, $\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 \leq f(x) \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{4}$, 即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\log_{\frac{1}{2}} 5, \log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{4}\right]$.

变式题 (1) $\left[\frac{1}{8}, 33\right]$ (2) 4

[解析] (1) 因为 $y = 2^{x-5}$ 和 $y = \log_3 \sqrt{x-1}$ 在 $[2, 10]$ 上都单调递增, 所以 $y = 2^{x-5} + \log_3 \sqrt{x-1}$ 在 $[2, 10]$ 上单调递增, 当 $x = 2$ 时, $y_{\min} = 2^{-3} + \log_3 \sqrt{2-1} = \frac{1}{8}$, 当 $x = 10$ 时, $y_{\max} = 2^5 + \log_3 \sqrt{9} = 33$, 故所求函数的值域为 $\left[\frac{1}{8}, 33\right]$.
(2) 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = 4e^{x-1}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增, 此时 $f(x)_{\max} = f(1) = 4$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{4}{x} - x + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $f(x) < f(1) = 4$. 综上所述, $f(x)$ 的最大值为 4.

例 2 B [解析] 由题得 $F(x) = \begin{cases} 3+2x, & x < 2-\sqrt{7}, \\ x^2-2x, & 2-\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{3}, \\ 3-2x, & x > \sqrt{3}. \end{cases}$ $F(x)$ 的图象如图所示, 由图知 $F(x)$ 在 A 处取得最大值, 又 $x_A = 2 - \sqrt{7}$, 所以 $y_A = 3 + 2(2 - \sqrt{7}) = 7 - 2\sqrt{7}$, 所以 $F(x)$ 有最大值 $7 - 2\sqrt{7}$, 无最小值. 故选 B.



变式题 $\frac{3}{2}$ [解析] 由 $|x+1| \geq |x-2|$, 得 $(x+1)^2 \geq (x-2)^2$, 所以 $x \geq \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \geq \frac{1}{2}, \\ |x-2|, & x < \frac{1}{2}, \end{cases}$ 其图象如图所示, 由图象易知, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数

有最小值, 所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{3}{2}$.

例 3 $\frac{17}{8}$ [解析] 令 $\sqrt{1-x} = t (t \geq 0)$, 则 $x = 1 - t^2$, 所以 $y = -2t^2 + t + 2 = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} (t \geq 0)$, 由二次函数的性质知, 当 $t = \frac{1}{4} = \sqrt{1-x}$, 即 $x = \frac{15}{16}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{17}{8}$.

变式题 (1) B (2) $[4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{10}]$
[解析] (1) $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, 令 $\sqrt{x^2+4} = t (t \geq 2)$, 则 $y = t + \frac{1}{t}$, 易知 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $y_{\min} = \frac{5}{2}$. 故选 B.
(2) 由 $5 - x^2 \geq 0$, 得 $|x| \leq \sqrt{5}$, 令 $x = \sqrt{5} \cos \beta, \beta \in [0, \pi]$, 则 $y = \sqrt{5} \cos \beta + 4 + \sqrt{5} \sin \beta = \sqrt{10} \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) + 4$. 因为 $0 \leq \beta \leq \pi$, 所以 $\frac{\pi}{4} \leq \beta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$, 则 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$. 当 $\beta = \frac{\pi}{4}$ 时, $y_{\max} = 4 + \sqrt{10}$; 当 $\beta = \pi$ 时, $y_{\min} = 4 - \sqrt{5}$, 所以函数 $y = x + 4 + \sqrt{5-x^2}$ 的值域为 $[4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{10}]$.

例 4 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
[解析] $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1} = \frac{2x+\frac{2}{3}-\frac{11}{3}}{3x+1} = \frac{\frac{2}{3}(3x+1) - \frac{11}{3}}{3x+1} = \frac{2}{3} - \frac{11}{3(3x+1)}$, 其中 $y = -\frac{11}{3} \cdot \frac{1}{3x+1}$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

变式题 $\{y \in \mathbf{R} | y \neq 3\}$ [解析] $y = \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3(x-2)+7}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}$, 因为 $\frac{7}{x-2} \neq 0$, 所以 $3 + \frac{7}{x-2} \neq 3$, 所以 $y = \frac{3x+1}{x-2}$ 的值域为 $\{y \in \mathbf{R} | y \neq 3\}$.

例 5 C [解析] 设 $y = \frac{8x+15}{x^2+3x+4}$, 则 $yx^2 + (3y-8)x + 4y-15 = 0$, 当 $y = 0$ 时, $x = -\frac{15}{8}$; 当 $y \neq 0$ 时, 视其为关于 x 的二次方程, 由 $\Delta = (3y-8)^2 - 4y(4y-15) \geq 0$, 得 $\begin{cases} -\frac{16}{7} \leq y \leq 4, \\ y \neq 0. \end{cases}$ 综上, 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{16}{7}, 4\right]$. 故选 C.

变式题 C [解析] 方法一: 由 $y = \frac{x}{x^2+x+1}$, 得 $yx^2 + (y-1)x + y = 0$, 当 $y = 0$ 时, 得 $x = 0$, 不符合题意; 当 $y \neq 0$ 时, 由 $\Delta = (y-1)^2 - 4y^2 \geq 0$, 解得 $-1 \leq y \leq \frac{1}{3}$, 又 $x > 0$, 所以 $y > 0$, 所以 $0 < y \leq \frac{1}{3}$. 综上, $y = \frac{x}{x^2+x+1} (x > 0)$ 的值域为 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$. 故选 C.

方法二: $y = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1}$, 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 而 $x^2 + x + 1 > 0$ 恒成立, 故 $0 < \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1} \leq \frac{1}{3}$, 所以 $y = \frac{x}{x^2+x+1} (x > 0)$ 的值域为 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$. 故选 C.

例 6 $[\sqrt{34}, +\infty)$ [解析] 原函数可变形为 $y = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (0+1)^2}$, 上式可看成 x 轴上的点 $P(x, 0)$ 到两定点 $A(3, 2), B(-2, -1)$ 的距离之和, 当点 P 为线段 AB 与 x 轴的交点时, $y_{\min} = |AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$, 故所求函数的值域为 $[\sqrt{34}, +\infty)$.

变式题 $\left[\frac{-4-\sqrt{7}}{3}, \frac{-4+\sqrt{7}}{3}\right]$ [解析] $y = \frac{\sin x + 2}{\cos x - 2}$ 表示点 $(\cos x, \sin x)$ 与点 $(2, -2)$ 连线的斜率, $\therefore (\cos x, \sin x)$ 的轨迹为圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, $\therefore y = \frac{\sin x + 2}{\cos x - 2}$ 表示圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的点与点 $(2, -2)$ 连线的斜率. 由图可知, 过点 $(2, -2)$ 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 斜率必然存在, 设过点 $(2, -2)$ 的圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线方程为 $y + 2 = k(x - 2)$, 即 $kx - y - 2k - 2 = 0$, $\therefore$ 圆心 $(0, 0)$ 到切线的距离 $d = \frac{|-2k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$, 则圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的点与点 $(2, -2)$ 连线的斜率的取值范围为 $\left[\frac{-4-\sqrt{7}}{3}, \frac{-4+\sqrt{7}}{3}\right]$, 即 $y = \frac{\sin x + 2}{\cos x - 2}$ 的值域为 $\left[\frac{-4-\sqrt{7}}{3}, \frac{-4+\sqrt{7}}{3}\right]$.

例 7 $\sqrt{2} \cos 1 + \frac{1}{2}$ [解析] 由 $f(x) = \sqrt{2} \cos x + \frac{x^2}{2}, x \in [0, 1]$, 可得 $f'(x) = -\sqrt{2} \sin x + x, x \in [0, 1]$, 设 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x$, 令 $h'(x) > 0$, 得 $\frac{\pi}{4} < x \leq 1$, 令 $h'(x) < 0$, 得 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$, 所以 $f'(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right]$ 上单调递增, 又因为 $f'(0) = 0, f'(1) = 1 - \sqrt{2} \sin 1 < 1 - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 0$, 所以 $f'(x) \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\min} = f(1) = \sqrt{2} \cos 1 + \frac{1}{2}$.

变式题 e [解析] 因为 $f(x) = e^x - x + 1$, 所以 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = \max\{f(-1), f(1)\} = \max\left\{\frac{1}{e} + 2, e\right\} = e$.

第 8 讲 函数的奇偶性、对称性

● 课前基础巩固
【知识聚焦】
 $f(-x) = f(x) \quad f(-x) = -f(x)$
原点 y 轴 原点

【对点演练】

1. ①③ [解析] 根据偶函数的定义,可知①③是偶函数.

2. (0,1) [解析] $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$,

函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向上平移一个单位长度得到 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 的图象,又 $y = \frac{1}{x}$ 的图象关于点(0,0)对称,所以 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 的图象关于点(0,1)对称.

3. $(-2,0) \cup (2,5]$ [解析] 由图象知,当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) > 0$,当 $2 < x \leq 5$ 时, $f(x) < 0$.因为 $f(x)$ 是奇函数,所以当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$,当 $-5 \leq x < -2$ 时, $f(x) > 0$.综上, $f(x) < 0$ 的解集是 $(-2,0) \cup (2,5]$.

4. 非奇非偶 [解析] 由 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 1, \end{cases}$ 即 $x=1$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{1\}$,因为函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称,所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

5. $x=a$ (b,0) [解析] 因为 $y=f(x+a)$ 是偶函数,所以其图象关于 y 轴对称,将 $y=f(x+a)$ 的图象向左($a < 0$)或向右($a > 0$)平移 $|a|$ 个单位长度,得到函数 $y=f(x)$ 的图象,则 $y=f(x+a)$ 图象的对称轴平移至直线 $x=a$ 处,即函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.同理,函数 $y=g(x)$ 的图象关于点(b,0)对称.

6. $\begin{cases} x^2+x > 0, \\ 0, x=0, \\ -x^2+x < 0 \end{cases}$ [解析] 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,所以 $f(x) = -f(-x) = -(-x)[(-x)+1] = -x^2+x$.由奇函数的定义可知 $f(0) = 0$,所以 $f(x) = \begin{cases} x^2+x > 0, \\ 0, x=0, \\ -x^2+x < 0. \end{cases}$

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] 首先确定各函数的定义域,判断定义域是否关于原点对称,若对称,再根据奇、偶函数的定义判断函数的奇偶性;若不对称,则函数为非奇非偶函数.

B [解析] 对于A,由 $x+1 \neq 0$,得 $x \neq -1$,则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq -1\}$,定义域不关于原点对称,故 $f(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ 为非奇非偶函数,A不符合题意;对于B, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x = f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数,B符合题意;对于C,因为 $\sqrt{x^2+1}-x > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x) = \log_2(\sqrt{x^2+1}+x) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,C不符合题意;对于D, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x) = 2^{-x} - (\frac{1}{2})^{-x} = (\frac{1}{2})^x - 2^x = -f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,D不符合题意.故选B.

变式题 (1)ABC (2)BC [解析] (1)对于A, $f(x) = e^x - e^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,故A正确;对于B, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,设 $x < 0$,则 $-x > 0$,所以 $f(-x) = -x^2 - x$,则 $f(-x) = -f(x)$,同理当 $x > 0$ 时, $f(-x) = -f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是奇函数,故B正确;对于C, $f(x) = \tan x$ 为奇函数,故C正确;对于D, $f(x) = x - \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = -x - \cos x$, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$,所以函数 $f(x) = x - \cos x$ 既不是偶函数也不是奇函数,故D错误.故选ABC.

(2)对于A,设 $F(x) = f(x)g(x)$,则

$F(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -F(x)$,故 $F(x)$ 为奇函数,故A错误;对于B,设 $m(x) = |f(x)| + g(x)$,则 $m(-x) = |f(-x)| + g(-x) = |f(x)| + g(x) = m(x)$,故 $m(x)$ 为偶函数,故B正确;对于C,设 $n(x) = f(x)|g(x)|$,则 $n(-x) = f(-x)|g(-x)| = -f(x)|g(x)| = -n(x)$,故 $n(x)$ 为奇函数,故C正确;对于D,设 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$,则 $\varphi(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) - g(x) \neq \pm \varphi(x)$,故 $\varphi(x)$ 为非奇非偶函数,故D错误.故选BC.

例2 [思路点拨] (1)思路一:由奇函数的定义得 $h(x) = \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为奇函数,结合 $f(x)$ 为偶函数,得 $g(x) = x+a$ 为奇函数,进而得 a 的值;思路二:用特值法求解.(2)根据 $f(0) = 0$ 求得 $m = -1$,再结合奇函数的定义求当 $x < 0$ 时 $f(x)$ 的解析式.

(1)B (2) $-2^{-x} - 2x + 1$

[解析] (1)方法一:由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.令 $h(x) = \ln \frac{2x-1}{2x+1}$,则 $h(-x) = \ln \frac{-2x-1}{-2x+1} = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = -h(x)$,所以 $h(x)$ 为奇函数.令 $g(x) = x+a$,由 $f(x)$ 为偶函数, $h(x)$ 为奇函数,可得 $g(x)$ 为奇函数,所以 $a = 0$,故选B.

方法二:由题知函数 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(1) = f(-1)$,故 $(1+a)\ln \frac{1}{3} = (-1+a)\ln 3$,解得 $a = 0$,故选B.

(2) $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0) = 1 + m = 0$,解得 $m = -1$,故当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x - 2x - 1$,当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,故 $f(x) = -f(-x) = -[2^{-x} - 2(-x) - 1] = -2^{-x} - 2x + 1$.

变式题 (1)C (2) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

[解析] (1)当 $x > 0$ 时, $-x < 0$,则 $f(-x) = (\frac{1}{2})^{-x} = 2^x$,因为函数 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x) = -f(x)$,所以 $f(x) = -2^x$, $x > 0$,即 $g(x) = -2^x$.故选C.

(2)因为 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$,所以 $\begin{cases} f(x) + g(x) = e^x + x, \\ f(-x) + g(-x) = e^{-x} - x, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} f(x) + g(x) = e^x + x, \\ -f(x) + g(x) = e^{-x} - x, \end{cases}$ 解得 $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

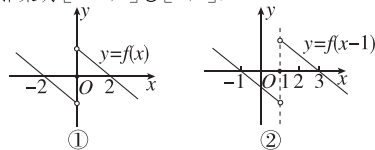
例3 [思路点拨] (1)利用偶函数性质以及函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增即可判断得出结论.(2)思路一:根据平移结合图象得到结果;思路二:利用奇函数与单调性的综合性质求得结果.

(1)B (2) $[-1, 0] \cup [1, 3]$

[解析] (1)易知 $f(e^{-\frac{1}{2}}) = f(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}) = f(\frac{1}{\sqrt{e}})$,显然 $\frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2} > \frac{1}{\pi}$,因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,所以 $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) > f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{\pi})$,又 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{\pi})$,以 $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{\pi}) = f(-\frac{1}{\pi})$,所以 $f(e^{-\frac{1}{2}}) > f(-\frac{1}{2}) > f(-\frac{1}{\pi})$,故B.

(2)方法一:由题意可得 $y = f(x)$ 的图象可如图①所示, $\therefore y = f(x-1)$ 的图象可

由 $y = f(x)$ 的图象向右平移一个单位得到(如图②), $\therefore$ 满足 $xf(x-1) \geq 0$ 即满足 $f(x-1)$ 与 x 同号或二者至少有一个为零,由图可得 $xf(x-1) \geq 0$ 的解集为 $[-1, 0] \cup [1, 3]$.



方法二:由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,所以 $f(0) = 0$,由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减,且 $f(2) = 0$ 可得 $f(-2) = 0$,所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$;当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$.则对于函数 $f(x-1)$ 而言,当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$ 时, $f(x-1) > 0$;当 $x \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$ 时, $f(x-1) < 0$.又 $f(-1-1) = f(3-1) = f(1-1) = 0$,所以满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围为 $[-1, 0] \cup [1, 3]$.

变式题 (1)D (2) $x > 1$ 或 $x < -4$

[解析] (1)由 $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$,且定义域关于原点对称,得 $f[f(x)]$ 是奇函数,由 $f[g(-x)] = f[g(x)]$,且定义域关于原点对称,得 $f[g(x)]$ 为偶函数,故A,B选项均错误.由题易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,由 $-1 > -2$,得 $f(-1) < f(-2)$,从而 $f[f(-1)] > f[f(-2)]$,故C选项错误.由题易知函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,由 $0 < f(0) < f(-1) < f(-2)$,得 $|-f(-1)| < f(-2)$,从而 $g[-f(-1)] > g[f(-2)]$,故D选项正确.故选D.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = -2\sin x - e^{-x} + e^x = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数. $f'(x) = 2\cos x - (e^x + e^{-x})$, $\therefore 2\cos x \leq 2, e^x + e^{-x} \geq 2, \therefore f'(x) \leq 0, \therefore f(x)$ 为减函数,又 $f(x^2-4) + f(3x) < 0, \therefore f(x^2-4) < -f(3x) = f(-3x), \therefore x^2-4 > -3x$,解得 $x > 1$ 或 $x < -4$.

例4 [思路点拨] 构造函数 $g(x) = f(x) - 7$,由奇函数的定义得 $g(x)$ 为奇函数,利用奇函数图象的对称性得 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$,即可求解.

14 [解析] 令 $g(x) = f(x) - 7 = ax^3 + 3\sin x$,且 $x \in [-2024, 2024]$,则 $g(-x) = a(-x)^3 + 3\sin(-x) = -ax^3 - 3\sin x = -g(x)$,所以 $g(x)$ 为奇函数且其图象在 $[-2024, 2024]$ 上连续,根据奇函数图象的对称性得 $g(x)$ 在 $[-2024, 2024]$ 上的最大值、最小值关于原点对称,则 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = M - 7 + m - 7 = 0$,故 $M + m = 14$.

变式题 (1)C (2) $\frac{\pi}{4}$ [解析] (1)因为

$f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上的单调性与 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上的单调性相同,也单调递增, $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上的最小值为5,即 $f(3) = 5$,所以 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上的最大值为 $f(-3) = -f(3) = -5$.故选C.

(2)设 $g(x) = \cos x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,则 $g(-x) = \cos x \cdot \ln(-x + \sqrt{1+x^2})$, $g(x) + g(-x) = \cos x \cdot \ln 1 = 0$,则 $g(x)$ 是奇函数, $\therefore g(x)$ 的最大值和最小值互为相反数,且 $f(x)$ 的最大值为 M ,最小值为 m , $\therefore M + m = \frac{\pi}{2}$,则 $f(M + m) = \frac{\pi}{4}$.

例5 [思路点拨] 设 $P(m, n)$ 为 $y = f(x)$ 图象上任意一点,可证 $P(m, n)$ 关于 $(1, a)$ 的对称点 $Q(2-m, 2a-n)$ 也在函数 $y = f(x)$ 的图象上,从而可证对称性.

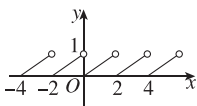
证明: $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$ 的定义域为 $(0, 2)$,设 $P(m, n)$ 为 $y = f(x)$ 图象上任意一点, $P(m, n)$ 关于 $(1, a)$ 的对称点为 $Q(2-m, 2a-n)$,因为 $P(m, n)$ 在 $y = f(x)$ 的图象上,所以 $n =$

$$\ln \frac{m}{2-m} + am + b(m-1)^3,$$

$$\text{而 } f(2-m) = \ln \frac{2-m}{m} + a(2-m) + b(2-m-1)^3 = -\left[\ln \frac{m}{2-m} + am + b(m-1)^3 \right] + 2a = -n + 2a, \text{ 所以 } Q(2-m, 2a-n) \text{ 也在 } y=f(x) \text{ 的图象上, 所以 } y=f(x) \text{ 的图象关于点 } (1, a) \text{ 中心对称.}$$

变式题 (1)D (2)AC **【解析】** (1) 对于 A, $y=x^3$ 为奇函数, 故 $y=x^3+1$ 的图象有对称中心 $(0, 1)$; 对于 B, $y=x+\frac{1}{x}$ 为奇函数, 将其图象向右平移一个单位后得到 $y=x-1+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ 的图象, 故有对称中心 $(1, 0)$; 对于 C, $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 为奇函数, 其图象有对称中心 $(0, 0)$; 对于 D, $y=\left|x+\frac{1}{x}\right|$ 的图象不存在对称中心, 故选 D.

(2) 对于 A, $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)$ 的图象关于原点对称, 而 $f(x-1)$ 的图象是将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位得到的, $\therefore f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 A 正确. 对于 B, 由 $f(x+1)=f(x-1)$, 得 $f(x)=f(x+2)$, 其图象不一定关于直线 $x=1$ 对称, 若 $f(x)$ 的图象如图所示, 该函数满足 $f(x)=f(x+2)$, 但函数图象不关于直线 $x=1$ 对称, 故 B 不正确. 对于 C, $g(x)=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则有 $g(x+1)=g(-x+1)$, 即 $f(x)=f(-x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数, 故 C 正确. 对于 D, 函数 $y=f(x+1)$ 的图象与函数 $y=f(1-x)$ 的图象关于 y 轴对称, 故 D 不正确. 故选 AC.



第9讲 函数的四性质的应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

(1) $f(x+T)=f(x)$ (2)最小的正数最小正数

【对点演练】

- 8 **【解析】** 因为 $f(x+3)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 所以 $f(2024)=f(674 \times 3+2)=f(2)=8$.
- 5 **【解析】** $\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-1)=f(1)$, 又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $\therefore f(1)=f(3)=2 \times 3-1=5$, $\therefore f(-1)=5$.
- 3 (答案不唯一) **【解析】** 因为 $|x+2-(x-1)|=3$, 所以 $f(x)$ 的一个周期为 3.
- $f(x)=(x+1)^2+1$ (答案不唯一) **【解析】** 由 $y=f(2x-1)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数可得 $f(-2x-1)=f(2x-1)$, 所以 $f(-x-1)=f(x-1)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称, 又 $f(0)=2$, 所以满足条件的一个函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=(x+1)^2+1$.

● 课堂考点探究

例 1 **【思路点拨】** (1) 通过已知条件得到函数 $f(x)$ 的周期, 结合 $f(3)=2$ 得到结果. (2) 根据函数 $f(x)$ 的周期以及偶函数的性质, 得到函数 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上的解析式.

$$(1) \frac{13}{2} \quad (2) f(x) = \log_2(5-x), x \in [2, 4] \quad \text{【解析】} (1) \because f(x)f(x+2)=13, \therefore f(x+2) = \frac{13}{f(x)}, \therefore f(x+4) = \frac{13}{f(x+2)} = \frac{13}{\frac{13}{f(x)}} = f(x), \therefore f(x) \text{ 的周期为 } 4, \therefore f(2025) = f(1) = \frac{13}{f(3)} = \frac{13}{2}.$$

(2) 根据题意, 设 $x \in [2, 4]$, 则 $x-4 \in$

$[-2, 0]$, 则有 $4-x \in [0, 2]$, 又当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$, 所以 $f(4-x) = \log_2[(4-x)+1] = \log_2(5-x)$, 又 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数, 所以 $f(x) = f(x-4) = f(4-x) = \log_2(5-x)$, $x \in [2, 4]$, 即 $f(x) = \log_2(5-x)$, $x \in [2, 4]$.

变式题 (1)D (2)AB **【解析】** (1) 因为 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 6, 所以 $f(2024) = f(337 \times 6 + 2) = f(2) = f(-1+3) = -f(-1) = -2^{-1} = -\frac{1}{2}$, 故选 D.

(2) 对于 A, $f(2027) = f(507 \times 4 - 1) = f(-1) = f(1) = 0$, 所以 A 正确; 对于 B, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 2$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $[-1, 2]$, 由函数 $f(x)$ 是偶函数, 可得 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的取值范围也为 $[-1, 2]$, 又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$, 所以 B 正确; 对于 C, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 2$ 单调递增, 又 $f(x)$ 的周期是 4, 所以 $f(x)$ 在 $[4, 6]$ 上也单调递增, 所以 C 错误; 对于 D, 当 $x \in [0, 2]$ 时, 令 $f(x) = 2^x - 2 = 0$, 得 $x = 1$, 所以 $f(1) = f(-1) = 0$, 又 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(5) = f(-5) = 0$, $f(3) = f(-3) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-6, 6]$ 上有 6 个零点, 所以 D 错误, 故选 AB.

例 2 **【思路点拨】** 对于 A, 根据 $y=f(1-2x)$ 为偶函数即可判断; 对于 B, 根据对称性和奇偶性即可判断; 对于 C, 根据周期性对称性可得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 的值, 再求解即可判断; 对于 D, 结合以上分析即可判断.

ABC **【解析】** 对于 A, 因为 $y=f(1-2x)$ 为偶函数, 所以 $f(1-2x)=f(1+2x)$, 故曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 故 A 正确; 对于 B, 因为曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(x)=f(2-x)$, 又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(x)=-f(-x)$, 所以 $f(2-x)=-f(-x)$, 则 $f(x+2)=-f(x)$, 所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 故 $f(x)$ 的周期为 4, 故 B 正确; 对于 C, 由题知 $f(1)=3, f(0)=0$, 因为曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(2)=0, f(3)=f(-1)=-f(1)=-3, f(4)=f(0)=0$, 故 $f(1)+f(2)+\dots+f(2027)=(3+0-3+0) \times 506 + 3 + 0 - 3 = 0$, 故 C 正确; 由上分析知 D 错误. 故选 ABC.

变式题 (1)B (2)A **【解析】** (1) 方法一: 因为 $f(2x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$, 且有 $f(2 \times 0 + 1) = f(1) = 0$, 又因为 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2)=f(-x+2)$, 令 $x=1$, 代入得 $f(3)=f(1)=0$, 在 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$ 中, 令 $x=1$ 代入得 $f(-1)=-f(3)=0$, 故一定有 $f(-1)=0$, 故选 B. 方法二: 因为 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 又因为 $f(2x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(2x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称, 从而 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 于是函数 $f(x)$ 的周期 $T=4|2-1|=4$. 由于 $f(2x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(2 \times 0 + 1) = f(1) = 0$, 而 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2)$, 令 $x=1$ 代入得 $f(3) = f(1) = 0$, 因此 $f(-1) = 0$, 故选 B.

方法三: 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)$ 是偶函数, $f(2x+1)$ 是奇函数, 所以可取 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, 这时 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(-1) = 0, f(2) = -1, f(4) = 1$, 故选 B.

(2) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+1) = f(1-x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, $\therefore f(x) = f(2-x)$, 故 $f(-x) = f(2+x) = -f(x)$, $\therefore f(x) = -f(2+x) = f(4+x)$, $\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周

期函数, 则 $f(2025) = f(506 \times 4 + 1) = f(1) = -f(-1) = 2$.

例 3 **【思路点拨】** 根据对称性和已知条件得到 $g(x)$ 是周期为 4 的函数, $f(x) = g(x) - 7$, 然后根据条件得到 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 的值, 即可求解.

D **【解析】** 由 $f(x) + g(2-x) = 5$ 得 $f(x) = 5 - g(2-x)$ ①. 由 $g(x) - f(x-4) = 7$ 得 $f(x-4) = g(x) - 7$, 所以 $f(x) = g(x+4) - 7$ ②. 由 ① ② 得 $5 - g(2-x) = g(x+4) - 7$, 即 $g(x+4) + g(2-x) = 12$, 所以 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(3, 6)$ 对称, $g(3) = 6$, 又 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以函数 $g(x)$ 是周期为 4 的函数, 且 $g(1) = g(3) = 6, f(x) = g(x) - 7$. 因为 $g(4) + g(2) = 12$, 所以 $g(4) = 12 - g(2) = 12 - 4 = 8$, 所以 $f(1) = g(1) - 7 = -1, f(2) = g(2) - 7 = -3, f(3) = g(3) - 7 = -1, f(4) = g(4) - 7 = 1$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(22) = 5 \times (-4) + (-1) + (-3) = -24$. 故选 D.

变式题 C **【解析】** 因为函数 $y=f(2x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(-2x+1) = f(2x+1)$, 所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 令 $h(x) = 2^{1-x} + 2^{x-1} - 5 = h(x)$, 可得函数 $h(x) = 2^{1-x} + 2^{x-1} - 5$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以函数 $g(x) = f(x) + 2^{1-x} + 2^{x-1} - 5$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则函数 $g(x)$ 的零点关于直线 $x=1$ 对称. 若 $g(x)$ 的零点个数为奇数, 则 $g(1) = f(1) + 1 + 1 - 5 = 0$, 所以 $f(1) = 3$. 故选 C.

例 4 **【思路点拨】** 由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 可得 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 由 $f(x+2) = -f(x)$ 得 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数及 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 综合分析得出结论.

ABD **【解析】** 由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 取 $x=y=0$ 得 $f(x)=0$, 取 $y=-x$, 则有 $f(x-x) = f(0) = f(x) + f(-x) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 由 $f(x+2) = -f(x)$, 得 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 因此函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, 故 A 正确; $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$, 因此 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 B 正确; 因为 $f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 于是得 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 故 C 错误; 由 $f(x+2) = -f(x)$, 得 $f(2) = -f(0) = 0 = f(0)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 AC **【解析】** 由 $f(1+x) = f(1-x)$, 可得 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=1$, 所以 $f(0) = f(2)$, 又由 $f(1+x) = f(1-x)$, 可知 $f(2+x) = f(-x)$. 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 即 $f(2+x) = -f(2-x)$, 所以 $f(4+x) = -f(-x)$, 所以 $-f(2+x) = f(4+x)$, 即 $-f(x) = f(2+x)$, 所以 $f(x) = f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(-2) = f(2)$, 所以 $f(0) = f(-2)$, 故 A 正确, B 错误. 因为 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递增, 且 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(x)$ 在 $(3, 4]$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单调递减, 则函数 $f(x)$ 在 $(2, 3)$ 上单调递减, 故 C 正确. 根据 $f(x)$ 的周期为 4, 可得 $f(2021) = f(1), f(2022) = f(2), f(2023) = f(3)$, 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(2) = f(0)$ 且 $f(3) = f(-1)$, 即 $f(2021) = f(1), f(2022) = f(0), f(2023) = f(-1)$, 由 C 选项的分析可知, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0]$ 上单调递减, 而 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 的大小关系不能确定, 若 $f(-1) = f(1) = 0$, 则 $f(2021) > f(2022) > f(2023)$ 不成立, 故 D 错误. 故选 AC.

增分微课 2 抽象函数

例 1 D **【解析】** 由 $f(x+y) = f(x) \cdot$

$f(y)$, 取 $y=x$, 得 $f(2x)=[f(x)]^2$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$, 所以 $f(4)=[f(2)]^2=[f(1)]^4=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^8=2^8=256$. 故选 D.

变式题 D [解析] 令 $a=b=0$, 得 $f(0)=2f(0)$, 所以 $f(0)=0$; 令 $a=1, b=-1$, 得 $f(0)=f(1)+f(-1)+1=0$, 又 $f(-1)=3$, 所以 $f(1)=-4$; 令 $a=b=1$, 得 $f(2)=f(1)+f(1)-1=-9$; 令 $a=1, b=2$, 得 $f(3)=f(1)+f(2)-2=-15$. 故选 D.

例 2 解: (1) 证明: 令 $x_1=x_2=1$, 得 $f(1)=2f(1)$, $\therefore f(1)=0$. 令 $x_1=x_2=-1$, 得 $f(1)=f(-1)+f(-1)=0$, $\therefore f(-1)=0$, $\therefore f(-x)=f(x)$. $\therefore f(x)$ 是偶函数.

(2) 证明: 设 $x_2 > x_1 > 0$, 则 $f(x_2) - f(x_1) = f\left(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}\right) - f(x_1) = f(x_1) + f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$,

$\therefore x_2 > x_1 > 0, \therefore \frac{x_2}{x_1} > 1, \therefore f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$, 即 $f(x_2) - f(x_1) > 0, \therefore f(x_2) > f(x_1)$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. (3) $\because f(2)=1, \therefore f(4)=f(2)+f(2)=2$. $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore$ 不等式 $f(2x^2-1) < 2$ 可化为 $f(|2x^2-1|) < f(4)$, 又函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore |2x^2-1| < 4$, 解得 $-\frac{\sqrt{10}}{2} < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$, 又 $2x^2-1 \neq 0$, 解得 $x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

变式题 (1) ABC (2) ABC [解析] (1) 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=0$, 故 A 正确; 令 $x=y=1$, 可得 $f(1)=f(1)+f(1)$, 即 $f(1)=0$, 故 B 正确; 令 $x=y=-1$, 则 $f(1)=f(-1)+f(-1)$, 可得 $f(-1)=0$, 令 $x=-1, y=x$, 可得 $f[(-1) \times x] = x^2 \times f(-1) + (-1)^2 \times f(x)$, 即 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, 故 C 正确; 设函数 $f(x)=0$, 此时满足 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 但函数 $f(x)$ 没有极值点, 故 D 错误. 故选 ABC. (2) 由 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$, 令 $x=y=0$, 则 $f(0) = f(0) + f(0) - 2$, 得 $f(0) = 2$, 故 A 正确; 令 $y=-x$, 则 $f(0) = f(x) + f(-x) - 2$, 即 $f(x) + f(-x) = 4$, 故 B 正确; 令 $x=2024, y=-2024$, 则 $f(0) = f(2024) + f(-2024) - 2$, 即 $f(2024) + f(-2024) = 4$, 故 C 正确; 对任意 $y \in \mathbf{R}, x > 0$, 设 $z = x+y > y$, 因为当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2$, 所以 $f(z) - f(y) = f(x) - 2 > 0$, 即 $f(z) > f(y)$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 故 D 错误. 故选 ABC.

例 3 A [解析] 方法一: 令 $x=1, y=0$, 得 $2f(1) = f(1)f(0)$, 所以 $f(0)=2$. 令 $y=1$, 得 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1)$, 所以 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)$, 即 $f(x+1) = f(x) - f(x-1)$, 所以 $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$, 所以 $f(x+3) = -f(x-1)$, 即 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x) = -f(x+3) = f(x+6)$, 即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数. 因为 $f(0)=2, f(1)=1, f(2)=f(1)-f(0)=-1, f(3)=f(2)-f(1)=-2, f(4)=-f(1)=-1, f(5)=-f(2)=1, f(6)=f(0)=2$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = [f(1)+f(2)+\cdots+f(18)] + [f(19)+f(20)+f(21)+f(22)] = f(19)+f(20)+f(21)+f(22) = f(1)+$

$f(2)+f(3)+f(4)=-3$. 方法二: 由 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, 联想到余弦函数和差化积公式 $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$. 设 $f(x) = a \cos \omega x$, 则由方法一中 $f(0)=2, f(1)=1$ 知 $a=2, 2\cos \omega = 1$, 解得 $\cos \omega = \frac{1}{2}$, 不妨取 $\omega = \frac{\pi}{3}$, 所以

$f(x) = 2\cos \frac{\pi}{3}x$, 则 $f(x+y) + f(x-y) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}y\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}y\right) = 4\cos \frac{\pi}{3}x \cos \frac{\pi}{3}y = f(x)f(y)$, 所以 $f(x) = 2\cos \frac{\pi}{3}x$ 符合条件, 因此

$f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$, 且 $f(2) = -1, f(3) = -2, f(4) = -1, f(5) = 1, f(6) = 2$, 所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6) = 0$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + 1 - 1 - 2 - 1 = -3$. 故选 A.

变式题 B [解析] 由题得 $f(x+y) + f(x-y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)$, 令 $x=y=0$, 有 $2f(0) = \frac{1}{2}[f(0)]^2$, 则 $f(0)=0$ 或 $f(0)=4$. 若 $f(0)=0$, 则令 $x=1, y=0$, 有 $2f(1) = \frac{1}{2}f(1)f(0)$, 得 $f(1)=0$, 与已知 $f(1)=2\sqrt{3}$ 矛盾, 所以 $f(0)=4$. 令 $x=y=1$, 有 $f(2)+f(0) = \frac{1}{2}[f(1)]^2$, 则 $f(2)+4 = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 = 6$, 得 $f(2)=2$. 令 $x=2, y=1$, 有 $f(3)+f(1) = \frac{1}{2}f(2)f(1)$, 得 $f(3)=0$. 令 $x=3, y=2$, 有 $f(5)+f(1) = \frac{1}{2}f(3)f(2)$, 得 $f(5) = -2\sqrt{3}$. 令 $x=5, y=2$, 有 $f(7)+f(3) = \frac{1}{2}f(5)f(2)$, 得 $f(7) = -2\sqrt{3}$. 令 $x=7, y=2$, 有 $f(9)+f(5) = \frac{1}{2}f(7)f(2)$, 得 $f(9)=0$. 令 $x=9, y=2$, 有 $f(11)+f(7) = \frac{1}{2}f(9)f(2)$, 得 $f(11) = 2\sqrt{3}$. 令 $x=0$, 有 $f(y) + f(-y) = \frac{1}{2}f(0)f(y)$, 得 $f(-y) = f(y)$. 令 $x=3$, 有 $f(3+y) + f(3-y) = \frac{1}{2}f(3)f(y) = 0$, 即 $f(3+y) = -f(3-y)$, 所以 $f(6+y) = -f(-y) = -f(y)$, 故 $f(12+y) = -f(6+y) = f(y)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 12, 所以 $f(2025) = f(12 \times 168 + 9) = f(9) = 0$. 故选 B.

例 4 B [解析] 因为 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 所以 $f(3) > f(2) + f(1) = 3, f(4) > f(3) + f(2) > 5, f(5) > f(4) + f(3) > 8, f(6) > 5 + 8 = 13, f(7) > 8 + 13 = 21, f(8) > 13 + 21 = 34, f(9) > 21 + 34 = 55, f(10) > 34 + 55 = 89, \dots, f(20) > 10\ 946$. 故选 B.

变式题 BC [解析] 令 $x=y=0$, 则有 $f(0) = f(0) + f(0) + 0$, 即 $f(0)=0$, 令 $y=1$, 则有 $f(x+1) = f(x) + f(1) + x = f(x) + x$, 所以 $f(2) = f(1) + 1 = 1 \neq 0 = -f(0)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象不关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 A 错误, B 正确; 由上知 $f(x+1) = f(x) + x$, 即 $f(x+1) - f(x) = x$, 则 $f(2024) = f(2024) - f(2023) + f(2023) - f(2022) + \cdots + f(2) - f(1) + f(1) = 2023 + 2022 + \cdots +$

$1 + 0 = \frac{(2023+1) \times 2023}{2} = 1012 \times 2023$, 故 C 正确; 因为 $f(x+1) = f(x) + x$, 则 $f'(x+1) = f'(x) + 1$, 即 $f'(x+1) - f'(x) = 1$, 令 $a_n = f'(n) (n \in \mathbf{N}^+)$, 则有 $a_{n+1} - a_n = 1$, 又 $f'(1) = \frac{1}{2}$, 所以数列 $\{a_n\}$

是等差数列, 其首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 1, 所以 $a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times 1 = n - \frac{1}{2}$, 即 $f'(n) = n - \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{k=1}^{2024} f'(k) = \frac{\left(\frac{1}{2} + 2024 - \frac{1}{2}\right) \times 2024}{2} = 1012 \times 2024$, 故 D 错误. 故选 BC.

第 10 讲 二次函数与幂函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right) \quad \left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$
 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \quad \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$
 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \quad b=0$
- $\{x|x \geq 0\} \quad \{x|x \neq 0\} \quad \{y|y \geq 0\}$
 $\{y|y \geq 0\} \quad \{y|y \neq 0\} \quad \text{奇} \quad \text{偶} \quad \text{奇}$
 $\text{非奇非偶} \quad \text{奇} \quad (-\infty, 0] \quad [0, +\infty)$
 $[0, +\infty) \quad (-\infty, 0) \quad (0, +\infty) \quad (1, 1)$

【对点演练】

- $x^{\frac{1}{2}}$ [解析] 设 $f(x) = x^a$, 则 $\sqrt{2} = 2^a$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 故函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.
- 1 [解析] 由 $f(x) = x^a$ 为奇函数, 知 a 从 -1, 1, 3 中取, 又 $f(x) = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore a < 0, \therefore a = -1$.
- 6 [解析] $\because$ 函数 $y = x^2 + (a+2)x + 3, x \in [a, b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, $\therefore -\frac{a+2}{2} = 1$ 且 $\frac{a+b}{2} = 1, \therefore a = -4, b = 6$.
- ③ [解析] 由题意可知, 函数图象的开口向下, 对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a}$, 且 $-\frac{b}{2a} > 0$, 函数图象过原点, 故填③.
- $m \leq -\frac{1}{6}$ [解析] 当 $m=0$ 时, 函数 $y = x+2$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意; 当 $m \neq 0$ 时, 函数 $y = mx^2 + x + 2$ 的图象的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2m}$, 依题意知 $\begin{cases} m < 0, \\ -\frac{1}{2m} \leq 3, \end{cases}$ 解得 $m \leq -\frac{1}{6}$.
- (3, 5) [解析] 幂函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 由 $f(a+1) < f(10-2a)$, 得 $\begin{cases} a+1 > 0, \\ 10-2a > 0, \\ a+1 > 10-2a, \end{cases}$ 解得 $3 < a < 5$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 作出直线 $x=2$, 与四个函数的图象各有一个交点, 从下到上交点的纵坐标依次增大, 得到 $2^a < 2^d < 2^c < 2^b$, 进而得到 a, b, c, d 的大小关系. (2) 利用幂函数的定义以及单调性即可求出 m 的值.

(1) B (2) C [解析] (1) 作出直线 $x=2$, 可知当 $x=2$ 时, $2^a < 2^d < 2^c < 2^b$, 则 $a < d < c < b$, 故选 B.

(2) 因为 $f(x) = (m^2 - 6m + 9)x^{m^2 - 3m - 2}$ 是幂函数, 所以 $m^2 - 6m + 9 = 1$, 解得 $m=2$ 或 $m=4$. 当 $m=2$ 时, $f(x) = x^{-4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不满足题意; 当 $m=4$ 时, $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 满足题意. 故选 C.

变式题 (1)D (2) x^{-1} (答案不唯一)

[解析] (1)由函数 $f(x) = (3m^2 - 7m - 5)x^{m-1}$ 是幂函数, 得 $3m^2 - 7m - 5 = 1$, 解得 $m = 3$ 或 $m = -\frac{2}{3}$. 当 $m = 3$ 时, $f(x) = x^2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 不符合题意; 当 $m = -\frac{2}{3}$ 时, $f(x) = x^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 符合题意. 所以 $m = -\frac{2}{3}$. 故选 D.

(2)由幂函数的图象关于原点对称, 得幂函数 $f(x)$ 为奇函数, 又幂函数 $f(x)$ 的图象与坐标轴没有交点, 所以 $f(x) = x^a$ 的幂指数 a 为负数, 例如 $a = -1$, 所以 $f(x) = x^{-1}$.

例2 [思路点拨] 根据 $f(2-x) = f(2+x)$ 得到函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 结合 $f(x)$ 的图象截 x 轴所得线段的长度为 2, 得到 $f(x)$ 的图象与 x 轴的两个交点的坐标分别为 $(1, 0)$ 和 $(3, 0)$, 设出零点式, 将点 $(4, 3)$ 的坐标代入, 求出 $f(x)$ 的解析式.

$x^2 - 4x + 3$ [解析] 因为 $f(2-x) = f(2+x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 又 $f(x)$ 的图象截 x 轴所得线段的长度为 2, 所以 $f(x) = 0$ 的两个根分别为 $2-1=1$ 和 $2+1=3$, 所以二次函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的两个交点的坐标分别为 $(1, 0)$ 和 $(3, 0)$, 因此设 $f(x) = a(x-1)(x-3)$. 因为点 $(4, 3)$ 在 $f(x)$ 的图象上, 所以 $3a = 3$, 解得 $a = 1$, 故 $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$.

变式题 $x^2 - x + 3$ [解析] 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, $\therefore f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$, $\therefore f(x+2) - f(x) = 4ax + 4a + 2b = 4x + 2$, $\therefore \begin{cases} 4a = 4, \\ 4a + 2b = 2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$ 又 $f(0) = 3$, $\therefore c = 3$, $\therefore f(x) = x^2 - x + 3$.

例3 [思路点拨] (1)根据零点的定义, 写出根与系数的关系, 通过举反例和基本不等式, 可得答案. (2)根据题意转化为 $m = -x^2 + 2x$ 对 $x \in (0, 4)$ 有解, 结合二次函数的性质, 即可求解.

(1)D (2) $[-8, 1]$ [解析] (1)由题意可得, α, β 为关于 x 的方程 $x^2 - kx + 8 = 0$ 的两个不同解, 则 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 8$, 即 α, β 同号, 则 $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| > 2\sqrt{\alpha\beta} = 4\sqrt{2}$, 故 B 错误, D 正确; 当 $\alpha = 1$ 且 $\beta = 8$ 时, $\alpha\beta = 8$, $\alpha + \beta = 9$, 则函数 $g(x) = x^2 - 9x + 8$, 显然符合题意, 故 A, C 均错误. 故选 D.

(2)令 $f(x) = 0$, 可得 $x^2 - 2x + m = 0$, 即 $m = -x^2 + 2x$, 由函数 $f(x) = x^2 - 2x + m$ 在区间 $(0, 4)$ 上存在零点, 得 $m = -x^2 + 2x$ 对 $x \in (0, 4)$ 有解. 设 $g(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$, $x \in (0, 4)$, 可得 $g(x)_{\max} = g(1) = 1$, 又 $g(0) = 0$, $g(4) = -8$, 所以 $-8 < g(x) \leq 1$, 所以 $-8 < m \leq 1$, 即实数 m 的取值范围是 $(-8, 1]$.

变式题 (1)C (2) $f(x) = 2x^2 - 10x$

[解析] (1)二次函数 $y = x^2 - 2x + m$ 的图象开口向上, 对称轴方程为 $x = 1$, 要使二次函数 $y = x^2 - 2x + m$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个零点, 只需 $1^2 - 2 \times 1 + m < 0$, 解得 $m < 1$, 所以 m 的取值范围是 $(-\infty, 1)$. 故选 C.

(2)设 $f(x) = ax(x-5) (a > 0)$, 由题知 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$, 又 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值为 12, 所以 $f(-1) = 6a = 12$, 解得 $a = 2$, 所以 $f(x) = 2x^2 - 10x$.

例4 [思路点拨] (1)把 $a = 2$ 代入函数解析式, 再判断函数在已知区间上的单调性, 进而可以求解; (2)讨论对称轴与已知区间的三种位置关系, 分别求出 $f(x)$ 在

已知区间上的最小值, 令其为 3, 解出 a 的值, 进而可以得解.

解: (1)若 $a = 2$, 则 $f(x) = 4x^2 - 8x + 2 = 4(x-1)^2 - 2$, $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = 1$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-1, 2)$ 上的最小值为 $f(1) = -2$, 又 $f(-1) = 14$, $f(2) = 2$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-1, 2)$ 上的取值范围为 $[-2, 14]$.

(2) $f(x) = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 2a + 2$, 其图象的对称轴方程为 $x = \frac{a}{2}$.

①当 $\frac{a}{2} \leq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f(0) = a^2 - 2a + 2$, 由 $a^2 - 2a + 2 = 3$, 解得 $a = 1 \pm \sqrt{2}$, $\therefore a \leq 0, \therefore a = 1 - \sqrt{2}$.

②当 $0 < \frac{a}{2} < 2$, 即 $0 < a < 4$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{a}{2}\right) = -2a + 2$,

由 $-2a + 2 = 3$, 解得 $a = -\frac{1}{2} \notin (0, 4)$, 舍去.

③当 $\frac{a}{2} \geq 2$, 即 $a \geq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, $\therefore f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f(2) = a^2 - 10a + 18$, 由 $a^2 - 10a + 18 = 3$, 解得 $a = 5 \pm \sqrt{10}$, $\therefore a \geq 4, \therefore a = 5 + \sqrt{10}$. 综上所述, $a = 1 - \sqrt{2}$ 或 $a = 5 + \sqrt{10}$.

变式题 (1)D (2) $[1, \sqrt{2}]$ [解析] (1)观察图象可知, 图象具有对称性, 对称轴是

直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 故 A 中结论正确; 令 $|x^2 - 2x - 3| = 0$ 可得 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 即 $(x+1)(x-3) = 0$, $\therefore x_1 = -1, x_2 = 3$, $\therefore (-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ 是函数图象与 x 轴的交点坐标, 又图象的对称轴是直线 $x = 1$, $\therefore$ 当 $x \geq 3$ 时, 函数值 y 随 x 值的增大而增大, 故 B 中结论正确; 由图象可知点 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ 是函数图象的最低点, 则当 $x = -1$ 或 $x = 3$ 时, 函数取得最小值 0, 故 C 中结论正确; 当 $x = 4$ 时, $y = 5 > 4$, 故 D 中结论错误. 故选 D.

(2)函数 $f(x) = x^2 - 2tx$ 图象的对称轴为直线 $x = t$, 因为函数 $f(x) = x^2 - 2tx$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 所以 $t \geq 1$, 故要使对任意的 $x_1, x_2 \in [0, t+1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2$, 只需 $f(0) - f(t) \leq 2$, 即 $0 - (t^2 - 2t^2) \leq 2$, 解得 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, 又 $t \geq 1$, 所以 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$.

第 11 讲 指数与指数函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- n 次方根 奇数 偶数 根式 根指数 被开方数 a
- (1)③④ 没有意义 (2)① a^{r+s} ② a^r ③ $a^r b^r$
- (0, $+\infty$) (0, 1) $y > 1$ $0 < y < 1$ $0 < y < 1$ $y > 1$ 增函数 减函数

【对点演练】

- $-6a$ [解析] $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\right) = 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = -6a$.
- $7 - 47$ [解析] 由 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 得 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9$, 即 $a + a^{-1} + 2 = 9$, 因此 $a + a^{-1} = 7$, 所以 $(a + a^{-1})^2 = 49$, 即 $a^2 + a^{-2} + 2 = 49$, 于是 $a^2 + a^{-2} = 47$.
- (1, 3) [解析] 令 $x-1=0$, 得 $x=1$, 此时 $y = a^0 + 2 = 3$, 所以函数 $y = a^{x-1} + 2$

($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 $(1, 3)$.

- $2\sqrt{2}$ [解析] $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2} + |1-\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$.
- 2 [解析] 由指数函数的定义可得 $\begin{cases} a^2 - 3 = 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ 解得 $a = 2$.
- 2 或 $\frac{1}{2}$ [解析] 若 $a > 1$, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(1) = a = 2$; 若 $0 < a < 1$, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减, 所以 $f(-1) = a^{-1} = 2$, 解得 $a = \frac{1}{2}$. 故 a 的值为 2 或 $\frac{1}{2}$.

● 课堂考点探究

探究点一

- 1 [解析] $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} + \frac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(-3)^2}} - 2 \times (\sqrt{6}-2)^{-1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0 + 36^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}} + \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}}}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{6}+2}{2} + 1 + (6^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - (\sqrt{6}+2) + 1 + \sqrt{6} = 1$.
- $\frac{1}{3}$ [解析] 由 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, 两边平方, 得 $x + x^{-1} = 7$, 两边再平方得 $x^2 + x^{-2} = 47$, $\therefore x^2 + x^{-2} - 2 = 45$. 又 $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 + (x^{-\frac{1}{2}})^3 = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x - 1 + x^{-1}) = 3 \times (7-1) = 18$, $\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} - 3}{x^2 + x^{-2} - 2} = \frac{1}{3}$.
- ABD [解析] 对于 A 选项, 由 $\pi - 3 > 0$, 得 $\sqrt[4]{(\pi-3)^4} = \pi - 3$, A 选项正确; 对于 B 选项, $\sqrt[4]{a^3} \sqrt[4]{b^2} = \left[a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[a^{\frac{3}{2}} b^1\right]^{\frac{1}{4}} = \left[a^{\frac{3}{2}} b\right]^{\frac{1}{4}}$, $a^0 b^0 = 1$, B 选项正确; 对于 C 选项, $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, C 选项错误; 对于 D 选项, $(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}})(-3a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}) \div \left(\frac{1}{3} a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}}\right) = -9a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} = -9a$, D 选项正确. 故选 ABD.

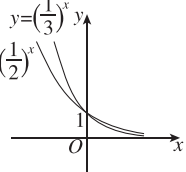
例1 [思路点拨] (1)分 $x > 0$ 和 $x < 0$ 去掉绝对值, 再根据指数函数的图象和性质对各选项逐项判断. (2)根据所给函数图象得到 a, b 的取值范围, 进而结合指数函数的单调性判断.

(1)C (2)ABD [解析] (1) $f(x) = \frac{xa^x}{|x|} = \begin{cases} a^x, & x > 0, \\ -a^x, & x < 0, \end{cases}$ 又 $a > 1$, 所以根据指数函数的性质知, 当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 单调递增, 排除 B, D; 当 $x < 0$ 时, 函数 $f(x) = -a^x$ 单调递减, 排除 A. 故选 C.

(2)由图象可知, 函数 $y = a^x - b (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $a > 1$, 且当 $x = 0$ 时, $y = 1 - b \in (0, 1)$, 可得 $0 < b < 1$. 对于 A 选项, $a^b > a^0 = 1$, 故 A 正确; 对于 B 选项, $a + b > a > 1$, 故 B 正确; 对于 C 选项, $b^a < b^0 = 1$, 故 C 错误; 对于 D 选项, 因为 $0 < b < 1 < a$, 所以 $b - a < 0$, 所以 $2^{b-a} < 2^0 = 1$, 故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 (1)CD (2)1

[解析] (1)在同一坐标系中作出函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的



大致图象,如图所示.设 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{3}\right)^b = m, m > 0$. 当 $m > 1$ 时,由图可知 $a < b < 0$;当 $m = 1$ 时,由图可知 $a = b = 0$;当 $0 < m < 1$ 时,由图可知 $a > b > 0$. 故选CD.

(2) 依题意得 $\begin{cases} -2+m=0, \\ 1+n=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=2, \\ n=1, \end{cases}$ 于是 $m-n=1$.

例2 [思路点拨] (1) 根据指数函数、幂函数的单调性即可判定 $b < a, c < a$,再利用指数函数的单调性判定 $c < b$,即得结果. (2) 首先把 $e^a + \pi^b \geq e^{-b} + \pi^{-a}$ 化为 $e^a - \pi^{-a} \geq e^{-b} - \pi^b$,然后构造函数 $f(x) = e^x - \pi^{-x}$,再利用函数 $f(x) = e^x - \pi^{-x}$ 的单调性得出结论.

(1) D (2) D [解析] (1) 由 $a = 3^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{1}{3}}, b = 2^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}, c = 4^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}}$,可得 $b = 8^{\frac{1}{4}} < 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{3}} = a, c < a$. 又 $b = 2^{\frac{3}{4}}, c = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$,而 $2^{\frac{3}{4}} > 2^{\frac{2}{3}}$,所以 $c < b$,所以 $c < b < a$. 故选D.

(2) $\because e^a + \pi^b \geq e^{-b} + \pi^{-a}, \therefore e^a - \pi^{-a} \geq e^{-b} - \pi^b$ (*). 令 $f(x) = e^x - \pi^{-x}$,易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,则(*)式可化为 $f(a) \geq f(-b), \therefore a \geq -b$,即 $a+b \geq 0$. 故选D.

例3 [思路点拨] (1) 根据给定条件,转化为同底的指数不等式,再利用指数函数的单调性转化为一元二次不等式,进而求解.

(2) 令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$,把问题转化为关于 t 的一元二次方程 $2t^2 - (a+1)t + a = 0$ 有两个不等的正实数根问题,从而求得 a 的取值范围.

(1) $(-3, 2)$ (2) $(0, 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$ [解析] (1) 由 $2^{x^2-2x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$,得 $2^{x^2-2x-3} < 2^{-3(x-1)}$,因为函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $x^2 - 2x - 3 < -3(x-1)$,即 $x^2 + x - 6 < 0$,解得 $-3 < x < 2$,所以原不等式的解集为 $(-3, 2)$.

(2) 令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$,则方程化为 $2t^2 - (a+1)t + a = 0$,依题意知方程 $2t^2 - (a+1)t + a = 0$ 有两个不相等的正实数根,因此 $\begin{cases} \Delta = (a+1)^2 - 8a > 0, \\ \frac{a+1}{2} > 0, \\ \frac{a}{2} > 0, \end{cases}$ 解得

$a > 3 + 2\sqrt{2}$ 或 $0 < a < 3 - 2\sqrt{2}$,故实数 a 的取值范围是 $(0, 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

例4 [思路点拨] (1) 先根据函数是偶函数求出参数,再结合基本不等式求出值域; (2) 先根据不等式恒成立化简不等式,再用换元法结合(1)求出新自变量的范围,再用导数求出最值即可求参数的取值范围.

解: (1) $\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x) = f(-x)$,即 $\frac{9^x + a}{3^x} = \frac{9^{-x} + a}{3^{-x}} = \frac{1 + a \cdot 9^x}{3^x}$, $\therefore 9^x + a = 1 + a \cdot 9^x$,即 $(a-1) \cdot 9^x = a-1, \therefore a = 1, \therefore f(x) = 3^x + \frac{1}{3^x} \geq$

$2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$,当且仅当 $x = 0$ 时取等号,故函数 $f(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$.

(2) 若命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, g(x) \geq 0$ ”为假命题,则命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) < 0$ ”为真命题, $g(x) = m f(2x) + 2 f(x) + m = m(3^{2x} + 3^{-2x}) + 2(3^x + 3^{-x}) + m$,令 $t = 3^x + 3^{-x} = 3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$,当且仅当 $x = 0$ 时等号成立,则 $3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2, \therefore g(t) = m(t^2 - 2) + 2t + m < 0$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成

立,即 $m(t^2 - 1) + 2t < 0$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成立, $\because t^2 - 1 > 0, \therefore m < -\frac{2t}{t^2 - 1}$ 对任意 $t \geq 2$ 恒成立. 令 $h(t) = -\frac{2t}{t^2 - 1} (t \geq 2)$,则

$h'(t) = \frac{2+2t^2}{(t^2-1)^2} > 0, \therefore h(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,故 $h(t)_{\min} = h(2) = -\frac{4}{3}, \therefore m < -\frac{4}{3}$,故 m 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$.

【应用演练】

1. D [解析] 因为函数 $y = 1.01^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $0.5 < 0.6$,所以 $1.01^{0.5} < 1.01^{0.6}$,即 $a < b$. 因为 $y = x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,且 $0.6 < 1.01$,所以 $0.6^{0.5} < 1.01^{0.5}$,即 $c < a$. 所以 $b > a > c$.

2. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ [解析] 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax} < 2^{3x+a^2}$ 恒成立,即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-(3x+a^2)}$ 恒成立, $\therefore x^2 - 2ax > -(3x + a^2)$ 恒成立,即 $x^2 - (2a-3)x + a^2 > 0$ 恒成立, $\therefore \Delta = (2a-3)^2 - 4a^2 < 0$,即 $(2a-3+2a)(2a-3-2a) < 0$,解得 $a > \frac{3}{4}, \therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

3. $[-5, 31]$ [解析] 令 $t = 2^x, \therefore x \in [0, 3], \therefore 1 \leq t \leq 8$. 令 $g(t) = t^2 - 4t - 1 = (t-2)^2 - 5, t \in [1, 8]$,易知 $g(t)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减,在 $(2, 8]$ 上单调递增,又 $|8-2| > |2-1|, \therefore$ 当 $t = 2$ 时,函数 $g(t)$ 取得最小值,即 $g(t)_{\min} = -5$,当 $t = 8$ 时,函数 $g(t)$ 取得最大值,即 $g(t)_{\max} = 31, \therefore f(x)$ 的值域为 $[-5, 31]$.

第12讲 对数与对数函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1) 对数 (2) 10 $\lg N$ 自然对数 $\ln N$
- (1) 0 (3) N
- (1) $\log_a M + \log_a N$ $\log_a M - \log_a N$

$a \log_a M$ (2) $\frac{n}{m} \log_a b$

4. 对数 $(0, +\infty)$ $\mathbf{R}$ $(1, 0)$ 增 减

5. $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ $y = x$

【对点演练】

- 1 [解析] 利用对数的换底公式可得结果为1.
2. $b > c > a$ [解析] $a = \log_2 0.3 < \log_2 1 = 0, b = \ln 3 > \ln e = 1, 0 = \log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3 = 1$,即 $0 < c < 1, \therefore b > c > a$.
3. (2, 1) [解析] 令 $2x-3=1$,解得 $x=2$,此时 $f(2)=1+\log_2 1=1$,所以 $f(x)$ 的图象恒过定点(2, 1).
4. 4 [解析] 因为 $\lg x + \lg y = 2\lg(x-2y)$,所以 $xy = (x-2y)^2$,即 $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$,解得 $x = y$ 或 $x = 4y$. 由已知得 $x > 0, y > 0, x - 2y > 0$,所以 $x = 4y$,所以 $\frac{x}{y} = 4$.
5. $(-\infty, -1)$ [解析] 因为 $0 < \frac{1}{2} < 1$,所以函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在定义域内单调递减. 由 $x^2 - 1 > 0$,得 $x < -1$ 或 $x > 1$,因为函数 $y = x^2 - 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,所以函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$.

6. 2或 $\frac{1}{2}$ [解析] 当 $a > 1$ 时,有 $\log_a 4 - \log_a 2 = 1$,解得 $a = 2$;当 $0 < a < 1$ 时,有

$\log_a 2 - \log_a 4 = 1$,解得 $a = \frac{1}{2}$. 综上, $a = 2$ 或 $\frac{1}{2}$.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1) 根据指对互化可得 $b = \log_3 6$,再利用换底公式、对数运算法则依次验证各选项即可. (2) 利用对数运算法则及换底公式进行化简计算.

(1) BCD (2) 9 [解析] (1) $\because 3^b = 6, \therefore b = \log_3 6$. 对于A, $\because a = \log_2 6 = \frac{\ln 6}{\ln 2},$

$b = \log_3 6 = \frac{\ln 6}{\ln 3}, \ln 6 > \ln 3 > \ln 2 > 0,$

$\therefore a > b$, A 错误; 对于B, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$

$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1,$

B 正确; 对于C, $\because a - 1 = \log_2 6 - 1 = \log_2 3, b - 1 = \log_3 6 - 1 = \log_3 2, \therefore (a - 1)(b - 1) = \log_2 3 \times \log_3 2 = 1$, C 正确; 对

于D, $\log_{18} 6 = \frac{\log_3 6}{\log_3 18} = \frac{\log_3 6}{\log_3 3 + \log_3 6} = \frac{b}{1+b}$, D 正确. 故选BCD.

(2) 原式 $= \lg 2 \times (2\lg 5 + 2) + 8 \times \frac{1}{4} \times$

$(\lg 5)^2 + 2^{\log_2 3} + \frac{2\lg 3}{\lg 2} \times \frac{2\lg 2}{\lg 3} = 2\lg 2 \times$

$\lg 5 + 2\lg 2 + 2 \times (\lg 5)^2 + 3 + 4 = 2\lg 5 \times$

$(\lg 2 + \lg 5) + 2\lg 2 + 7 = 2 \times (\lg 5 + \lg 2) + 7 = 2 + 7 = 9.$

变式题 (1) C (2) D (3) D

[解析] (1) 由 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 2$ 知 $a \neq 0, b \neq 0,$

由 $2^a = 3^b = t$,知 $t > 0$ 且 $t \neq 1$,且 $a =$

$\log_2 t, b = \log_3 t$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{\log_2 t} +$

$\frac{2}{\log_3 t} = \log_t 2 + 2\log_t 3 = \log_t 18 = 2$,所以

$t^2 = 18$,可得 $t = 3\sqrt{2}$. 故选C.

(2) 由题意得 $\frac{S-1}{\ln N_1} = 2.1, \frac{S-1}{\ln N_2} = 3.15,$

则 $2.1 \ln N_1 = 3.15 \ln N_2$,即 $2 \ln N_1 = 3 \ln N_2$,所以 $N_2^3 = N_1^2$. 故选D.

(3) 由题知 $m = a^2$,则 $m > 0$ 且 $m \neq 1$. 由

换底公式得 $\log_m a = \frac{1}{\log_a m} = \frac{1}{2}, \log_m b =$

$\frac{1}{\log_m 3} = \frac{1}{3}$,所以 $\log_{(ab)} m = \frac{1}{\log_m (ab)} =$

$\frac{1}{\log_m a + \log_m b} = \frac{6}{5}$. 故选D.

例2 [思路点拨] (1) 首先由 $a^x = b^{-x}$ 得出 $a = \frac{1}{b}$,再分类讨论 a 和 b 的取值范围,

根据指数函数和对数函数的图象即可得出答案. (2) 结合指对函数的凹凸性判断.

(1) AB (2) B [解析] (1) 因为 $a^x = b^{-x}$,即 $a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x$,所以 $a = \frac{1}{b}$. 当 $a >$

1时, $0 < b < 1$,则指数函数 $y = b^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上

单调递减,且图象过点(0, 1),对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且图象

过点(1, 0),将 $y = \log_a x$ 的图象关于 y 轴

对称得到 $y = \log_a (-x)$ 的图象,则 $y = \log_a (-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减且图象

过点(-1, 0),故A符合题意;当 $0 < a < 1$ 时, $b > 1$,同理可得,指数函数 $y = b^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上

单调递增,且图象过点(0, 1), $y = \log_a (-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增且图象

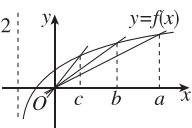
过点(-1, 0),故B符合题意. 故选AB.

(2) 对于选项A, B,由题意不妨设 $x_1 < x_2$,因为函数 $y = 2^x$ 是增函数,所以

$0 < 2^{x_1} < 2^{x_2}$,即 $0 < y_1 < y_2$,易得 $\frac{2^{x_1} + 2^{x_2}}{2} > \sqrt{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} = 2^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$,即

$\frac{y_1+y_2}{2} > 2^{\frac{x_1+x_2}{2}} > 0$, 因为函数 $y = \log_2 x$ 是增函数, 所以 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > \log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{x_1+x_2}{2}$, 故 A 错误, B 正确; 对于选项 C, 取 $x_1 = -2, x_2 = -1$, 则 $y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{1}{2}$, 可得 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} = \log_2 \frac{3}{8} = \log_2 3 - 3 \in (-2, -1)$, 此时 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > -3 = x_1+x_2$, 故 C 错误; 对于选项 D, 取 $x_1 = 0, x_2 = 1$, 则 $y_1 = 1, y_2 = 2$, 可得 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} = \log_2 \frac{3}{2} \in (0, 1)$, 此时 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} < 1 = x_1+x_2$, 故 D 错误. 故选 B.

变式题 (1)D (2)A [解析] (1)由题图可得, 函数在定义域上单调递增, 所以 $a > 1$, 排除 A, C; 因为函数的图象过点 $(0.5, 0)$, 所以 $b + 0.5 = 1$, 解得 $b = 0.5$, 排除 B, 故选 D.

(2) $\frac{f(a)}{a}, \frac{f(b)}{b}, \frac{f(c)}{c}, x = -2$  $\frac{f(a)}{a}$ 可分别看作 $f(x)$ 图象上的点 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ 与坐标原点 $O(0, 0)$ 连线的斜率, 作出 $f(x)$ 的图象, 如图所示, 并取点 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$, 其中 $a > b > c > 0$, 再将三个点分别与点 $(0, 0)$ 相连, 得到三条直线. 由图可知, 当 $a > b > c > 0$ 时, $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b} < \frac{f(c)}{c}$, 故选 A.

例 3 [思路点拨] (1)引入中间值 2, 利用中间值法, 再结合指数函数和对数函数的单调性即可比较大小. (2)先作商 $\frac{a}{b} = \frac{\log_4 3}{\log_5 4} = \log_3 3 \times \log_4 5$, 利用基本不等式可得 $a < b$, 再根据对数函数的单调性可得 $a > c$, 从而得到结果.

(1)C (2)A [解析] (1)由 $a = 2^{\sqrt{\pi}} > 2, 1 < b = \log_2 \pi < \log_2 4 = 2, 1 < c = \sqrt{\pi} < \sqrt{4} = 2$, 知 $a > b, a > c$. 又 $\pi^{\frac{5}{3}} < 2^5$, 所以 $\pi < 2^{\frac{5}{3}}$, 故 $b = \log_2 \pi < \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$, 又 $(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9} < \pi$, 故 $\frac{5}{3} < \sqrt{\pi} = c$, 所以 $b < c$, 因此可得 $a > c > b$, 故选 C.

(2)因为 $a = \log_{16} 9 = \log_4 3^2 = \log_2 3 > 0, b = \log_{25} 16 = \log_5 4^2 = \log_5 4 > 0, \frac{a}{b} = \frac{\log_4 3}{\log_5 4} = \log_3 3 \times \log_4 5 < (\frac{\log_4 3 + \log_5 5}{2})^2 = (\frac{\log_4 15}{2})^2 < (\frac{\log_4 16}{2})^2 = (\frac{\log_4 4^2}{2})^2 = 1$, 所以 $a < b$. 又 $a = \log_2 3 > \log_4 2 = \log_2 2 = 2 = \frac{1}{2} > e^{-2} = c$, 所以 $b > a > c$. 故选 A.

例 4 [思路点拨] (1)利用对数的运算性质化简对数方程, 得到 x 与 y 之间的关系, 进而求值. (2)利用换底公式先消去 a , 再平方去掉绝对值, 进而解不等式.

(1)10 (2)(0, 1) [解析] (1)因为 $1 + \lg x - \lg y = \lg y^2$, 所以 $\lg 10 + \lg x = \lg y^2 + \lg y$, 所以 $\lg(10x) = \lg y^3 (x > 0, y > 0)$, 则 $10x = y^3$, 所以 $\frac{y^3}{x} = 10$.

(2)易知 $-1 < x < 1$, 且 $x \neq 0$, 原不等式可化为 $|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}| > |\frac{\lg(1+x)}{\lg a}|$, 即 $|\lg(1-x)| > |\lg(1+x)|$, 两边同时平方

得 $[\lg(1-x)]^2 > [\lg(1+x)]^2$, 即 $[\lg(1-x) + \lg(1+x)] \cdot [\lg(1-x) - \lg(1+x)] > 0$, 所以 $\lg(1-x^2) \cdot \lg \frac{1-x}{1+x} > 0$. 又 $-1 < x < 1$, 且 $x \neq 0$, 所以 $0 < 1-x^2 < 1$, 所以 $\lg(1-x^2) < 0$, 从而 $\lg \frac{1-x}{1+x} < 0$, 解得 $0 < x < 1$.

例 5 [思路点拨] (1)利用奇偶性的定义判断、证明即可; (2)根据复合函数的单调性求出 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 上的最小值, 把问题转化为 $t^2 + at - 5 \leq 0$ 对任意 $t \in [-2, 2]$ 恒成立, 根据二次函数的性质即可求得结果.

解: (1) $f(x)$ 为奇函数, 证明如下:

由解析式易知 $\frac{1-x}{1+x} > 0$, 即 $(x-1)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 1$, 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$,

又 $f(-x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} = -\log_2 \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)因为 $m = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$ 在 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 上单调递减, $y = \log_2 m$ 在定义域上为增函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{3}) = -1$. 要使对任意 $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, $t \in [-2, 2]$, 不等式

$f(x) \geq t^2 + at - 6$ 恒成立, 只需 $t^2 + at - 6 \leq -1$ 对任意 $t \in [-2, 2]$ 恒成立, 即 $t^2 + at - 5 \leq 0$ 对任意 $t \in [-2, 2]$ 恒成立, 因为 $y = t^2 + at - 5$ 的图象开口向上, 所以 $\begin{cases} 4-2a-5 \leq 0, \\ 4+2a-5 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

[应用演练]

1. C [解析] $a = \log_2 2 < \log_3 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = \log_3 2\sqrt{2} < \log_3 3 = b$, 即 $a < c < b$.
2. C [解析] 因为函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - ax + 8)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $y = 3x^2 - ax + 8$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增且 $y = 3x^2 - ax + 8 > 0$ 对任意 $x \in [-1, +\infty)$ 恒成立, 所以 $\begin{cases} \frac{a}{6} \leq -1, \\ 3+a+8 > 0, \end{cases}$ 解得 $-11 < a \leq -6$, 故选 C.

3. $(2, +\infty)$ [解析] 因为 $\frac{2}{a} < \frac{3}{a}$, $\log_a \frac{2}{a} < \log_a \frac{3}{a}$, 所以 $a > 1$, 则对数函数 $y = \log_a x (a > 1)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $\log_a(2x-3) > 0$, 所以 $2x-3 > 1$, 解得 $x > 2$, 所以不等式的解集为 $(2, +\infty)$.

第 13 讲 函数的图象

● 课前基础巩固

[知识聚焦]

2. (1) $f(x) - k$ (2) $-f(x)$ $f(-x)$ $-f(-x)$ $\log_a x$ (4) $|f(x)|$ $f(|x|)$

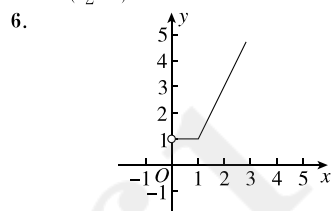
[对点演练]

1. $y = 0$ [解析] $y = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$, 故两个函数的图象关于 x 轴, 即直线 $y = 0$ 对称.
2. $x = 0$ [解析] $y = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$, 故两个函数的图象关于 y 轴, 即直线 $x = 0$ 对称.

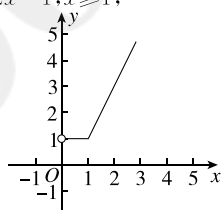
3. ④①② [解析] (1)根据描述, 离家的距离先增加, 再减少到零, 再增加, 只有图象④符合. (2)根据描述, 离家的距离应该先沿直线上升, 然后与 x 轴平行, 最后继续沿直线上升, 符合的图象为①. (3)根据描述, 符合的图象为②.

4. $y = (2x-1)^2 + 2$ [解析] 将 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位长度后得到 $y = [2(x-1)+1]^2 = (2x-1)^2$ 的图象, 再把所得图象向上平移两个单位长度后得到 $y = (2x-1)^2 + 2$ 的图象.

5. $y = \ln(\frac{1}{2}x)$ [解析] 根据图象的伸缩变换可得, 所求函数解析式为 $y = \ln(\frac{1}{2}x)$.



[解析] $y = e^{\ln x} + |x-1| = x + |x-1| = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 2x-1, & x \geq 1, \end{cases}$ 其图象如图所示.



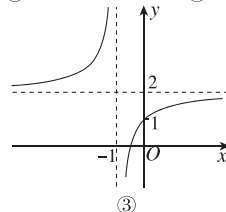
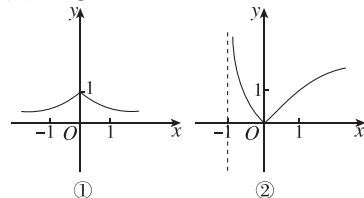
● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1)利用图象的翻折变换作图. (2)利用图象的平移变换和翻折变换作图. (3)先将函数 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 化为 $y = 2 - \frac{1}{x+1}$, 再利用图象的平移变换作图.

解: (1)先作出 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的图象, 保留 $y = (\frac{1}{2})^x$ 图象中 $x \geq 0$ 的部分, 再把 y 轴右侧部分翻折到左侧, 即得 $y = (\frac{1}{2})^{|x|}$ 的图象, 如图①所示.

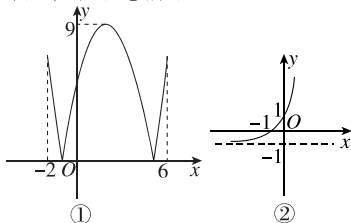
(2)将函数 $y = \log_2 x$ 的图象向左平移一个单位长度, 再将所得图象的 x 轴下方部分翻折到上方, 原 x 轴下方部分去掉, 上方不变, 即可得到函数 $y = |\log_2(x+1)|$ 的图象, 如图②.

(3) $y = \frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$ 的图象可由 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象先向左平移 1 个单位长度, 再将所得图象向上平移 2 个单位长度得到, 如图③.



变式题 解:(1)先作出二次函数 $y=x^2-4x-5$ 的图象,再把所得图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方,原 x 轴下方部分去掉,上方不变,并截取在区间 $[-2,6]$ 内的部分,即得函数 $y=|x^2-4x-5|$ ($x \in [-2,6]$) 的图象,如图①所示.

(2)将 $y=2^x$ 的图象向左平移 1 个单位长度,得到 $y=2^{x+1}$ 的图象,再将所得图象向下平移 1 个单位长度,得到 $y=2^{x+1}-1$ 的图象,如图②所示.



例 2 [思路点拨] (1)先根据函数的奇偶性排除选项 A, C, 再根据 $f(1) > 0$ 排除选项 D, 即可得解. (2)思路一: 根据函数 $f(x)$ 的定义域得到 $y=f(1-x)$ 的定义域, 再结合函数值的取值范围排除部分选项, 得到结果; 思路二: 根据函数图象的对称变换和平移变换即可得到结果.

(1)B (2)D [解析] (1)显然 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $f(-x) = -(-x)^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 - (e^x - e^{-x}) \sin x = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 排除 A, C. 因为 $f(1) = -1 + (e - \frac{1}{e}) \sin 1$, 易知 $e - \frac{1}{e} > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $f(1) > \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{3\sqrt{2}-4}{4} > 0$, 排除 D. 故选 B.

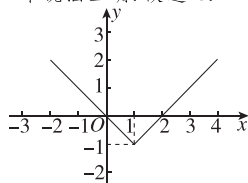
(2)方法一: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 由 $1-x > 0$ 得 $x < 1$, 即函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1)$, 排除 A, C. $f(1-x) = (1-x) \ln(1-x)$, 设 $g(x) = (1-x) \ln(1-x)$, 则 $g(-1) = 2 \ln 2 > 0$, 排除 B. 故选 D.

方法二: 将函数 $f(x)$ 的图象进行以 y 轴为对称轴的翻折变换, 得到函数 $y=f(-x)$ 的图象, 再将所得图象向右平移一个单位长度, 即可得到函数 $y=f[-(x-1)] = f(1-x)$ 的图象. 故选 D.

变式题 (1)C (2)A [解析] (1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 又 $f(-x) = -x \ln[(-x)^2+1] = -x \ln(x^2+1) = -f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数, 排除 A, B. 又 $f(1) = \ln 2 > 0$, 故排除 D. 故选 C. (2)将 $f(x)$ 的图象保持不变, 作与函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的图象, 得到偶函数 $y=f(|x|)$ 的图象, 再将所得图象向左平移一个单位长度得到 $y=f(|x+1|)$ 的图象. 故选 A.

例 3 [思路点拨] 将函数的解析式写成分段函数的形式, 然后结合函数的图象分析函数的性质即可.

C [解析] 由题意得, $f(x) = |x-1| - 1 = \begin{cases} x-2, & x \geq 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$, 作出 $f(x)$ 的图象, 如图 1 所示. 由图可得, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 选项 A 中说法正确; $f(x)$ 的最小值为 -1 , 选项 B 中说法正确; $f(x)$ 的图象不关于点 $(1, -1)$ 对称, 选项 C 中说法错误; $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 选项 D 中说法正确. 故选 C.



例 4 [思路点拨] 由函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 作出函数 $y=f(x-1)$ 在 $[-2, 2]$ 上的图象, 结合图象, 即可求解.

B [解析] 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上周期为 4 的奇函数, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ -x+2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 所以

当 $x \in (-1, 0]$ 时, $f(x) = x$, 当 $x \in [-2, -1]$ 时, $-x \in [1, 2]$, 所以 $f(x) = -f(-x) = -(x+2) = -x-2$, 当 $x \in [-3, -2]$ 时, $x+4 \in [1, 2]$, 所以 $f(x) = f(x+4) = -(x+4)+2 = -x-2$. 函数 $y=f(x-1)$ 的图象可由函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到, 作出函数 $y=f(x-1)$ 在 $[-2, 2]$ 上的图象, 如图 2 所示. 由图可知不等式 $xf(x-1) < 0$ 在 $(-2, 2)$ 上的解集为 $(-2, -1) \cup (0, 1)$. 故选 B.

例 5 [思路点拨] 将问题转化为 $f(x)$ 与 $y=-m$ 的图象有 3 个不同的交点, 画出两函数图象, 数形结合得到答案.

(-1, 0) [解析] 令 $g(x) = f(x) + m = 0$, 得 $f(x) = -m$, 画出 $f(x) = \begin{cases} |3^x-1|, & x < 1 \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$ 与 $y=-m$ 的图象, 如图. 函数 $g(x) = f(x) + m$ 有 3 个零点, 则 $f(x)$ 与 $y=-m$ 的图象有 3 个不同的交点, 所以 $-m \in (0, 1)$, 可得 m 的取值范围是 $(-1, 0)$.

【应用演练】

1. A [解析] 方法一: 画出函数 $y_1 = 3^x$ 与 $y_2 = 2x+1$ 的图象, 如图 3 所示, 故不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 1)$.

方法二: 因为 $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$ 单调递增, 且 $f'(0) = \ln 3 - 2 < 0$, $f'(1) = 3 \ln 3 - 2 > 0$, 所以存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = f(1) = 0$, 所以由 $f(x) < 0$ 可得 $0 < x < 1$, 故选 A.

2. A [解析] $\because f(x) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 2$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象是由

函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度得到的, 作出 $f(x)$ 的图象, 如图 4 所示, 可知其图象关于点 $(1, 2)$ 对称, 故 A 正确, D 错误; 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 故 B 错误; 显然函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=k$ 的图象最多只有一个交点, 故 C 错误. 故选 A.

3. $[-\frac{4}{3}, 7)$ [解析] 方法一: 作出 $f(x)$ 的图象, 如图. 由 $f(m) = f(n)$, 且 $m < n$, 可知 $3m+4 = 3^n-2$, $n \in [1, 2]$, 可得 $m = \frac{3^n-6}{3}$ ($n \in [1, 2]$), 则

$mf(n) = \frac{3^n-6}{3} \times (3^n-2)$. 令 $t = 3^n$, 因为 $n \in [1, 2]$, 所以 $t \in [3, 9]$, 则 $mf(n) = \frac{(t-6)(t-2)}{3} = \frac{1}{3}[(t-4)^2 - 4]$, $t \in [3, 9]$, 因此 $mf(n) \in [-\frac{4}{3}, 7)$. 方法二: 作出 $f(x)$ 的图象, 如图. 设 $f(m) = f(n) = t$, 因为 $m < n$, 所以结合图象可得 $3m+4 = 3^n-2 = t$, 且 $t \in [1, 7)$, 于是 $m = \frac{t-4}{3}$, $n = \log_3(t+2)$, 因此

$mf(n) = mt = \frac{t-4}{3} \cdot t = \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{3}t = \frac{1}{3}(t-2)^2 - \frac{4}{3}$. 因为 $t \in [1, 7)$, 所以 $\frac{1}{3}(t-2)^2 - \frac{4}{3} \in [-\frac{4}{3}, 7)$, 即 $mf(n) \in [-\frac{4}{3}, 7)$.

第 14 讲 函数与方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1) 实数 x (2) 零点 x 轴
- (3) $f(a)f(b) < 0$ 至少有一个 $f(c) = 0$
- (1) 连续不断 $f(a)f(b) < 0$ 一分为二 近似值
- (2) ① $[a, b]$ ② 中点 c ③ (i) $f(c) = 0$ (ii) (a, c) ④ $|a-b| < \epsilon$

【对点演练】

1. [解析] 由题知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(2) < 0, f(3) > 0$, 故函数 $f(x)$ 存在唯一的零点.
- (0, 3) [解析] 令 $f(x) = 0$, 则 $x \cdot 2^x - kx - 2 = 0$, 由 $x \in (1, 2)$, 可得 $k = 2^x - \frac{2}{x}$, 令 $\varphi(x) = 2^x - \frac{2}{x}$, $x \in (1, 2)$, 则由题知直线 $y = k$ 与 $\varphi(x) = 2^x - \frac{2}{x}$, $x \in (1, 2)$ 的图象有交点. $\because \varphi(x) = 2^x - \frac{2}{x}$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 且 $\varphi(1) = 0, \varphi(2) = 3$, $\therefore 0 < k < 3$.

- ($\frac{5}{2}, 3$) [解析] 令 $f(x) = 2^x - x - 4$, 则 $f(2) = 4 - 2 - 4 = -2 < 0, f(3) = 8 - 3 - 4 = 1 > 0, f(\frac{5}{2}) = 2^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} - 4 < 0$, 由 $f(3)f(\frac{5}{2}) < 0$ 知该解所在的区间为 $(\frac{5}{2}, 3)$.

2. [解析] 由题知 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 由 $f(x) = 0$, 得 $(9^x - 3) \ln(x-1) = 0$, 即 $9^x - 3 = 0$ 或 $\ln(x-1) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$ (舍) 或 $x = 2$, 所以函数 $f(x) = (9^x - 3) \ln(x-1)$ 的零点为 2.
- ①②③ [解析] 由题知 $f(-1) \cdot f(0) < 0, f(2) \cdot f(3) < 0, f(5) \cdot f(6) < 0$, 因为 $f(x)$ 的图象是连续不断的, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0), (2, 3), (5, 6)$ 三个区间上均有零点, 但不能判断有几个零点, 故①②③正确, ④不正确. 故填①②③.
2. [解析] 当 $x \leq 0$ 时, 由 $x^2 - 2 = 0$ 可得 $x = -\sqrt{2}$; 当 $x > 0$ 时, 由 $\ln x = 0$, 解得 $x = 1$, 所以函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数是 2.

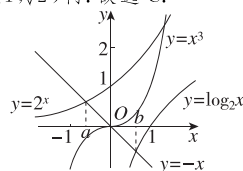
● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 根据函数零点存在定理分析判断. (2) 将函数零点问题转化为函数图象交点横坐标的范围问题, 通过数形结合求解.

(1)C (2)B [解析] (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(1) = -1 < 0$, $f(\sqrt{2}) = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 > 0$, 所以函数

$f(x)$ 的零点在 $(1, \sqrt{2})$ 内. 故选 C.

(2) 由 $f(x) = 2^x + x = 0$ 得 $2^x = -x$, 由 $g(x) = \log_2 x + x = 0$ 得 $\log_2 x = -x$, 由 $h(x) = x^3 + x = 0$ 得 $x^3 = -x$, 分别作出函数 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x^3$ 和 $y = -x$ 的图象, 如图 5 所示. 由图可知, $a \in (-1, 0), c = 0, b \in (0, 1)$, 所以 $a < c < b$. 故选 B.



变式题 (1)B (2)3 [解析] (1)由已知得函数 $f(x)$ 的图象是连续的,且 $f(x)$ 单调递增,因为 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}+\frac{1}{4}-2=\sqrt{2}-\frac{7}{4}<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}>0$,所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$,由函数零点

存在定理可知存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 使得 $f(x_0)=0$,故选 B.

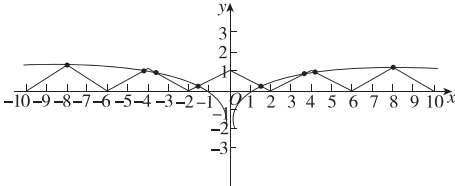
(2)令函数 $f(x)=e^{x-3}-(-x+5)=e^{x-3}+x-5$,显然函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 至多有一个零点.由函数 $y=e^{x-3}$ 与 $y=-x+5$ 的图象的交点为 (x_0, y_0) ,得函数 $f(x)$ 的零点为 x_0 ,而 $f(3)=-1<0$, $f(4)=e-1>0$,即 $f(3)f(4)<0$,因此存在唯一的 $x_0 \in (3, 4)$,使得 $f(x_0)=0$,所以 $n=3$.

例 2 [思路点拨] (1)作出函数 $y=f(x)$ 的图象,分 $a=0, a<0, a>0$ 三种情况讨论直线 $y=ax+2$ 与 $y=f(x)$ 的图象的交点个数,从而得解.(2)由奇函数的性质可得 $f(0)=0$,由 $f(x+1)=f(x)$ 得函数 $f(x)$ 的周期为 1,从而可得 $f(-1)=f(0)=f(1)=0$,赋值可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,最后结合周期性即可得结果.

(1)C (2)C [解析] (1)作出函数 $y=f(x)$ 的图象,如图所示.将原问题转化为直线 $y=ax+2$ (过定点 $(0, 2)$) 与函数 $y=f(x)$ 的图象交点的个数问题.由图可知,当 $a=0$ 时,直线 $y=2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象只有 1 个交点;当 $a<0$ 时,直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象没有交点;当 $a>0$ 时,直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点.所以直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象不可能有 2 个交点.故选 C. (2)由 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数可得 $f(0)=0$,再由 $f(x+1)=f(x)$ 可得函数 $f(x)$ 的周期为 1,则 $f(-1)=f(0)=\frac{1}{2}$, $f(1)=0$, $f(x+1)=f(x)$ 中取 $x=-\frac{1}{2}$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上的零点个数至少为 7,故选 C.

变式题 (1)D (2)8 [解析] (1)方法一:在同一平面直角坐标系中画出函数 $y_1=2e^x$, $y_2=5x^2$ 的大致图象如图,由函数 $y_1=2e^x$ 的增长速度比 $y_2=5x^2$ 的增长速度快,得两函数图象有 3 个交点,故选 D. 方法二:由 $2e^x-5x^2=0$ 得 $\frac{x^2}{e^x}=\frac{2}{5}$, $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$, $g(x)=\frac{2}{5}$ 构造函数 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$,求导得 $g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$,当 $x<0$ 时, $g'(x)<0$,当 $0<x<2$ 时, $g'(x)>0$,当 $x>2$ 时, $g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,在 $(0, 2)$ 上单调递增,在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,又 $g(0)=0$, $g(2)=\frac{4}{e^2}>\frac{2}{5}$,当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$ 且 $g(x)>0$,所以作出 $g(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{2}{5}$ 如图,由图可知 $g(x)=\frac{2}{5}$ 有 3

个解,故选 D. (2) $\because f(x+4)=f(x)$, $\therefore$ 偶函数 $y=f(x)$ 是周期为 4 的函数.由当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)=1-\frac{1}{2}x$,可作出函数 $f(x)$ 在 $[-10, 10]$ 内的图象,同时作出函数 $g(x)=\log_8|x|$ 在 $[-10, 10]$ 内的图象,如图所示.两图象的交点个数即为所求,由图可得两图象的交点个数为 8.

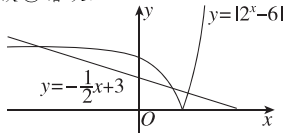


例 3 [思路点拨] 将原问题转化为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点,数形结合可得答案.

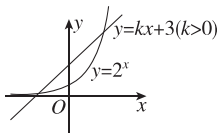
C [解析] 函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 有两个零点,即方程 $f(x)=-x-a$ 有两个不同的解,即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点.分别作出函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$,如图所示,由图可知,当 $-a \leq 1$,即 $a \geq -1$ 时,函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点,即函数 $g(x)$ 有两个零点,故选 C.

变式题 ①②④ [解析] 当 $a=1$ 时, $f(x)=|2^x-1|-kx-3$,令 $f(x)=0$,得 $|2^x-1|=kx+3$,在同一坐标系中作出 $y=|2^x-1|$, $y=kx+3$ 的图象,如图所示,由图及直线 $y=kx+3$ 过定点 $(0, 3)$ 知函数 $f(x)$ 至少有一个零点,故①正确.当 $a=-4, k=0$ 时,在同一坐标系中作出 $y=|2^x+4|$, $y=3$ 的图象,如图所示,由图可知,函数 $f(x)$ 无零点,故②正确.

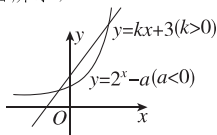
当 $a=6, k=-\frac{1}{2}$ 时,在同一坐标系中作出 $y=|2^x-6|$, $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图象,如图所示,由图可知,函数 $f(x)$ 有三个零点,故③错误.



当 $a=0$ 时,在同一坐标系中作出 $y=|2^x|=2^x$, $y=kx+3(k>0)$ 的图象,如图所示,

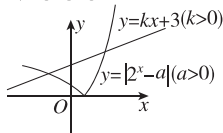


当 $a<0$ 时,在同一坐标系中作出 $y=|2^x-a|=2^x-a$, $y=kx+3(k>0)$ 的图象,如图所示,



当 $a>0$ 时,在同一坐标系中作出 $y=|2^x-a|$, $y=kx+3(k>0)$ 的图象,如图所示,由图可知,对任意实数 a ,总存在实

数 $k>0$ 使得函数 $f(x)$ 有两个零点,故④正确.故填①②④.



例 4 [思路点拨] (1)思路一:令 $h(x)=f(x)-g(x)$,则根据题意得 $h(x)$ 有唯一零点,且 $h(x)$ 为偶函数,即零点为 0,从而得到结果;思路二:令 $f(x)=g(x)$,转化为函数 $G(x)=\cos x (x \in (-1, 1))$ 与 $F(x)=ax^2+a-1 (x \in (-1, 1))$ 的图象有唯一交点,从而得到结果;思路三:通过参变分离,研究函数 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 的最值得到结果.

(2)作出 $f(x)$ 的大致图象,根据图象求出 m, x_1, x_2, x_3 的取值范围即可判断 A, B 选项,由 $|2^{x_1}-1|=|2^{x_2}-1|$ 得到 x_1, x_2 的关系式即可判断 C, D 选项.

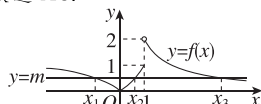
(1)D (2)AC [解析] (1)方法一:令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2+a-1-\cos x$,则 $h(x)$ 为偶函数,因为当 $x \in (-1, 1)$ 时,曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点,所以 $h(0)=a-2=0$,得 $a=2$.

方法二:令 $f(x)=g(x)$,得 $ax^2+2ax+a-1=\cos x+2ax$,即 $ax^2+a-1=\cos x$.设 $F(x)=ax^2+a-1 (x \in (-1, 1))$, $G(x)=\cos x (x \in (-1, 1))$,易知 $F(x), G(x)$ 都为偶函数.当 $a \leq 0$ 时, $F(x)<0, G(x)>0$,故曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 无交点;当 $a>0$ 时,作出 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的大致图象,如图所示,因为曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点,且 $G(0)=1$,所以 $F(0)=a-1=1$,则 $a=2$.

方法三:令 $f(x)=g(x)$,得 $ax^2-\cos x+a-1=0$,得 $a=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$.当 $x \in (-1, 0]$ 时, $y=\cos x+1$ 单调递增, $y=x^2+1$ 单调递减,且 $\cos x+1>0, x^2+1>0$,故 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 单调递增,其取值范围是 $\left(\frac{1+\cos 1}{2}, 2\right]$;当 $x \in [0, 1)$ 时, $y=\cos x+1$ 单调递减, $y=x^2+1$ 单调递增,且 $\cos x+1>0, x^2+1>0$,故 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 单调递减,其取值范围是 $\left(\frac{1+\cos 1}{2}, 2\right]$.根据题意得直线 $y=a$ 与 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 在 $(-1, 1)$ 上的图象恰有一个交点,故 $a=2$,故选 D.

(2)函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点,等价于 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个交点,作出函数 $y=m$ 与 $f(x)=\begin{cases} |2^x-1|, & x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 的图象,如图所示,由图

可得 $0<m<1$, A 正确;当 $\frac{2}{x}=1$ 时, $x=2$,故 $x_3>2$, B 错误;因为 $|2^{x_1}-1|=|2^{x_2}-1|$,且 $x_1<0<x_2<1$,所以 $-(2^{x_1}-1)=2^{x_2}-1$,可得 $2^{x_1}+2^{x_2}=2$, C 正确;因为 $x_1 \neq x_2$,所以 $2=2^{x_1}+2^{x_2}>2\sqrt{2^{x_1+x_2}}$,可得 $2^{x_1+x_2}<1$, D 错误.故选 AC.



变式题 (1)C (2) $\sqrt{3}-2+\frac{25\pi}{6}$

【解析】(1)由 $h(x)=f(x)-g(x)=0$, 得 $a(x-1)^2-1=\cos\frac{\pi x}{2}-2ax$, 依题意得 $ax^2+a-1=\cos\frac{\pi x}{2}$ 对 $x\in(-1,1)$ 有解. 记 $F(x)=ax^2+a-1$, $G(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$, 则函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的图象有公共点. 当 $x\in(-1,1)$ 时, $0<G(x)\leq 1$, 当 $a\leq 0$ 时, $F(x)=ax^2+a-1\leq -1$, 显然函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的图象无公共点; 当 $a>0$ 时, 函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象都关于 y 轴对称, 则 $\begin{cases} F(0)\leq G(0), \\ F(1)>G(1), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a-1\leq 1, \\ 2a-1>0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<a\leq 2$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $\frac{1}{2}<a\leq 2$. 故选 C.

(2) 设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=t$, 作出 $y=f(x)$ 与 $y=t$ 的图象如图所示, 则 $y=f(x)$ 的图象与 $y=t$ 的图象有 3 个交点, 其横坐标依次为 x_1, x_2, x_3 , 且 $-2<x_1<0<x_2<\pi<x_3<2\pi$. 由余弦函数图象的性质可知, $x_2+x_3=2\pi$, 所以 $2x_1+3x_2+2x_3=2x_1+x_2+2(x_2+x_3)=2x_1+x_2+4\pi$. 又因为 $x_1+1=\cos x_2$, 所以 $2x_1+x_2=2\cos x_2+x_2-2(0<x_2<\pi)$, 令 $g(x)=2\cos x+x-2(0<x<\pi)$, 则 $g'(x)=1-2\sin x$, 令 $g'(x)=1-2\sin x=0$, 解得 $x=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$, 当 $x\in(0, \frac{\pi}{6})$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增, 当 $x\in(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 上单调递减, 当 $x\in(\frac{5\pi}{6}, \pi)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(\frac{5\pi}{6}, \pi)$ 上单调递增, 又因为 $g(\pi)=\pi-4<0$, $g(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}>0$, 所以 $g(x)_{\max}=g(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}$, 所以 $2x_1+3x_2+2x_3=2x_1+x_2+4\pi\leq\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}+4\pi=\sqrt{3}-2+\frac{25\pi}{6}$.

例 5 【思路点拨】作出函数 $y=f(x)$ 的图象, 将问题转化为求方程 $f[f(x)]=1$ 的根, 令 $t=f(x)$, 先确定 $f(t)=1$ 的根, 再得 $f[f(x)]=1$ 的根, 结合函数图象即可获解.

C 【解析】作出函数 $f(x)=\begin{cases} 2\sin x, 0\leq x\leq \pi, \\ x^2, x<0 \end{cases}$ 的图象, 如图所示. 令 $t=f(x)$, 则由 $f(t)-1=0$, 即 $f(t)=1$, 得 $2\sin t=1(0\leq t\leq \pi)$, $t^2=1(t<0)$, 所以 $t=\frac{\pi}{6}$, $t=\frac{5\pi}{6}$, $t=-1$. 当 $t=\frac{\pi}{6}$ 时, 则 $f(x)=\frac{\pi}{6}$, 结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=\frac{\pi}{6}$ 的根有 3 个; 当 $t=\frac{5\pi}{6}$ 时, 则 $f(x)=\frac{5\pi}{6}$, 结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=\frac{5\pi}{6}$ 的根有 1 个; 当 $t=-1$ 时, 则 $f(x)=-1$, 结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=-1$ 的根有 0 个. 综上可得, 函数 $y=f[f(x)]-1$ 的

零点的个数是 4. 故选 C.

变式题 13 【解析】令 $t=f(x)$, 由 $f(t)=0$, 得 $\begin{cases} t\leq 2, \\ t=0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t>2, \\ \log_2(t-2)=0, \end{cases}$ 解得 $t=0$ 或 $t=3$. 当 $t=f(x)=0$ 时, 解得 $x=0$ 或 $x=3$; 当 $t=f(x)=3$ 时, 则 $\begin{cases} x\leq 2, \\ x=3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>2, \\ \log_2(x-2)=3, \end{cases}$ 解得 $x=10$. 综上, 函数 $y=f[f(x)]$ 的所有零点之和为 $0+3+10=13$.

增分微课 3 函数共零点问题

例 1 $\frac{3}{2}$ 【解析】设 $h(x)=x^2-ax-1$, $g(x)=(a-1)x-1$, 则 $h(0)=g(0)=-1$, 又 $h(x)$ 的图象开口向上, $\therefore h(x)=x^2-ax-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点, 若 $x>0$ 时恒有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geq 0$ 成立, 则 $g(x)=(a-1)x-1$, $h(x)=x^2-ax-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有相同零点, 且 $a-1>0$, $g(x)=(a-1)x-1$ 的零点为 $x=\frac{1}{a-1}$, $\therefore h(\frac{1}{a-1})=0$, 解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=0$, 又 $a>1$, $\therefore a=\frac{3}{2}$.

变式题 A 【解析】由题意可得 $x=b$ 是 $x^2-ax-1=0$ 的一个根, 即 $b^2-ab-1=0$, 且 $b>0$, 所以 $a=b-\frac{1}{b}$, $a^2+b^2=(b-\frac{1}{b})^2+b^2=2b^2+\frac{1}{b^2}-2\geq 2\sqrt{2}-2$, 当且仅当 $2b^2=\frac{1}{b^2}$ 时取等号, 所以 a^2+b^2 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$. 故选 A.

例 2 B 【解析】如图, 作出函数 $y=\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-1, 1]$ 上的图象, 要使不等式 $||x-a|-b|\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})|\leq 0$ 对任意 $x\in[-1, 1]$ 恒成立, 只需函数 $y=|x-a|-b$ 与函数 $y=\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-1, 1]$ 上有相同的零点. 当 $x\in[-1, 1]$ 时, 由 $y=\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})=0$, 得 $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{5}{6}$, 所以 $\begin{cases} \frac{5}{6}-a-b=0, \\ a-b=-\frac{1}{6}, \end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{5}{6}$.

变式题 A 【解析】由题知, 当 $x\in[-1, \frac{1}{3}]$ 时, $\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})\geq 0$, 所以 $|x-a|-b\geq 0$; 当 $x\in[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$ 时, $\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})\leq 0$, 所以 $|x-a|-b\leq 0$; 当 $x\in[\frac{7}{3}, 3]$ 时, $\cos(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})\geq 0$, 所以 $|x-a|-b\geq 0$. 所以当 $x=\frac{7}{3}$ 或 $x=\frac{1}{3}$ 时, $|x-a|-b=0$, 即 $\begin{cases} \frac{7}{3}-a-b=0, \\ \frac{1}{3}-a-b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{4}{3}, \\ b=1. \end{cases}$ 若 $a=\frac{4}{3}$, $b=1$, 当 $x\in[-1, \frac{1}{3}]$ 时, $|x-\frac{4}{3}|-1\geq 0$; 当 $x\in[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$ 时, $|x-\frac{4}{3}|-1\leq 0$; 当 $x\in[\frac{7}{3}, 3]$ 时, $|x-\frac{4}{3}|-1\geq 0$.

$1\geq 0$. 符合题意, 所以 $a-b=\frac{1}{3}$. 故选 A.

例 3 C 【解析】 $\because f(x)=(x+a)\ln(x+b)\geq 0$, $\therefore g(x)=x+a$ 与 $h(x)=\ln(x+b)$ 在 $(-b, +\infty)$ 上具有相同零点, $\therefore -a+b=1$, 即 $b=a+1$, $\therefore a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2(a+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geq \frac{1}{2}$, $\therefore a^2+b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故选 C.

变式题 C 【解析】因为 $y=e^x-e$ 与 $y=x-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有相同的正负区间, 所以原问题等价于 $(x^2+ax+b)(x-1)\geq 0$ 对任意 $x\in(0, +\infty)$ 恒成立, 由共零点性得 $1+a+b=0$, 即 $b=-a-1$, 所以 $(x^2+ax-a-1)(x-1)\geq 0$, 即 $(x+a+1)(x-1)^2\geq 0$ 对任意 $x\in(0, +\infty)$ 恒成立, 所以 $a+1\geq 0$, 即 $a\geq -1$. 故选 C.

第 15 讲 函数模型及其应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 递增 递增 递增

【对点演练】

1. $[10, 30]$ 【解析】设矩形花园另一边的长为 y m, 由相似三角形的性质可得 $\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}$ ($0<x<40$), 即 $y=40-x$ ($0<x<40$), $\therefore$ 矩形花园的面积 $S=x(40-x)$ m². $\because$ 矩形花园的面积不小于 300 m², $\therefore x(40-x)\geq 300$, 即 $(x-10)(x-30)\leq 0$, 解得 $10\leq x\leq 30$, 故 x 的取值范围是 $[10, 30]$.

2. $S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}$ ($x>0$) 【解析】由题意知, 每件产品的生产准备费用是 $\frac{800}{x}$ 元, 仓储费用是 $(\frac{x}{8}\times 1)$ 元, 所以平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和 $S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}$ ($x>0$).

3. 5500 m 【解析】设 A_1, A_2 两处的海拔高度分别为 h_1, h_2 , 则 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_0\cdot e^{-k\cdot h_1}}{p_0\cdot e^{-k\cdot h_2}}=\frac{e^{-k\cdot h_1}}{e^{-k\cdot h_2}}=e^{k\cdot h_2-k\cdot h_1}=\frac{1}{2}$, 故 $h_1-h_2=\frac{\ln 2}{k}\approx\frac{0.693}{0.000126}=5500$ (m).

4. $[0, 26]$ 【解析】令 $h=130t-5t^2\geq 0$, 解得 $0\leq t\leq 26$, 故所求定义域为 $[0, 26]$.

5. 8°C 【解析】由题意知, 上午 8 时即 $t=-4$, 因此所求温度 $T=(-4)^3-3\times(-4)+60=8(^\circ\text{C})$.

6. $s=\begin{cases} 60t(0\leq t\leq 2.5), \\ 150(2.5<t\leq 3.5), \\ 325-50t(3.5<t\leq 6.5) \end{cases}$ 【解析】当 $0\leq t\leq 2.5$ 时, $s=60t$; 当 $2.5<t\leq 3.5$ 时, $s=150$; 当 $3.5<t\leq 6.5$ 时, $s=150-50(t-3.5)=325-50t$. 故 s 关于 t 的函数表达式为 $s=\begin{cases} 60t(0\leq t\leq 2.5), \\ 150(2.5<t\leq 3.5), \\ 325-50t(3.5<t\leq 6.5). \end{cases}$

● 课堂考点探究

例 1 【思路点拨】根据图形的性质结合函数图象的特点逐项分析判断.

B 【解析】根据函数图象可知函数图象具有对称性, 故 C 错误; 对于 A, 由等边三角形可知线段 AP 的长度先增大再减小, 再增大, 最后减小, 故 A 错误; 对于 D, 由圆可知线段 AP 的长度不会是线性变化, 故 D 错误; 对于 B, 由正方形可知线段 AP 的长度先增大再减小, 且一开始线性增大, 符合题意, 故 B 正确. 故选 B.

变式题 C 【解析】刚开始交易时, 即时价格和平均价格应该相等, 故 A, D 错误; 开始交易后, 平均价格应该跟随即时价格变动, 即时价格与平均价格同增同减, 故 B 错误. 故选 C.

例 2 【思路点拨】(1) 根据已知条件列方

程,化简求得正确答案.(2)利用指对数的互化可分别求得两次地震释放的能量,再用指数的运算性质求得答案.

(1)C (2)C [解析] (1)根据题意得 $\frac{1}{2}=1-0.6t^{0.27}$,整理得到 $\frac{5}{6}=t^{0.27}$,两边取以10为底的对数,得到 $\lg \frac{5}{6}=0.27 \lg t$,即 $1-\lg 3-2 \lg 2=0.27 \lg t$,又 $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$,所以 $\lg t \approx -\frac{8}{27}$.

得到 $t \approx 10^{-\frac{8}{27}} \approx 0.5$,故选 C.
(2)由题设,日本东北部海域发生里氏 9.0 级地震所释放出来的能量 $E_1=10^{4.8+1.5 \times 9}$,中国台湾花莲县海域发生里氏 7.3 级地震所释放出来的能量 $E_2=10^{4.8+1.5 \times 7.3}$,所以 $\frac{E_1}{E_2}=\frac{10^{4.8+1.5 \times 9}}{10^{4.8+1.5 \times 7.3}}=10^{2.55}$,故选 C.

变式题 B [解析] 设开始记录时,甲、乙两种物质的质量均为 1,则 512 天后,甲的质量为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_1}}$,乙的质量为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_2}}$,由题意可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_2}}=\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{512}{T_1}}$,所以 $2+\frac{512}{T_1}=\frac{512}{T_2}$,故选 B.

例 3 [思路点拨] (1)利用待定系数法求得 y 关于 x 的函数解析式;(2)根据已知条件列不等式组,通过解不等式组求解.
解:(1)当 $0 \leq x \leq 8$ 时,设 $y=kx+t$,依题意得 $\begin{cases} k+t=70, \\ 5k+t=78, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=2, \\ t=68, \end{cases}$ 所以 $y=2x+68$,当 $x=8$ 时, $y=16+68=84$.当 $8 \leq x \leq 40$ 时,设 $y=a(x-20)^2+100$ ($a < 0$),将 $(8, 84)$ 代入上式得 $84=a \times 12^2+100$,解得 $a=-\frac{1}{9}$,所以 $y=-\frac{1}{9}(x-20)^2+100$.综上所述,
$$y=\begin{cases} 2x+68, & 0 \leq x \leq 8, \\ -\frac{1}{9}(x-20)^2+100, & 8 < x \leq 40. \end{cases}$$

(2)由 $\begin{cases} 2x+68 \geq 80, \\ 0 \leq x \leq 8, \end{cases}$ 解得 $6 \leq x \leq 8$,由 $\begin{cases} -\frac{1}{9}(x-20)^2+100 \geq 80, \\ 8 < x \leq 40, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} (x-20)^2 \leq 180, \\ 8 < x \leq 40, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 20-6\sqrt{5} \leq x \leq 20+6\sqrt{5}, \\ 8 < x \leq 40, \end{cases}$

所以 $8 < x \leq 20+6\sqrt{5} \approx 33$.因为 $33-6=27$,所以一节 40 分钟的课中该学生处于“理想听课状态”所持续的时间是 27 分钟.

变式题 A [解析] 设经过 n 层 PP 棉滤芯过滤后水中的大颗粒杂质含量为 y mg/L,则 $y=80 \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^n=80 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.令 $80 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 2$,解得 $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{40}$,两边取常用对数得 $n \lg \frac{2}{3} \leq \lg \frac{1}{40}$,即 $n \lg \frac{3}{2} \geq \lg 40$,即 $n(\lg 3-\lg 2) \geq 1+2 \lg 2$,所以 $n \geq \frac{1+2 \lg 2}{\lg 3-\lg 2} \approx 8.9$,又 $n \in \mathbf{N}^*$,所以 n 的最小值为 9.故选 A.

例 4 [思路点拨] (1)根据题意,代入第 10 天的日销售收入为 505 元,即可得解;(2)先利用函数的单调性,结合题设条件排除①③④,从而利用待定系数法即可得解;(3)由题意得 $f(x)=P(x) \cdot Q(x)$,从而结合基本不等式与函数的单调性,分段讨论 $f(x)$ 的最小值,由此得解.
解:(1)因为每件的销售价格 $P(x)=10+\frac{k}{x}$,第 10 天的日销售量为 50 件,且第 10 天的日销售收入为 505 元,

所以 $\left(10+\frac{k}{10}\right) \times 50=505$,解得 $k=1$.
(2)由表格中的数据知,当 x 增大时, $Q(x)$ 先增后减,而①③④函数模型都描述的是单调函数,不符合该数据模型,所以选择模型②: $Q(x)=a|x-m|+b$.由 $Q(15)=Q(25)$,可得 $|15-m|=|25-m|$,解得 $m=20$,由 $\begin{cases} Q(15)=5a+b=55, \\ Q(20)=b=60, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=60, \end{cases}$ 所以 $Q(x)=-|x-20|+60$,定义域为 $\{x \in \mathbf{N}^* | 1 \leq x \leq 30\}$.

(3)由(1)知 $P(x)=10+\frac{1}{x}$,又 $Q(x)=-|x-20|+60=\begin{cases} x+40, & 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N}^*, \\ -x+80, & 20 < x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$ 所以 $f(x)=P(x) \cdot Q(x)=\begin{cases} 10x+\frac{40}{x}+401, & 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N}^*, \\ -10x+\frac{80}{x}+799, & 20 < x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$

当 $1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x)=10x+\frac{40}{x}+401 \geq 2\sqrt{10x \cdot \frac{40}{x}}+401=441$,

当且仅当 $10x=\frac{40}{x}$,即 $x=2$ 时等号成立;当 $20 < x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x)=-10x+\frac{80}{x}+799$ 为减函数,所以函数的最小值为 $f(30)=499+\frac{8}{3} > 441$.

综上可得,当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值 441.

变式题 解:(1)由题意得 $y=1000(-300t+8-\frac{4}{3}|t-4|)$ $9000) \cdot \frac{1}{10000} (1 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N}^*)$,

即 $y=\begin{cases} -40t^2+1120t+2400, & 1 \leq t \leq 4, t \in \mathbf{N}^*, \\ 40t^2-1600t+12000, & 4 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$ 当 $1 \leq t \leq 4, t \in \mathbf{N}^*$ 时,根据二次函数的性质可得, $t=3$ 时 y 取得最大值 5400,当 $4 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N}^*$ 时,同理可得, $t=4$ 时 y 取得最大值 6240,所以 4 月份的月交易额最大.

(2)(i)①函数 $f(x)=ka^x$ 是单调函数,不符合题意.

②二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象不具备先上升,后下降,再上升的特点,不符合题意.

③当 $A < 0$ 时,函数 $f(x)=A \cos \frac{\pi}{4}x+B$ 的图象在 $[1, 4]$ 上是上升的,在 $[4, 8]$ 上是下降的,在 $[8, 11]$ 上是上升的,符合题意.应选③.

(ii)因为 $f(4)=8, f(8)=4$,所以 $\begin{cases} A \cos \pi+B=8, \\ A \cos 2\pi+B=4, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} A=-2, \\ B=6, \end{cases}$

所以 $f(x)=-2 \cos \frac{\pi}{4}x+6$.

因为 $x \in [1, 11]$,所以 $\frac{\pi}{4}x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{11}{4}\pi\right]$,由 $-2 \cos \frac{\pi}{4}x+6 < 5$,得 $\cos \frac{\pi}{4}x > \frac{1}{2}$,所以 $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}x < \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3} < \frac{\pi}{4}x < \frac{7\pi}{3}$,解得 $1 \leq x < \frac{4}{3}$ 或 $\frac{20}{3} < x < \frac{28}{3}$,又 $x \in \mathbf{N}^*$,所以 $x=1, 7, 8, 9$,即 1 月、7 月、8 月、9 月该种蔬菜的价格在 5 元/千克以下,所以该种蔬菜的价格在 5 元/千克以下的月份有 4 个.

第三单元 一元函数的导数及其应用

第 16 讲 导数的概念及其意义、导数的运算

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 平均斜率
(2) $x=x_0$ 斜率
 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

2. $ax^{a-1} \cos x - \sin x a^x \ln a \frac{1}{x \ln a}$
 $f'(x) \pm g'(x) f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) y'_u \cdot u'_x$

【对点演练】

1. 24 [解析] $f(6)=108, f(2)=12$,所以平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{108-12}{4}=24$.

2. -4.8 m/s [解析] $\because s'=-4t, \therefore$ 该物体在 1.2 s 末的瞬时速度为 $(-4) \times 1.2=-4.8$ (m/s).

3. $y=-\frac{x}{\pi}+1$ [解析] 由题得 $y'=\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $\therefore$ 切线的斜率 $k=$

$y'|_{x=\pi}=-\frac{1}{\pi}$,则切线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x-\pi)$,即 $y=-\frac{x}{\pi}+1$.

4. $2 \cos 2x$ [解析] 方法一: $y'=2(\sin x \cos x)'=2(\sin x)' \cos x + 2 \sin x (\cos x)'=2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 2 \cos 2x$.
方法二: $y'=\cos 2x \cdot (2x)'=2 \cos 2x$.
5. -8 [解析] $f'(x)=2x+3f'(2)$,令 $x=2$,可得 $f'(2)=-2$,所以 $f(x)=x^2-6x$,则 $f(2)=-8$.
6. $3(2x+3)^2-6(2x+3)^2$
[解析] $f'(x)=3x^2$,所以 $f'(2x+3)=3(2x+3)^2$. $[f(2x+3)]'=[(2x+3)^3]'=3(2x+3)^2(2x+3)'=6(2x+3)^2$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 根据基本初等函数的导数公式和四则运算法则以及复合函数求导的方法求导.

解:(1) $y'=(x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'=2x \sin x + x^2 \cos x$.

(2) $y'=\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)'=(\ln x)' +$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

(3) $y'=\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)'=\frac{(\cos x)'e^x - \cos x(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

(4) $\because y=x \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}x \sin(4x+\pi)=-\frac{1}{2}x \sin 4x$,
 $\therefore y'=-\frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2}x \cdot 4 \cos 4x=-\frac{1}{2} \sin 4x - 2x \cos 4x$.

变式题 解:(1) $y'=\cos x - x \sin x - \frac{1-\ln x}{x^2}$.

(2) $y'=(2x+2)e^{2-x}-(x^2+2x-1)e^{2-x}=(3-x^2)e^{2-x}$.

(3) $f'(x)=\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{5x+4}}=\frac{5}{2\sqrt{5x+4}}$.

(4) 因为 $f(x)=\sin \frac{x}{2}\left(1-2 \cos^2 \frac{x}{4}\right)=\sin \frac{x}{2} \cdot \left(-\cos \frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2} \sin x$,所以

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cos x.$$

例2 [思路点拨] (1)利用导数的几何意义求切线的斜率,从而求切线的方程;(2)设切点为 $(x_0, x_0^3 + x_0 - 16)$,利用导数的几何意义写出切线方程,根据切线过原点求出 x_0 ,即可求出切点坐标及切线方程.

解:(1)由 $f(x) = x^3 + x - 16$,得 $f'(x) = 3x^2 + 1$,所以 $f'(2) = 3 \times 2^2 + 1 = 13$,所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, -6)$ 处的切线方程为 $y + 6 = 13(x - 2)$,即 $13x - y - 32 = 0$.

(2)设切点为 $(x_0, x_0^3 + x_0 - 16)$,由(1)得 $f'(x_0) = 3x_0^2 + 1$,所以切线方程为 $y - (x_0^3 + x_0 - 16) = (3x_0^2 + 1)(x - x_0)$,因为切线经过原点,所以 $-(x_0^3 + x_0 - 16) = -x_0(3x_0^2 + 1)$,所以 $2x_0^3 = -16$,解得 $x_0 = -2$,则 $f'(-2) = 3 \times (-2)^2 + 1 = 13$,所以所求的切线方程为 $y = 13x$,切点为 $(-2, -26)$.

变式题 (1)B (2) $y = \frac{x}{e}$ $y = -\frac{x}{e}$

[解析] (1) $f(1) = 0$,则切点为 $(1, 0)$.
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$,所以 $f'(1) = \frac{3}{2}$,所以

以切线方程为 $y = \frac{3}{2}(x - 1)$,即 $3x - 2y - 3 = 0$.故选B.

(2)当 $x > 0$ 时, $y = \ln|x| = \ln x$.设过坐标原点的直线与曲线 $y = \ln x$ 相切于点 $P(x_0, \ln x_0)$,由 $y = \ln x$,得 $y' = \frac{1}{x}$,所以

$\frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_0}{x_0}$,解得 $x_0 = e$,所以 $P(e, 1)$,则切线的方程为 $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$,即

$y = \frac{x}{e}$,由曲线 $y = \ln|x|$ 的对称性,知另一条切线的方程为 $y = -\frac{x}{e}$.

例3 [思路点拨] (1)利用切点既在切线上又在曲线上,结合曲线在 $x = 2$ 处的切线斜率为4,解出 a 和 b 的值,从而可得答案.(2)设切点为 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$),利用导数的几何意义,结合切线经过坐标原点得到关于 x_0 的方程,根据此方程应有两个相异的非零实数根,求得 a 的取值范围即可.

(1)C (2) $a < -4$ 或 $a > 0$

[解析] (1)因为 $y = ae^{x-2} + x$,所以 $y' = ae^{x-2} + 1$,由题意可得 $\begin{cases} a+1=4, \\ 8+b=2+a, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=-3. \end{cases}$ 所以 $a+b=0$.故选C.

(2)设切点为 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$),则 $y_0 = (x_0 + a)e^{x_0}$,由 $y' = (x + a + 1)e^x$,知 $(x_0 + a + 1)e^{x_0} = \frac{(x_0 + a)e^{x_0}}{x_0}$,所以关于

x 的方程 $(x + a + 1)e^x = \frac{(x + a)e^x}{x}$ 有两个相异的非零实数根,即关于 x 的方程 $x + a + 1 = \frac{x + a}{x}$ 有两个相异的非零实数根,即关于 x 的方程 $x^2 + ax - a = 0$ 有两个相异的非零实数根,所以 $\Delta = a^2 + 4a > 0$ 且 $a \neq 0$,解得 $a < -4$ 或 $a > 0$.

变式题 (1) -1 或 3 (2)C [解析] (1)由 $y = e^x - ax$,得 $y' = e^x - a$,所以 $y'|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$,所以切线方程为 $y = (1 - a)x + 1$.由 $\begin{cases} y = (1 - a)x + 1, \\ y = -x^2 \end{cases}$

消去 y 整理得 $x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$,又直线 $y = (1 - a)x + 1$ 与曲线 $y = -x^2$ 只有一个交点,所以关于 x 的方程 $x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根,即 $\Delta = (1 - a)^2 - 4 = 0$,解得 $a = -1$ 或 $a = 3$.

(2)由 $y = \ln(x + 2a)$,得 $y' = \frac{1}{x + 2a}$,令

$$\frac{1}{x + 2a} = e, \text{ 则 } x = \frac{1}{e} - 2a, \text{ 又 } \ln\left(\frac{1}{e} - 2a + 2a\right) = -1, \text{ 所以 } e\left(\frac{1}{e} - 2a\right) - 2b = -1, \text{ 可得 } ae + b = 1. \text{ 因为 } a, b \text{ 为正实数, 所以 } \frac{1}{ea} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{ea} + \frac{1}{b}\right)(ae + b) = 1 + 1 + \frac{b}{ea} + \frac{ea}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{ea} \cdot \frac{ea}{b}} = 4, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{ea} = \frac{ea}{b}, \text{ 即 } b = ea = \frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立, 故 } \frac{1}{ea} + \frac{1}{b} \text{ 的取值范围是 } [4, +\infty). \text{ 故选 C.}$$

例4 [思路点拨] (1)根据导数的几何意义可知公切线的斜率为 $2x_1$ 和 $4e^{x_2-2}$,则 $2x_1 = 4e^{x_2-2}$,分类讨论公切线与曲线 C_1, C_2 的切点相同与不相同的情况,求出对应的切点,结合直线的点斜式方程即可求解.(2)先利用导数结合切点求出两曲线公切线的斜率,然后根据公切线的性质,找到两切点坐标之间的关系,从而构造出关于一个切点横坐标的函数,转化为值域问题求解.

(1)A (2) $(-\ln 2 - 1, +\infty)$

[解析] (1)由 $y = x^2$,得 $y' = 2x$,由 $y = 4e^{x-2}$ 得 $y' = 4e^{x-2}$,设曲线 C_1, C_2 的公切线与曲线 C_1 的切点为 (x_1, x_1^2) ,则切线的斜率为 $2x_1$,与曲线 C_2 的切点为 $(x_2, 4e^{x_2-2})$,则切线的斜率为 $4e^{x_2-2}$,所以 $2x_1 = 4e^{x_2-2}$.当公切线与曲线 C_1, C_2 的切点相同时, $x_1 = x_2, x_1^2 = 4e^{x_2-2}$,可得 $x_1 = x_2 = 2$,所以切点为 $(2, 4)$,此时公切线的方程为 $4x - y - 4 = 0$;当公切线与曲线 C_1, C_2 的切点不同时, $x_1 \neq x_2, 2x_1 = x_1^2 - 4e^{x_2-2}$,得 $x_1 = 2x_2 - 2$,所以 $4x_2 - 4 = 4e^{x_2-2}$,即 $x_2 - 1 = e^{x_2-2}$,解得 $x_2 = 2$,此时 $x_1 = 2$,与 $x_1 \neq x_2$ 矛盾,故不存在切点不同的情况.综上可得,切点的坐标为 $(2, 4)$,公切线的方程为 $4x - y - 4 = 0$.故选A.

(2)设 $f(x) = \ln x, g(x) = x^2 + 2x + a$ ($x < 0$),则 $f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 2x + 2$ ($x < 0$).设公切线与曲线 $y = x^2 + 2x + a$ ($x < 0$)的切点为 $(s, t), s < 0$,与曲线 $y = \ln x$ 的切点为 $(m, n), m > 0$,则 $2s + 2 = \frac{1}{m} = \frac{n-t}{m-s}$,又 $t = s^2 + 2s + a, n = \ln m, \therefore a = s^2 - 1 - \ln(2s + 2)$.设 $h(s) = s^2 - 1 - \ln(2s + 2) (-1 < s < 0)$,则 $h'(s) = 2s + 2 = \frac{1}{s+1} < 0, \therefore h(s)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, $\therefore h(s) > -\ln 2 - 1, \therefore a > -\ln 2 - 1$,即 a 的取值范围为 $(-\ln 2 - 1, +\infty)$.

变式题 (1)0 (2) $\ln \sqrt{2e}$ [解析] (1)设切点坐标为 $(x_0, y_0), x_0 > 0$,则 $x_0^2 - m = \ln x_0 + x_0$ ①,由 $f(x) = x^2 - m$ 可得 $f'(x) = 2x$,由 $g(x) = \ln x + x$ 可得 $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$,故 $2x_0 = \frac{1}{x_0} + 1$ ②,由①②可得 $x_0 = 1, m = 0$.

(2)设公切线与 $f(x) = x^2, g(x) = a + \ln x$ 的图象的切点分别为 $(x_1, x_1^2), (x_2, a + \ln x_2)$,因为 $f'(x) = 2x, g'(x) = \frac{1}{x}$,所以 $2x_1 = \frac{1}{x_2}$,公切线的方程为 $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$,即 $y = 2x_1x - x_1^2$,也可写成 $y - (a + \ln x_2) = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$,即

$$y = \frac{1}{x_2}x - 1 + a + \ln x_2, \text{ 由 } \begin{cases} 2x_1 = \frac{1}{x_2}, \\ x_1^2 + a + \ln x_2 - 1 = 0, \end{cases} \text{ 消去 } x_1 \text{ 得}$$

$$\frac{1}{4x_2^2} + a + \ln x_2 - 1 = 0, \text{ 即 } 1 - a = \frac{1}{4x_2^2} + \ln x_2. \text{ 令 } h(x) = \frac{1}{4x^2} + \ln x, \text{ 则 } h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{2x^3}, \text{ 当 } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } h'(x) < 0, h(x)$$

单调递减,当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增,所以 $h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $1 - a \geq \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $a \leq \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2e}$,故 a 的最大值为 $\ln \sqrt{2e}$.

第17讲 导数与函数的单调性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

递增 ≥ 0 ≤ 0 充分

【对点演练】

1. $(0, +\infty)$ [解析] 由 $f'(x) = e^x - 1 > 0$,解得 $x > 0$,故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$.

2. $> >$ [解析] 设 $f(x) = e^x - 1 - x, x \neq 0$,则 $f'(x) = e^x - 1$,由 $f'(x) > 0$,得 $x > 0$,由 $f'(x) < 0$,得 $x < 0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,故 $f(x) > e^0 - 1 - 0 = 0$,故 $e^x > 1 + x, x \neq 0$.设 $g(x) = x - \ln x, x \in (1, +\infty)$,则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x) > 1 - \ln 1 = 1$,所以 $x > \ln x, x \in (1, +\infty)$.

3. $(-\infty, 2]$ [解析] 因为当 $x \leq 2$ 时, $e^{f(x)} \leq 1$,所以当 $x \leq 2$ 时, $f'(x) \leq 0$,所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 2]$.

4. $(0, 2]$ [解析] 方法一:由 $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2} \geq 0$,得 $x \leq -a$ 或 $x \geq a, \therefore$ 函数 $y = x + \frac{a^2}{x}$ ($a > 0$)的单调递增区间为 $(-\infty, -a], [a, +\infty)$. $\therefore$ 函数在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore [2, +\infty) \subseteq [a, +\infty), \therefore a \leq 2$,又 $a > 0, \therefore 0 < a \leq 2$.

方法二: $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2}$,依题意知 $1 - \frac{a^2}{x^2} \geq 0$ 对任意 $x \in [2, +\infty)$ 恒成立,即 $a^2 \leq x^2$ 对任意 $x \in [2, +\infty)$ 恒成立, $\therefore x \in [2, +\infty), \therefore x^2 \geq 4, \therefore a^2 \leq 4, \text{ 又 } a > 0, \therefore 0 < a \leq 2$.

5. $(-\infty, 1)$ [解析] 由 $2 - x > 0$,得 $x < 2$,则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2)$.易知 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2-x}$,令 $f'(x) > 0$,可得 $\frac{1}{2-x} < 1$,结合 $2 - x > 0$,得 $2 - x > 1$,解得 $x < 1$,所以函数 $f(x) = x + \ln(2 - x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 1)$.

6. $a > 0, a = 0, a < 0$ [解析] 因为 $y' = 3ax^2 - 1$,所以对 a 应分 $a > 0, a = 0, a < 0$ 三种情况讨论.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1)首先根据题意求出 $f'(x)$,再根据 $f'(x) < 0$ 及 $f(x)$ 的定义域求得 $f(x)$ 的单调递减区间.(2)求导后结合三角函数知识可得结果.(3)求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = \frac{e^x - (x+1)}{(x+1)e^x}$,令 $m(x) = e^x - (x+1) (x > -1)$,利用 $m(x)$ 的单调性得到 $f'(x) \geq 0$,即得 $f(x)$ 的单调递增区间.

解:(1)由题可知, $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x^2}$,令

$f'(x) < 0$, 得 $x \in (0, 1)$, 故函数 $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - \ln x$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$.

(2) 由题知 $f'(x) = (x-1)\sin x$, 因为当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, $\sin x < 0$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin x > 0$, 所以当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 和 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, 单调递减区间为 $(0, 1)$.

(3) 由题意, 函数 $f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{e^x}{(x+1)e^x} - e^{-x}$. 易知 $(x+1)e^x > 0$, 令 $m(x) = e^x - (x+1)$ ($x > -1$), 则 $m'(x) = e^x - 1$, 由 $m'(x) = 0$, 得 $x = 0$, 可得当 $x \in (-1, 0)$ 时, $m'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $m(x) \geq m(0) = e^0 - 1 = 0$, 即 $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, +\infty)$.

变式题 (1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ (2) D

[解析] (1) 函数 $f(x) = \ln(2x-1) - x^2 + x$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 且 $f'(x) = \frac{2}{2x-1} - 2x + 1 = \frac{2-(2x-1)^2}{2x-1} = \frac{[\sqrt{2}-(2x-1)][\sqrt{2}+(2x-1)]}{2x-1}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) 易知 $f'(x)$ 的图象过点 $(0, 0)$ 与点 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, 当 $x < 0$ 或 $1 < x < 4$ 时, $f'(x) > f(x)$, 即 $g'(x) = \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} >$

0, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), (1, 4)$.

(3) 解: $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g'(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) + e^x(-\sin x - \cos x + 2) = 2e^x(x - \sin x)$. 令 $p(x) = x - \sin x$, 则 $p'(x) = 1 - \cos x$, 因为 $\cos x \in [-1, 1]$, 所以 $p'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立, 所以函数 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $p(0) = 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $p(x) < 0$, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $p(x) > 0$, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增. 综上, 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

例 2 [思路点拨] 求得 $f'(x)$ 的分子是可分解因式的二次函数型, 需讨论零点的大小以及和定义域的关系.

解: $f(x) = 2a \ln x + \frac{3}{4}x^2 - (a+3)x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2a}{x} + \frac{3}{2}x - a - 3 = \frac{(3x-2a)(x-2)}{2x}$.

若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 若 $0 < a < 3$, 则当 $x \in \left(0, \frac{2a}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(\frac{2a}{3}, 2\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 若 $a = 3$, 则

$f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $f(x)$ 单调递增; 若 $a > 3$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(2, \frac{2a}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(\frac{2a}{3}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 2)$; 当 $0 < a < 3$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{2a}{3}\right)$ 和 $(2, +\infty)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{2a}{3}, 2\right)$; 当 $a = 3$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间; 当 $a > 3$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ 和 $\left(\frac{2a}{3}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(2, \frac{2a}{3}\right)$.

变式题 解: (1) $f'(x) = 2e^{2x} + (2-2a)e^x - 2a = 2(e^x + 1)(e^x - a)$.

① 当 $a \leq 0$ 时, 因为 $e^x > 0$, 所以 $f'(x) > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln a$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x \in (\ln a, +\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (-\infty, \ln a)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 因为 $f(x) = ax^2 - \ln x - x$, $x \in (0, +\infty)$, 所以 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} - 1 = \frac{2ax^2 - x - 1}{x}$. 当 $a \leq 0$ 时, $2ax^2 - x - 1 \leq -x - 1 < -1 < 0$, 故 $2ax^2 - x - 1 < 0$ 恒成立, 所以 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $2ax^2 - x - 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1 + \sqrt{1+8a}}{4a}$ (舍去负根), 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1 + \sqrt{1+8a}}{4a}$, 此时 $f(x)$ 单调递增; 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1 + \sqrt{1+8a}}{4a}$, 此时 $f(x)$ 单调递减. 综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1+8a}}{4a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1 + \sqrt{1+8a}}{4a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

例 3 [思路点拨] (1) 求导, 分析可得 $x^2 - 2x \geq -2a$ 对任意 $x \in (1, 2)$ 恒成立, 根据恒成立问题结合二次函数的性质分析求解; (2) 分析可得存在 $x \in (1, 2)$, 使得 $x^2 - 2x < -2a$ 成立, 根据存在性问题结合二次函数的性质分析求解; (3) 分析可得 $f'(1) \cdot f'(2) < 0$, 从而解得 a 的取值范围.

解: (1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2a \ln x - 2x$, 则 $f'(x) = x + \frac{2a}{x} - 2$ ($x > 0$), 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增等价于对任意 $x \in (1, 2)$, $f'(x) = x + \frac{2a}{x} - 2 \geq 0$ 恒成立, 可得 $x^2 - 2x \geq -2a$ 对任意 $x \in (1, 2)$ 恒成立. 设 $g(x) = x^2 - 2x$, 可知 $g(x)$ 的图象开口向上, 对称轴方程为 $x = 1$, $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, $\therefore g(1) = -1$, $\therefore -1 \geq -2a$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$, 故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(2) 由 (1) 可得 $f'(x) = x + \frac{2a}{x} - 2$ ($x >$

0), 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在单调递减区间等价于存在 $x \in (1, 2)$, 使得 $f'(x) = x + \frac{2a}{x} - 2 < 0$ 成立, 可得存在 $x \in (1, 2)$, 使得 $x^2 - 2x < -2a$ 成立.

由 (1) 知 $g(x) = x^2 - 2x$ 的图象开口向上, 对称轴方程为 $x = 1$, $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, $\therefore g(1) = -1$, $\therefore -1 < -2a$, 解得 $a < \frac{1}{2}$, 则 a 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

(3) 由 (1) 可得 $f'(x) = x + \frac{2a}{x} - 2$ ($x > 0$), 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上不单调等价于 $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 上存在变号零点, $\therefore f'(1) \cdot f'(2) < 0$, 即 $a(2a-1) < 0$, 解得 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

变式题 (1) C (2) D [解析] (1) 由题可知 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 在区间 $(1, 2)$ 上

恒成立, 即 $a \geq \frac{1}{xe^x}$ 对任意 $x \in (1, 2)$ 恒成立. 令 $h(x) = xe^x$ ($x \in (1, 2)$), 可得 $h'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x > 0$, 所以 $h(x) = xe^x$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(1) = e$, 故 $\frac{1}{xe^x} < \frac{1}{e}$, 所以 $a \geq \frac{1}{e}$, 所以 a 的最小值为 e^{-1} . 故选 C.

(2) 由 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8 \ln x$, 可得 $f'(x) = -x + 6 - \frac{8}{x} = -\frac{(x-2)(x-4)}{x}$, 可得函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8 \ln x$ 的极值点为 $x = 2, x = 4$. 由 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8 \ln x$ 在 $[m, m+1]$ 上不单调, 可得 $m < 2 < m+1$ 或 $m < 4 < m+1$, 解得 $m \in (1, 2) \cup (3, 4)$.

例 4 [思路点拨] (1) 由函数的单调性与奇偶性将原不等式转化为常规不等式后再求解. (2) 首先将 a, b, c 化成统一形式, 再构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$), 研究其单调性即可比较大小.

(1) $(-4, 1)$ (2) A [解析] (1) 由 $f(x) = 2x - \sin 2x$ 得 $f'(x) = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \geq 0$, 所以函数 $f(x) = 2x - \sin 2x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 又由 $f(-x) = -2x - \sin(-2x) = -(2x - \sin 2x) = -f(x)$ 得函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以由 $f(x^2) + f(3x-4) < 0$ 得 $f(x^2) < -f(3x-4) = f(4-3x)$, 所以 $x^2 < 4-3x$, 即 $x^2 + 3x - 4 < 0$, 即 $(x-1)(x+4) < 0$, 解得 $-4 < x < 1$.

(2) 由题意得 $a = \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}}, b = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{\ln \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, c = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. 设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 又 $0 < \sqrt{2} < \sqrt{e} < 2 < e$, 所以 $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{e}) < f(2)$, 即 $\frac{\ln \sqrt{2}}{\sqrt{2}} < \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}} < \frac{\ln 2}{2}$, 所以 $b < a < c$.

变式题 (1) B (2) CD [解析] (1) 因为 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$, 当且仅当 $e^x = e^{-x}$, 即 $x = 0$ 时, 等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 而且 $f(0) = 2$. 由 $f(2x+4) \geq 2$, 得 $f(2x+4) \geq f(0)$, 则 $2x+4 \geq 0$, 解得 $x \geq -2$. 故选 B.

(2) 由 $\alpha + \beta - \frac{\pi}{2} > \sin \beta - \cos \alpha$, 得 $\beta - \sin \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, 令 $f(x) =$

$x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增. $\because \alpha, \beta$ 均为锐角, $f(\beta) > f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\therefore \beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\therefore \cos \beta < \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\sin \beta > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, 即 $\cos \beta < \sin \alpha$, $\sin \beta > \cos \alpha$, 故选 CD.

第 18 讲 导数与函数的极值、最值

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ (2) $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$

2. (2) $f(a)$ $f(b)$ $f(a)$ $f(b)$

【对点演练】

1. -3 [解析] $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 令 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = 2$. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值 $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$.

2. $e - 1$ [解析] $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$, 得 $x = 0$. 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$. 故函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 在 $(0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 $\max\{f(-1), f(1)\} = \max\left\{\frac{1}{e} + 1, e - 1\right\} = e - 1$.

3. $\frac{100\pi}{\pi + 4}$ [解析] 设弯成圆的铁丝的长为 x cm, 则弯成正方形的铁丝的长为 $(100 - x)$ cm, 记正方形与圆的面积之和为 S cm², 则 $S = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$ ($0 < x < 100$), $\therefore S' = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{8}(100 - x)$. 令 $S' = 0$, 得 $x = \frac{100\pi}{\pi + 4}$, 当 $0 < x < \frac{100\pi}{\pi + 4}$ 时, $S' < 0$, S 单调递减, 当 $\frac{100\pi}{\pi + 4} < x < 100$ 时, $S' > 0$, S 单调递增, 故当 $x = \frac{100\pi}{\pi + 4}$ 时, S 取得最小值, 即当弯成圆的铁丝的长为 $\frac{100\pi}{\pi + 4}$ cm 时, 正方形与圆的面积之和最小.

4. $x = 1$ 不存在 [解析] 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - 1}{x^2}$, 所以当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点. 因为 $g'(x) = 3(x - 1)^2 \geq 0$, 即 $g'(x)$ 无变号零点, 所以函数 $g(x) = (x - 1)^3$ 不存在极值点.

5. 1, 4 不存在 [解析] 易知 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 故 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值为 $g(1) = 1$, 最大值为 $g(2) = 4$. 根据最值的定义, 可得 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上的最小值和最大值均不存在.

6. $[1, +\infty)$ $[-1, +\infty)$ [解析] 对任意实数 x , 不等式 $\sin x \leq a$ 恒成立, 则 $(\sin x)_{\max} \leq a$, 即 $a \geq 1$. 存在实数 x , 使不等式 $\sin x \leq a$ 成立, 则 $(\sin x)_{\min} \leq a$, 即 $a \geq -1$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 由 $y = (1 - x)f'(x)$ 的图象可以得出 $f'(x)$ 在各区间上的正负情况, 从而可得 $f(x)$ 在各区间上的单调性, 进而可得极值.

AD [解析] 由图可知, 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $1 - x > 0$, 且 $(1 - x)f'(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递增; 当 $x \in (-2, 1)$ 时, $1 - x > 0$, 且 $(1 - x)f'(x) < 0$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $(-2, 1)$ 上单调递减; 当 $x \in (1, 2)$

时, $1 - x < 0$, 且 $(1 - x)f'(x) > 0$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $1 - x < 0$, 且 $(1 - x)f'(x) < 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递增. 所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)$, 极小值为 $f(2)$.

例 2 [思路点拨] (1) 利用导数求函数的单调区间和极值即可. (2) 根据函数极值点的定义, 结合一元二次方程根的判别式分类讨论求解即可.

解: (1) 因为 $f(x) = \ln x + x^2 - 3x + 2$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$

或 $x = 1$. 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调

递增, 所以 $f(x)$ 极大值 $= f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 + \frac{3}{4}$, $f(x)$ 极小值 $= f(1) = 0$. 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $f(x)$ 的

极大值为 $-\ln 2 + \frac{3}{4}$, 极小值为 0 .
(2) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + a}{x}, x > 0$, 令 $g(x) = x^2 - 2x + a$, 易知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 的判别式 $\Delta = 4 - 4a$.

① 当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无极值点.
② 当 $\Delta > 0$, 即 $a < 1$ 时, 函数 $g(x)$ 有两个零点 $x_1 = 1 - \sqrt{1 - a}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1 - a}$.

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $x_1 \leq 0$, $x_2 > 1$, 当 $x \in (0, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 有一个极值点;

(ii) 当 $0 < a < 1$ 时, $0 < x_1 < 1$, $x_2 > 1$, 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 有两个极值点.

综上, 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 无极值点; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 有两个极值点; 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 有一个极值点.

例 3 [思路点拨] (1) 依题意知, $f'(1) = 0$, $f(1) = 10$, 求得 a, b , 进行检验即可求解. (2) 将函数 $f(x)$ 有两个极值点转化为 $f'(x) = 0$ 有两个不同的实数根, 令

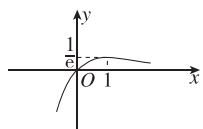
$g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则问题等价于函数 $y = g(x)$ 与 $y = -2a$ 的图象有两个不同的交点, 数形结合求得 a 的取值范围即可.

(1) $-\frac{3}{2}$ (2) $\left(-\frac{1}{2e}, 0\right)$

[解析] (1) $\because f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$, $\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 又 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a^2 - 7a$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 10 , $\therefore f'(1) = 3 + 2a + b = 0$, $f(1) = 1 + a + b - a^2 - 7a = 10$, $\therefore a^2 + 8a + 12 = 0$, $\therefore a = -2$, $b = 1$ 或 $a = -6$, $b = 9$. 当 $a = -2$, $b = 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$, 当 $\frac{1}{3} < x < 1$

时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 与题意不符; 当 $a = -6$, $b = 9$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $1 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 符合题意. 故 $\frac{b}{a} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$.

(2) 由 $f(x) = 2ax - \frac{x+1}{e^x}$, 得 $f'(x) = 2a + \frac{x}{e^x}$, 因为函数



$f(x)$ 有两个极值点, 所以 $f'(x) = 0$ 有两个不同的实数根, 即关于 x 的方程 $-2a = \frac{x}{e^x}$ 有两个不同的实数根. 令

$g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则函数 $y = g(x)$ 与 $y = -2a$ 的图象有两个不同的交点. 因为 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 所以当 $x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$

单调递增, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 所以当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取得最大值 $g(1) = \frac{1}{e}$. 作出函数 $g(x)$ 的图象如图

所示, 由图可知, $0 < -2a < \frac{1}{e}$, 解得 $-\frac{1}{2e} < a < 0$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2e}, 0\right)$.

【应用演练】

1. BCD [解析] 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$,

由函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值, 得方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根. 令 $h(x) = ax^2 - bx - 2c$, 则 $h(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根, 故

$\begin{cases} \Delta = (-b)^2 - 4a(-2c) = b^2 + 8ac > 0, \\ \frac{b}{a} > 0, \\ -\frac{2c}{a} > 0, \end{cases}$ 所

以 $ab > 0$, $ac < 0$, $bc < 0$, 故选 BCD.

2. AD [解析] $f'(x) = 6x(x - a)$. 对于 A, 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, a)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1 > 0$, 极小值为 $f(a) = 1 - a^3 < 0$, 又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $f(x)$ 有三个零点, A 正确. 对于 B, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, 0)$ 上单调递减, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, B 错误. 对于 C, 函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$ 的图象为中心对称图形, 不是轴对称图形, C 错误. 对于 D, 方法一: 令 $g(x) = f'(x) = 6x^2 - 6ax$, 则 $g'(x) = 12x - 6a$, 令

$g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{a}{2}$, 则曲线 $y = f(x)$ 的

对称中心为 $\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ (验证:

$f\left(x + \frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{a}{2} - x\right) = 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^3 - 3a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^3 - 3a\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + 1 = 2 - a^3 =$

$2f\left(\frac{a}{2}\right)$), 当 $a = 2$ 时, 点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, D 正确.

方法二: $f(1) = 3 - 3a$, 假设存在 a , 使得点 $(1, 3 - 3a)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, 则 $f(x) + f(2 - x) = 6 - 6a$, 事实上, $f(x) + f(2 - x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1 + 2(2 - x)^3 - 3a(2 - x)^2 + 1 = (12 - 6a)x^2 + (12a - 24)x + 18 - 12a$, 于是 $6 - 6a = (12 - 6a)x^2 + (12a - 24)x + 18 - 12a$, 由 $\begin{cases} 12 - 6a = 0, \\ 12a - 24 = 0, \\ 18 - 12a = 6 - 6a, \end{cases}$ 解得 $a = 2$, 即存在 $a = 2$, 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, D 正确. 故选 AD.

3. $a > 2$ [解析] $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$, $f'(x) = x - a + \frac{1}{x}$. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$ 在 $(0, 2)$ 上有极值, 则 $f'(x) = x - a + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上有变号零点, 即 $a = x + \frac{1}{x}$ 对 $x \in (0, 2)$ 有解. 令 $g(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, 2)$,

则 $g(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 所以 $a \geq 2$. 当 $a = 2$ 时, $f'(x) = x - a + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上没有极值, 故 $a > 2$.

4. $-e$ [解析] 由 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^x$, 得 $f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax - 1)e^x$, 因为 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^x$ 的极值点, 所以 $f'(-2) = (-4 + a)e^{-2} + (4 - 2a - 1)e^{-2} = 0$, 即 $-4 + a + (3 - 2a) = 0$, 解得 $a = -1$. $f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2$ 或 $x = 1$. 当 $x < -2$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $-2 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增. 所以当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1) = (1^2 - 1 - 1)e^1 = -e$.

例 4 [思路点拨] (1) 求导后, 分 $a \leq 1, 1 < a < e, a \geq e$ 讨论求得最小值, 从而可求得 a 的值; (2) 分 $a \leq 1, 1 < a < \frac{e}{e-1}, \frac{e}{e-1} < a < e, a \geq e$ 讨论求得 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值.

解: (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$, $x > 0$. 若 $a \leq 1$, 则 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $f(1) = a = \frac{3}{2}$, 不满足题意; 若 $1 < a < e$, 则当 $x \in [1, e]$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 \leq x < a$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $a < x \leq e$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上单调递减, 在 $(a, e]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $f(a) = \ln a + 1 = \frac{3}{2}$, 解得 $a = \sqrt{e}$, 满足题意; 若 $a \geq e$, 则 $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, e]$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值为 $f(e) = 1 + \frac{a}{e} = \frac{3}{2}$, 解得 $a = \frac{e}{2}$, 不满足题意.

综上所述, $a = \sqrt{e}$.

(2) 由 (1) 可知若 $a \leq 1$, 则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(e) = 1 + \frac{a}{e}$; 若 $1 < a < e$, 则 $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上单调递减, 在 $(a, e]$ 上单调递增, 当 $1 + \frac{a}{e} \geq a$, 即 $1 < a \leq \frac{e}{e-1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(e) = 1 + \frac{a}{e}$; 当 $1 + \frac{a}{e} < a$, 即 $\frac{e}{e-1} < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(1) = a$; 若 $a \geq e$, 则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(1) = a$.

综上, 当 $a \leq \frac{e}{e-1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(e) = 1 + \frac{a}{e}$; 当 $a > \frac{e}{e-1}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值为 $f(1) = a$.

变式题 (1) 0 (2) $[-2, 1]$

(3) 1 [解析] (1) $\because$ 函数 $f(x) = x^2 +$

$\ln(x+1)$, $\therefore f'(x) = 2x + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}{x+1}$ ($x > -1$), 当 $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, 0]$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, 0]$ 上的最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \ln 2$, 最大值为 $f(0) = 0$.

(2) $\because f(x) = x^3 - 3x$, $\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 得 $x = \pm 1$. 当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, 令 $f(x) = x^3 - 3x = -2$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 1$, $\therefore f(x)$ 的图象如图所示. 由图可知, 若当 $x \in (a, a+4)$ 时 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-2 \leq a < 1 < a+4$, 解得 $-2 \leq a < 1$, 即实数 a 的取值范围为 $[-2, 1)$.

(3) 由 $f(x) = e^x - ax$, 得 $f'(x) = e^x - a$. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有最小值; 当 $a > 0$ 时, 若 $x > \ln a$, 则 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 若 $x < \ln a$, 则 $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 因此当 $a > 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$. 由 $g(x) = ax - \ln x$, 得 $g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$, $x > 0$. 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) < 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因此函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有最小值; 当 $a > 0$ 时, 若 $x > \frac{1}{a}$, 则

$g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 若 $0 < x < \frac{1}{a}$, 则 $g'(x) < 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 因此当 $a > 0$ 时, $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$. 由题意可知 $a - a \ln a = 1 + \ln a$ ($a > 0$), 即 $\frac{a-1}{a+1} = \ln a$, 即 $\frac{a-1}{a+1} - \ln a = 0$. 设

$h(a) = \frac{a-1}{a+1} - \ln a$ ($a > 0$), 则 $h'(a) = \frac{a+1-(a-1)}{(a+1)^2} - \frac{1}{a} = \frac{-a^2-1}{a(a+1)^2} < 0$, 所以函数 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $h(1) = 0$, 所以方程 $\frac{a-1}{a+1} - \ln a = 0$ 的解为 1, 则 $a = 1$.

例 5 [思路点拨] (1) 根据题意得利润为 $g(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}ax^2 - 1$, 根据 $g(2) = 2.5$ 得 $a = 2$, 再利用导数研究其单调性即可得答案. (2) 将无盖圆柱的表面积表示成关于圆柱底面半径的函数, 利用导数求函数的最值, 从而可得结果.

(1) A (2) 3 [解析] (1) 设利润为 $g(x)$ 万元, 则 $g(x) = f(x) - 1 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}ax^2 + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}ax^2 - 1$, $0 < x \leq 8$, 由题意得 $g(2) = -\frac{1}{8} \times 2^3 + \frac{9}{16}a \times 2^2 - 1 = 2.5$, 解

得 $a = 2$, $\therefore g(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - 1$, $\therefore g'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}x = -\frac{3}{8}x(x-6)$. 易知函数 $g(x)$ 在 $(0, 6)$ 上单调递增, 在 $(6, 8]$ 上单调递减, $\therefore$ 当 $x = 6$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极大值, 也是最大值, 故选 A. (2) 设圆柱的高为 h , 底面半径为 r , 则由圆柱的体积公式可得 $\pi r^2 h = 27\pi$, 解得 $h = \frac{27}{r^2}$, 则无盖圆柱的表面积 $f(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{27}{r^2}$. 易知

$f'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = \frac{2\pi(r^3-27)}{r^2}$, 令 $f'(r) > 0$, 可得 $r > 3$, 令 $f'(r) < 0$, 可得 $0 < r < 3$, $\therefore f(r)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 则当 $r = 3$ 时, $f(r)$ 取得最小值, 即用料最省.

变式题 (1) C (2) A

[解析] (1) 如图, 作出轴截面, 设圆柱的底面半径为 r ($0 < r < 1$), 高为 h , 则 $\frac{2-h}{r} = \frac{2}{1}$, 得 $h = 2 - 2r$, 所以圆柱的体积为 $V(r) = \pi r^2 h = 2\pi r^2(1-r)$, 则 $V'(r) = -2\pi(3r^2 - 2r)$. 令 $V'(r) = 0$, 得 $r = \frac{2}{3}$, 易知当 $0 < r < \frac{2}{3}$ 时, $V(r)$ 单调递增, 当 $\frac{2}{3} < r < 1$ 时, $V(r)$ 单调递减, 所以 $V(r)_{\max} = V(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27}\pi$.

(2) 设行驶速度为 x km/h, 甲、乙两城的距离为 a km, 比例系数为 k , 总费用为 $f(x)$ 元, 则 $f(x) = (kx^3 + 200) \frac{a}{x} = a(kx^2 + \frac{200}{x})$ ($0 < x \leq 100$). 由已知条件, 得 $40 = k \cdot 20^3$, $\therefore k = \frac{1}{200}$, $\therefore f(x) = a(\frac{1}{200}x^2 + \frac{200}{x})$. 令 $f'(x) = \frac{a(x^3 - 20000)}{100x^2} = 0$, 解得 $x = 10 \sqrt[3]{20}$, 当 $0 < x < 10 \sqrt[3]{20}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $10 \sqrt[3]{20} < x \leq 100$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $\therefore$ 当 $x = 10 \sqrt[3]{20}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, $\therefore$ 要使总费用最少, 行驶速度应为 $10 \sqrt[3]{20}$ km/h.

增分微课 4 利用切线解决最值范围问题

例 1 (1) D (2) C [解析] (1) 由题得 $g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$, 当函数 $g(x) = x^2 - 2\ln x$ 的图象在点 Q 处的切线与 $f(x) = 3x - 4$ 的图象平行时, 令 $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 3$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ (舍), 所以切点为 $Q(2, 4 - 2\ln 2)$, 由点到直线的距离公式得, $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{|6 - 4 + 2\ln 2 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{|2\ln 2 - 2|}{\sqrt{10}}$, 所以 $|PQ|^2$ 的最小值为 $\frac{(2\ln 2 - 2)^2}{10} = \frac{2}{5}(1 - \ln 2)^2$.

(2) 由 $(a+1)^2 + (b-2)^2 = 1$ 可得点 (a, b) 在以 $(-1, 2)$ 为圆心, 1 为半径的圆上, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 表示点 (a, b) 与点 (x, y) 的距离的平方, 即表示圆 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上的动点到函数 $y = \ln x$ 的图象上动点距离的平方. 设 $(m, \ln m)$ 为 $y = \ln x$ 的图象上一点, 且 $y = \ln x$ 的图象在点 $(m, \ln m)$ 处的切线与点 $(m, \ln m)$ 和点 $(-1, 2)$ 的连线垂直, 由

$y = \ln x$ 得 $y' = \frac{1}{x}$, 则 $\frac{\ln m - 2}{m + 1} \cdot \frac{1}{m} = -1$, 可得 $\ln m + m^2 + m = 2$. 由 $f(x) = \ln x + x^2 + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 2$, 可得 $m = 1$, 所以切点为 $(1, 0)$, 圆心与切点的距离 $d = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 由此可得 $(x-a)^2 + (\ln x - b)^2$ 的最小值为 $(2\sqrt{2}-1)^2 = 9-4\sqrt{2}$.

变式题 $\sqrt{2}$ [解析] 因为曲线 $y = \ln(x-1)$ 是由曲线 $y = \ln x$ 向右平移 1 个单位长度得到的, 曲线 $y = e^x$ 是由曲线 $y = e^x$ 向右平移 1 个单位长度得到的, 所以 $|PQ|$ 的最小值可以看成曲线 $y = \ln x$ 上的点与曲线 $y = e^x$ 上的点间的距离的最小值. 因为 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 互为反函数, 其图象关于直线 $y = x$ 对称, 所以所求的最小值为曲线 $y = e^x$ 上的点 A 到直线 $y = x$ 的最小距离的 2 倍, 设与直线 $y = x$ 平行的直线与曲线 $y = e^x$ 相切于点 $M(x_0, e^{x_0})$, 因为 $y' = e^x$, 所以由 $e^{x_0} = 1$, 得 $x_0 = 0$, 所以切点为 $M(0, 1)$, 所以点 A 到直线 $y = x$ 的最小距离 $d = \frac{|0-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

以 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

例 2 (1)A (2)D

[解析] (1) 依题意可知, $y = f(x)$ 的图象与 $y = kx$ 的图象有两个公共点, 画出 $f(x)$ 的图象与 $y = kx$ 的图象如图所示, 由图可知, $y = kx$ 的图象与 $y = e^{-x}$ ($x \leq 0$) 的图象相切, 设切点为 (t, e^{-t}) , 因为 $(e^{-x})' = -e^{-x}$, 所以切线的斜率为 $-e^{-t}$, 所以 $-e^{-t} = \frac{e^{-t}}{t}$, 解得 $t = -1$, 则 $k = -e^{-(-1)} = -e$.

(2) $f(x) = \ln x - |x-a|$, $x \in [1, e^2]$ 的图象与 x 轴有且仅有两个交点, 等价于函数 $y = \ln x$ 与 $y = |x-a|$ 的图象在 $[1, e^2]$ 上有且仅有两个交点. 由 $y = \ln x$, 得 $y' = \frac{1}{x}$. 当直线 $y = x-a$ 与 $y = \ln x$ 的图象相切时, 有 $\frac{1}{x} = 1$, 得 $x = e$, 即切点为 (e, e) , 此时 $a = 0$; 当直线 $y = x-a$ 过点 $(e^2, 2e)$ 时, 得 $a = e^2 - 2e$. 要使函数 $y = \ln x$ 与 $y = |x-a|$ 的图象在 $[1, e^2]$ 上有且仅有两个交点, 只需 $a \in (0, e^2 - 2e]$.

变式题 (1)A (2)C [解析] (1) 由题知 $f'(x) = e^x$, 当函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象相切时, 设切点为 (x_0, e^{x_0}) ($x_0 < 1$), 则切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$, 将点 $(-2, 0)$ 的坐标代入, 可得 $x_0 = -1$, 则 $k = e^{-1} = \frac{1}{e}$. 当函数 $g(x)$ 的图象过点

$(1, e)$ 时, 可得 $k = \frac{e}{3}$. 要使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象恰有两个不同的交点, 只需 $\frac{1}{e} < k < \frac{e}{3}$.

(2) 由题意, 关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 2 个不相等的实数解, 即 $y = f(x)$ 与 $y = kx - 1$ 的图象有 2 个交点. 当 $k = 0$ 时, 直线 $y = -1$ 与 $y = \frac{2}{x}$ 的图象交于点 $(-2, -1)$, 又当 $x \geq 0$ 时, $e^x - 1 \geq 0$, 所以直线 $y = -1$ 与 $y = e^x - 1$ ($x \geq 0$) 的图象无公共点, 故当 $k = 0$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = kx - 1$ 的图象只有 1 个交点, 不符合题意; 当 $k > 0$ 时, 若直线 $y = kx - 1$ 与 $y = e^x - 1$ ($x \geq 0$) 的图象相切, 则 $y = f(x)$ 与 $y = kx - 1$ 的图象有 2 个交点, 设切点为 $(x_0, e^{x_0} - 1)$, 则 $k = e^{x_0}$, 又直线 $y = kx - 1$ 过点 $(0, -1)$, 所以 $\frac{e^{x_0} - 1 - (-1)}{x_0 - 0} =$

e^{x_0} , 解得 $x_0 = 1$, 所以 $k = e$; 当 $k < 0$ 时, 若直线 $y = kx - 1$ 与 $y = \frac{2}{x}$ ($x < 0$) 的图象相切, 则由 $\frac{2}{x} = kx - 1$, 得 $kx^2 - x - 2 = 0$, 所以 $\Delta = 1 + 8k = 0$, 可得 $k = -\frac{1}{8}$, 所以当 $-\frac{1}{8} < k < 0$ 时, 直线 $y = kx - 1$ 与 $y = f(x)$ 的图象有 2 个交点. 综上所述, 实数 k 的取值范围是 $(-\frac{1}{8}, 0) \cup \{e\}$.

增分微课 5 构造法在解决函数、导数问题中的应用

例 1 (1)B (2)C [解析] (1) 构造函数 $y = \sin x - x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $y' = \cos x - 1 < 0$, 所以函数 $y = \sin x - x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 又当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x - x < 0$, 即 $\sin x < x$, 所以 $a = \sin 0.5 < 0.5$. 因为 $2\log_{0.3} 0.5 = \log_{0.3} 0.25 > \log_{0.3} 0.3 = 1$, 且 $\log_{0.3} 0.5 < \log_{0.3} 0.3 = 1$, 所以 $0.5 < c = \log_{0.3} 0.5 < 1$, 又 $b = 3^{0.5} > 3^0 = 1$, 所以 $a < c < b$, 故选 B.

(2) 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > e$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减. $\therefore c = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, 且 $e < 3 < 4$, $\therefore f(e) > f(3) > f(4)$, 即 $\frac{\ln 4}{4} < \frac{\ln 3}{3} < \frac{\ln e}{e}$, $\therefore c < a < b$.

变式题 A [解析] 因为 $\frac{c}{b} = 4 \tan \frac{1}{4}$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x < x < \tan x$, 所以 $\tan \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$, 即 $\frac{c}{b} > 1$, 所以 $c > b$; 设 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) = -\sin x + x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(\frac{1}{4}) > f(0) = 0$, 即 $\cos \frac{1}{4} - \frac{31}{32} > 0$, 所以 $b > a$. 所以 $c > b > a$, 故选 A.

例 2 (1)B (2)D (3)ABC

[解析] (1) 构造函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 则 $g'(x) = f'(x) - 2x > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $g(1) = f(1) - 1 = 1$. 由 $f(2x) - 4x^2 - 1 > 0$ 可得 $f(2x) - (2x)^2 > 1$, 即 $g(2x) > g(1)$, 所以 $2x > 1$, 解得 $x > \frac{1}{2}$, 故选 B.

(2) 由 $xf'(x) = (1-x)f(x)$ 变形得 $\frac{f(x)-xf'(x)}{f(x)} = x$, 从而有 $\frac{f(x)-xf'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{x}{f(x)}$, 即 $[\frac{x}{f(x)}]' = \frac{x}{f(x)}$, 所以 $\frac{x}{f(x)} = k \cdot e^x$, 因为 $f(1) > 0$, 所以 $k = \frac{1}{f(1)e^1} > 0$.

则 $f(x) = \frac{x}{k \cdot e^x}$, 则 $f'(x) = \frac{ke^x - kx \cdot e^x}{k^2 e^{2x}} = \frac{k(1-x)}{k^2 e^x}$, 故当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以

$f(\frac{1}{2}) < f(1)$, $f(2) < f(1)$, 又 $f(\frac{1}{2}) - f(2) = \frac{1}{2k\sqrt{e}} - \frac{2}{ke^2} = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 4}{2ke^2}$, 而 $e^{\frac{3}{2}} > 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \approx 19.7 > 16$, 所以 $e^{\frac{3}{2}} > 4$, 所以 $f(\frac{1}{2}) > f(2)$. 综上, $f(2) < f(\frac{1}{2}) < f(1)$. 故选 D.

(3) 因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\cos x > 0$, 所以由 $f'(x) - \tan x \cdot f(x) < 0$, 得 $\cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) < 0$, 即 $[\cos x \cdot f(x)]' < 0$, 所以函数 $y = \cos x \cdot f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 因为 $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos 0 \cdot f(0) > \cos \frac{\pi}{6} \cdot f(\frac{\pi}{6}) > \cos \frac{\pi}{4} \cdot f(\frac{\pi}{4}) > \cos \frac{\pi}{3} \cdot f(\frac{\pi}{3})$, 即 $f(0) > \frac{\sqrt{3}}{2} f(\frac{\pi}{6}) > \frac{\sqrt{2}}{2} f(\frac{\pi}{4}) > \frac{1}{2} f(\frac{\pi}{3})$, 所以 $\sqrt{3} f(\frac{\pi}{6}) > \sqrt{2} f(\frac{\pi}{4})$, A 正确; $2f(0) > f(\frac{\pi}{3})$, B 正确; $\sqrt{3} f(\frac{\pi}{6}) > f(\frac{\pi}{3})$, C 正确; $\sqrt{2} f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{\pi}{3})$, D 错误. 故选 ABC.

变式题 (1)(0, +\infty) (2)A

[解析] (1) 构造函数 $F(x) = f(x) \cdot e^{2x}$, 则 $F'(x) = f'(x) \cdot e^{2x} + f(x) \cdot 2e^{2x} = e^{2x} [f'(x) + 2f(x)] > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $F(0) = f(0) \cdot e^0 = 1$. 不等式 $f(x) > \frac{1}{e^{2x}}$ 可化为 $f(x)e^{2x} > 1$, 即 $F(x) > F(0)$, 所以 $x > 0$, 所以原不等式的解集为 $(0, +\infty)$.

(2) 由题意知, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $xf'(x) - 2f(x) > 0$. 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$, 则 $g'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减. 不等式 $f(x+2024) - (x+2024)^2 f(-1) < 0$ 等价于 $\frac{f(x+2024)}{(x+2024)^2} < \frac{f(-1)}{(-1)^2}$, 即 $g(x+2024) < g(-1)$, 所以 $\begin{cases} x+2024 > -1, \\ x+2024 < 0, \end{cases}$ 解得 $-2025 < x < -2024$.

例 3 (1)C (2)B [解析] (1) $\because f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2 > 0$, $\therefore e^{x+\ln a} + \ln a > \ln(x+2) + 2$, 两边同时加上 x 得, $e^{x+\ln a} + (x+\ln a) > \ln(x+2) + (x+2) = \ln(x+2) + e^{\ln(x+2)}$. 构造函数 $g(x) = x + e^x$, 则 $g'(x) = 1 + e^x > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $\therefore x + \ln a > \ln(x+2)$, 即 $\ln a > \ln(x+2) - x$. 令 $k(x) = \ln(x+2) - x$, 则 $k'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = -\frac{x+1}{x+2}$, $\therefore k(x)$ 的定义域是 $(-2, +\infty)$, $\therefore$ 当 $x \in (-2, -1)$ 时, $k'(x) > 0$, $k(x)$ 单调递增, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $k'(x) < 0$, $k(x)$ 单调递减, $\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $k(x)$ 取得极大值, 也是最大值, $k(x)_{\max} = k(-1) = 1$, $\therefore \ln a > k(x)_{\max} = 1$, $\therefore a > e$.

(2) 由题意 $\lambda > 0$, $x > 1$, 则不等式即为 $2\lambda e^{2\lambda x} \geq \ln x$, 进而可得 $2\lambda x e^{2\lambda x} \geq$

$e^{\ln x} \ln x$. 令 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 不等式等价于 $g(2\lambda x) \geq g(\ln x)$, 因为 $\lambda > 0, x > 1$, 所以 $2\lambda x > 0, \ln x > 0$, 所以 $2\lambda x \geq \ln x$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 即 $2\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立. 设 $h(t) = \frac{\ln t}{t}$ ($t > 1$), 则 $h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, 当 $1 < t < e$ 时, $h'(t) > 0, h(t)$ 单调递增, 当 $t > e$ 时, $h'(t) < 0, h(t)$ 单调递减, 所以当 $t = e$ 时, $h(t)$ 取得最大值 $h(e) = \frac{1}{e}$, 于是 $2\lambda \geq \frac{1}{e}$, 解得 $\lambda \geq \frac{1}{2e}$.

变式题 (1) B (2) A [解析] (1) 因为 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 所以 $e^{x_2} > 1$, 由题意可得 $\frac{1}{x_1} - \ln x_1 = e^{-x_2} - x_2$, 整理可得 $\frac{1}{x_1} - \ln x_1 = \frac{1}{e^{x_2}} - \ln e^{x_2}$, 即 $f(x_1) = f(e^{x_2})$.

因为 $y = \frac{1}{x}, y = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 可得 $x_1 = e^{x_2}$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{x_2}}{x_2}$. 构造函数 $h(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x) \geq h(1) = e$, 所以 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最小值为 e .

(2) 正实数 t, m 满足 $t \ln \frac{m}{t} - me^t + t(t+1) \geq 0$, 则 $\ln \frac{m}{t} - \frac{m}{t} e^t + t + 1 \geq 0$, 所以 $\ln \frac{m}{t} + t + 1 \geq \frac{m}{t} e^t$, 即 $\ln \frac{m}{t} + t + 1 \geq e^{\ln \frac{m}{t} + t}$, 令 $\ln \frac{m}{t} + t = x$, 则 $x + 1 \geq e^x$. 设 $f(x) = e^x - (x+1)$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x) \geq f(0) = 0$, 所以 $e^x \geq x + 1$, 即 $e^{\ln \frac{m}{t} + t} \geq \ln \frac{m}{t} + t + 1$, 又因为 $\ln \frac{m}{t} + t + 1 \geq e^{\ln \frac{m}{t} + t}$, 所以 $\ln \frac{m}{t} + t + 1 = e^{\ln \frac{m}{t} + t} = 1$, 所以 $\ln \frac{m}{t} + t = 0$, 所以 $\ln \frac{m}{t} = -t$, 则 $\frac{m}{t} = e^{-t}$, 则 $m = \frac{t}{e^t}$. 令 $g(t) = \frac{t}{e^t}$ ($t > 0$), 则 $g'(t) = \frac{1-t}{e^t}$, 令 $g'(t) = 0$ 得 $t = 1$, 易知 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(t) \leq g(1) = \frac{1}{e}$, 故 m 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

第 19 讲 导数与不等式

/第 1 课时 利用导数研究恒(能)成立问题/

● 课堂考点探究

例 1-1 [思路点拨] 当 $x < 1$ 时, 由不等式 $2xe^x - ax - e^x + a \geq 0$ 恒成立, 分离参数 a , 结合函数的单调性求 a 的取值范围.

解: 当 $x < 1$ 时, 不等式 $2xe^x - ax - e^x + a \geq 0$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{e^x(2x-1)}{x-1}, x < 1$ 恒成立. 令 $f(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}, x < 1$, 则

$f'(x) = \frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2} = \frac{xe^x(2x-3)}{(x-1)^2}$, 所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = 1$, 所以实数 a

的取值范围为 $[1, +\infty)$.

例 1-2 [思路点拨] 先分离参数 m , 再利用导函数求函数的最值即可.

解: 存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \leq \frac{-x^2+mx-3}{2}$ 成立, 即存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $m \geq \frac{2x \ln x + x^2 + 3}{x} = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$

成立, 问题转化为 $m \geq \left(2 \ln x + x + \frac{3}{x}\right)_{\min}$ ($x > 0$). 令 $g(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$, 得 $g'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 4$, 则 $m \geq 4$, 故实数 m 的最小值为 4.

变式题 1 解: (1) $\because f(x) = ax + x \ln x$, $\therefore f'(x) = a + \ln x + 1$, $\therefore$ 函数 $f(x) = ax + x \ln x$ 在 $x = e$ 处取得极值, $\therefore f'(e) = a + 2 = 0$, 解得 $a = -2$, 经检验, 符合题意, $\therefore a = -2$. (2) 由 (1) 知 $f(x) = -2x + x \ln x$, 由题意知 $k < \frac{f(x)}{x+1}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 即 $k < \frac{-2x + x \ln x}{x+1}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 令 $g(x) = \frac{-2x + x \ln x}{x+1}$, 则 $g'(x) = \frac{(-2 + \ln x + 1)(x+1) - (-2x + x \ln x)}{(x+1)^2} = \frac{\ln x + x - 1}{(x+1)^2}$. 设 $h(x) = \ln x + x - 1$ ($x > 0$), 易得 $h(x)$ 是增函数, 又 $h(1) = 0$, $\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore g(x)_{\min} = g(1) = -1$, $\therefore k < -1$, 即 k 的取值范围为 $(-\infty, -1)$.

变式题 2 解: 由 $f(x) = a(x+1)e^x - ax + a - e^x < 0$, 得 $\frac{1}{a} > x + 1 - \frac{x-1}{e^x}$. 令 $h(x) = x + 1 - \frac{x-1}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{e^x + x - 2}{e^x}$. 令 $\varphi(x) = e^x + x - 2$, 则 $\varphi(x) = e^x + x - 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $\varphi(0) < 0, \varphi(1) > 0$, $\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 当 $x < x_0$ 时, $\varphi(x) < 0$, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 当 $x > x_0$ 时, $\varphi(x) > 0, h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 又 $h(0) = 2, h(1) = 2, h(-1) = 2e$, $h(2) = 3 - \frac{1}{e^2}, h(3) = 4 - \frac{2}{e^3}$. 所以当 $f(x) < 0$ 有且仅有三个整数解时, 有 $3 - \frac{1}{e^2} < \frac{1}{a} \leq 4 - \frac{2}{e^3}$, 解得 $\frac{e^3}{4e^3-2} \leq a < \frac{e^2}{3e^2-1}$, 即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{e^3}{4e^3-2}, \frac{e^2}{3e^2-1}\right)$.

例 2 [思路点拨] (1) 利用已知条件及导数的几何意义求出 a 的值, 然后利用导数研究函数的最值即可证明不等式; (2) 原不等式等价于 $(a-1) \ln x + \frac{a}{x} + x + 2 > 0$, 构造新函数分类讨论研究函数的单调性, 结合最值即可得到实数 a 的取值范围. 解: (1) 证明: 因为 $f'(x) = \frac{a-1}{x} - x + 1$ ($x > 0$), 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率 $k = f'(1) = a - 1$. 又因为切线与直线 $y = 2x$ 平行, 所以 $a - 1 = 2$, 解得 $a = 3$, 所以 $f(x) = 2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x$, $f'(x) = \frac{2}{x} - x + 1 = \frac{-x^2 + x + 2}{x} = \frac{-(x-2)(x+1)}{x}$ ($x > 0$).

由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < 2$, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$; 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > 2$, 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2, +\infty)$. 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值, 也为最大值, 且 $f(2) = 2 \ln 2 = \ln 4$, 所以 $f(x) \leq \ln 4$.

(2) 由 $f(x) + 4 > g(x)$ 得 $(a-1) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + 4 > \frac{2x-a}{x} - \frac{1}{2}x^2$, 整理得 $(a-1) \ln x + \frac{a}{x} + x + 2 > 0$.

设 $h(x) = (a-1) \ln x + \frac{a}{x} + x + 2$ ($x > 1$), 则 $h'(x) = \frac{a-1}{x} - \frac{a}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + (a-1)x - a}{x^2} = \frac{(x-1)(x+a)}{x^2}$, $h(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

① 当 $a \geq -1$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x) > h(1) = a + 3 \geq 2 > 0$, 满足题意. ② 当 $a < -1$ 时, 由 $h'(x) < 0$ 得 $1 < x < -a$, 则函数 $h(x)$ 在 $(1, -a)$ 上单调递减, 由 $h'(x) > 0$ 得 $x > -a$, 则函数 $h(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x)$ 在 $x = -a$ 处取得极小值, 也为最小值, 故 $h(x)_{\min} = h(-a) = (a-1) \ln(-a) + \frac{a}{-a} - a + 2 = (a-1) \ln(-a) - a + 1$. 依题意得 $h(x)_{\min} = (a-1) \ln(-a) - a + 1 > 0$, 可得 $\ln(-a) < 1$, 可得 $-e < a < -1$. 综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-e, +\infty)$.

变式题 解: (1) 由 $f(x) = ax - \ln(1-x)$, 得 $f'(x) = a + \frac{1}{1-x}$ ($x < 1$), 因为 $f(0) = 0, f'(0) = a + 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = (a+1)x$. (2) $f'(x) = a + \frac{1}{1-x} = \frac{-ax+a+1}{1-x}$ ($x < 1$). ① 当 $a \geq 0$ 时, $f'(-1) = -a - \ln 2 < 0$, 不符合题意. ② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1 + \frac{1}{a}$, 当 $x \in \left(-\infty, 1 + \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty, 1 + \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 当 $x \in \left(1 + \frac{1}{a}, 1\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 在区间 $\left(1 + \frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递增, 所以当 $x = 1 + \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f\left(1 + \frac{1}{a}\right) = a + 1 + \ln(-a)$. 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $a + 1 + \ln(-a) \geq 0$. 设 $\varphi(x) = x + 1 + \ln(-x)$ ($x < 0$), 则 $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $\varphi'(x) > 0, \varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $\varphi'(x) < 0, \varphi(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减, 所以 $\varphi(x) \leq \varphi(-1) = 0$, 即 $a + 1 + \ln(-a) \geq 0$ 的解为 $a = -1$. 所以 $a = -1$.

例 3 [思路点拨] (1) 利用导数研究函数 $f(x)$ 的单调性, 注意构造中间函数 $u(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 判断 $f'(x)$ 的符号, 即可求解; (2) 构造函数 $h(x) = \sin x - x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 研究其单调性, 证明 $f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 再应用导数研究函数 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值, 结合已知得到关于 a 的不等式, 即可求范围.

解:(1)因为函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 所以 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. 设 $u(x) = x \cos x - \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $u'(x) = -x \sin x < 0$, 故 $u(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 所以 $u(x) < u(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$.

(2)令 $h(x) = \sin x - x, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $h'(x) = \cos x - 1 < 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立, 即函数 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 所以 $h(x) < h(0) = 0$,

所以 $\sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 即 $f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立.

$g'(x) = \frac{1-x}{e^x} - 3(x^2 - 1) = (1-x)(\frac{1}{e^x} + 3x + 3)$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $3x + 3 + \frac{1}{e^x} > 0$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增; 当 $x \in (1, 2]$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在区间 $(1, 2]$ 上单调递减. 故函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $g(1) = \frac{1}{e} - 1 + 3 - a = \frac{1}{e} + 2 - a$. 结合题意, 只需 $\frac{1}{e} + 2 - a \geq 1$, 解得 $a \leq \frac{1}{e} + 1$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{e} + 1]$.

变式题 解:(1)存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 使得 $g(x_1) - g(x_2) \geq M$ 成立, 等价于当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ 时, $[g(x_1) - g(x_2)]_{\max} \geq M$. 由 $g(x) = x^3 - x^2 - 3$, 得 $g'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$, 在 $[0, 2]$ 上, $g'(x)$, $g(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 2)$	2
$g'(x)$	0	-	0	+	8
$g(x)$	-3	单调递减	极小值 $-\frac{85}{27}$	单调递增	1

由上表可知, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $g(x)_{\min} = g(\frac{2}{3}) = -\frac{85}{27}$, $g(x)_{\max} = g(2) = 1$, 故 $[g(x_1) - g(x_2)]_{\max} = g(x)_{\max} - g(x)_{\min} = \frac{112}{27}$, 所以满足条件的最大整数 $M = 4$.

(2)方法一: 由(1)知, 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上, $g(x)$ 的最大值为 $g(2) = 1$.

因为对任意的 $s, t \in [\frac{1}{2}, 2]$, 都有 $f(s) \geq g(t)$ 成立, 所以当 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, $f(x) = \frac{a}{x} + x \ln x \geq 1$ 恒成立, 等价于 $a \geq x - x^2 \ln x$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上恒成立.

记 $h(x) = x - x^2 \ln x, x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 则 $h'(x) = 1 - 2x \ln x - x$, 且 $h'(1) = 0$.

记 $m(x) = 1 - 2x \ln x - x, x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 则 $m'(x) = -3 - 2 \ln x$, 因为 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 所以 $m'(x) = -3 - 2 \ln x < 0$, 所以 $m(x) = h'(x) = 1 - 2x \ln x - x$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递减, 又 $h'(1) = 0$, 所以当 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $h'(x) < 0$, 故函数 $h(x) = x - x^2 \ln x$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, 2]$ 上单调递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$, 即实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

方法二: 由(1)知, 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上, $g(x)$ 的最大值为 $g(2) = 1$.

因为对任意的 $s, t \in [\frac{1}{2}, 2]$, 都有 $f(s) \geq g(t)$ 成立, 所以 $f(1) = a \geq 1$. 下面证明: 当 $a \geq 1$ 时, 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上, 函数 $f(x) \geq 1$ 恒成立. 当 $a \geq 1$ 且 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, $f(x) = \frac{a}{x} + x \ln x \geq \frac{1}{x} + x \ln x$.

记 $h(x) = \frac{1}{x} + x \ln x, x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 则 $h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$, 且 $h'(1) = 0$, $h'(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递增, 当 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1 < 0$, 当 $x \in (1, 2]$ 时, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1 > 0$, 所以函数 $h(x) = \frac{1}{x} + x \ln x$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, 2]$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 1$, 即 $h(x) \geq 1$, 所以当 $a \geq 1$ 且 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 故对任意的 $s, t \in [\frac{1}{2}, 2]$, 都有 $f(s) \geq g(t)$ 成立, 所以实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

培优专题(一) 必要性探路法之端点效应、极点效应、特殊点效应

例1 解: 方法一(端点效应+分类讨论): 由题知, $f'(x) = -a \ln(x+1) + \frac{1-ax}{x+1} - 1$, 令 $g(x) = -a \ln(x+1) + \frac{1-ax}{x+1} - 1$, 则 $g'(x) = \frac{-a}{x+1} + \frac{-a(x+1) - (1-ax)}{(x+1)^2} = \frac{-a(x+1) - a - 1}{(x+1)^2}$, 令 $g'(0) = 0$, 则 $a = -\frac{1}{2}$. 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $x \geq 0$ 时, $-a(x+1) - a - 1 \geq -a - a - 1 = -2a - 1 \geq 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(0) = 0$, 从而 $f'(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $f(0) = 0$, $\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 故当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, 满足题意; 当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) < 0$ 恒成立, $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq g(0) =$

0, 即 $f'(x) \leq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq f(0) = 0$, 不满足题意; 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = -2 - \frac{1}{a} > 0$, 则 $g(x)$ 在 $[0, -2 - \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(-2 - \frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f'(0) = 0$, $\therefore$ 当 $0 < x < -2 - \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x)$ 单调递减, 而 $f(0) = 0$, $\therefore f(x) \geq 0$ 不恒成立, 不满足题意. 综上可得 a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

方法二(巧妙变形+分类讨论+数形结合): 由题知当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = (1-ax) \ln(x+1) - x \geq 0$, 显然, 当 $x=0$ 时不等式成立. 以下考虑当 $x > 0$ 时的情况: 将 $(1-ax) \ln(x+1) - x \geq 0$ 变形为 $1 - ax \geq \frac{x}{\ln(x+1)}$, 令 $m(x) = \frac{x}{\ln(x+1)} (x >$

0), 则 $m'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}$, 令 $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} (x > 0)$, 则

$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore h(x) > h(0) = 0$, 从而 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $m(x) \rightarrow +\infty$. 当 $a \geq 0$ 时, 数形结合可知,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $1 - ax \geq \frac{x}{\ln(x+1)}$ 不恒成立, 不满足题意. 当 $a < 0$ 时, 将不等式变形为 $\ln(x+1) \geq \frac{x}{1-ax}$ (此时 $1 - ax > 0$), 令 $n(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{ax-1}$

($x > 0$), 则 $n'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(ax-1)^2} = \frac{a^2 x^2 - (2a+1)x}{(x+1)(ax-1)^2} = \frac{x[a^2 x - (2a+1)]}{(x+1)(ax-1)^2}$, 当 $\frac{2a+1}{a^2} \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $n'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $n(x) > n(0) = 0$, 满足题意; 当 $\frac{2a+1}{a^2} > 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时,

$n(x)$ 在 $(0, \frac{2a+1}{a^2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{2a+1}{a^2}, +\infty)$ 上单调递增, 而 $n(0) = 0$, $\therefore n(x) \geq 0$ 不恒成立, 故不满足题意. 综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

【自测题】

解:(1)当 $a = -\frac{3}{2}$ 时, $f(x) = -\frac{3}{2}x - \ln x - \frac{1}{2x}$, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = \frac{-3x^2 - 2x + 1}{2x^2} = \frac{(-3x+1)(x+1)}{2x^2}$, 令 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{3}$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $x > \frac{1}{3}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处取得极大值, 极大值为 $f(\frac{1}{3}) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{3} - \frac{3}{2} =$

$-2+\ln 3$, 无最小值.

(2) 当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $ax - \ln x - \frac{1}{2x} \geq 0$

恒成立, 令 $g(x) = ax - \ln x - \frac{1}{2x}, x \geq 1$,

则 $g(1) \geq 0$, 故 $a - \frac{1}{2} \geq 0$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$.

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = ax - \ln x - \frac{1}{2x} \geq$

$\frac{1}{2}x - \ln x - \frac{1}{2x}$. 令 $t(x) = \frac{1}{2}x - \ln x -$

$\frac{1}{2x}, x \geq 1$, 则 $t'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} =$

$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2} = \frac{(x-1)^2}{2x^2} \geq 0$,

故 $t(x) = \frac{1}{2}x - \ln x - \frac{1}{2x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上

单调递增, 故 $t(x) \geq t(1) = 0$, 故 $ax -$

$\ln x - \frac{1}{2x} \geq 0$, 满足要求. 当 $a < \frac{1}{2}$ 时,

$g(1) = a - \frac{1}{2} < 0$, 不合要求.

综上, a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

例 2 解: 由题意知 $f'(x) = ae^{x-1} - 1$. 注意到 $f(1) = a - 1 - (a - 1) = 0$, 则当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 同时取得极小值, 所以 $f'(1) = a - 1 = 0$, 所以 $a = 1$. 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^{x-1} - x$, $f'(x) = e^{x-1} - 1$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 此时 $f(x) > f(1) = 0$. 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 此时 $f(x) > f(1) = 0$. 故 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $a = 1$.

【自测题】

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 设 $g(x) = ax - a - \ln x$, 则 $f(x) = xg(x), f(x) \geq 0$ 等价于 $g(x) \geq 0$.

因为 $g(x) \geq 0, g(1) = 0$, 所以当 $x = 1$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最小值, 同时也是函数 $g(x)$ 的极小值, 所以 $g'(1) = 0$.

又 $g'(x) = a - \frac{1}{x}$, 则 $g'(1) = a - 1 = 0$,

得 $a = 1$. 若 $a = 1$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. 当

$0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增.

所以 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 故 $g(x) \geq g(1) = 0$. 综上, $a = 1$.

例 3 解: 令 $f(x) = ae^x + \frac{a+1}{x} - 2a - 2$, 由

$f(1) = ae + a + 1 - 2a - 2 \geq 0$ 成立, 得到

对任意的 $x > 0, f(x) \geq 0$ 恒成立的一个

必要条件为 $a \geq \frac{1}{e-1}$. 当 $a = \frac{1}{e-1}$ 时,

$f(x) = \frac{1}{e-1}e^x + \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{e-1} -$

$2 = \frac{1}{e-1}\left(e^x + \frac{e}{x} - 2e\right)$, 易证 $e^x \geq ex$ 恒

成立, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 故当 $x >$

0 时, $e^x + \frac{e}{x} - 2e \geq ex + \frac{e}{x} - 2e \geq$

$2\sqrt{ex \cdot \frac{e}{x}} - 2e = 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时

两个等号同时成立, 故当 $a = \frac{1}{e-1}$ 时, 对

任意的 $x > 0, f(x) \geq 0$ 恒成立, 所以正数

a 的最小值为 $\frac{1}{e-1}$.

【自测题】

解: $f(x) \geq 1 - \sin x$, 即 $ae^x - 2x +$

$\sin x \geq 1$. 令 $x = 0$, 则 $a \geq 1$. 下面证明: 当

$a = 1$ 时, $e^x - 2x + \sin x \geq 1$ 恒成立.

设 $g(x) = e^x - 2x + \sin x$, 则 $g'(x) =$

$e^x - 2 + \cos x$. 当 $x = 0$ 时, $g'(0) = 0$. 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x$, 故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $g'(x) > g'(0) = 0$, 故 $g(x) > g(0) = 1$. 当 $x < 0$ 时, $e^x > 1 + x$, 故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 此时 $g'(x) > g'(0) = 0$, 故 $g(x) > g(0) = 1$. 综上, $g(x) \geq 1$ 恒成立. 当 $a \geq 1$ 时, $\therefore ae^x - 2x + \sin x \geq e^x - 2x + \sin x$, $\therefore ae^x - 2x + \sin x \geq 1$ 恒成立, 故实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

第 2 课时 利用导数证明不等式/

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 对 $f(x)$ 求导得

$f'(x) = \frac{(2x+1)(ax+1)}{x}$, 分 $a \geq 0$ 和

$a < 0$ 两种情况讨论 $f(x)$ 的单调性即可;

(2) 要证 $f(x) \leq -\frac{2}{a} - 2 + a$, 只需证

$f(x)_{\max} \leq -\frac{2}{a} - 2 + a$, 结合 (1) 的结论

得, 即证 $\ln\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} + 1 \leq 0$ 恒成立,

令 $t = -\frac{1}{a} > 0, g(t) = \ln t - t + 1 (t >$

$0)$, 利用导数求出 $g(t)$ 的最大值即可

得证. 解: (1) $f(x) = \ln x + ax^2 + (a+2)x + a$,

其定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} +$

$2ax + a + 2 = \frac{2ax^2 + (a+2)x + 1}{x} =$

$\frac{(2x+1)(ax+1)}{x} (x > 0)$.

① 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0,$

$+\infty)$ 上单调递增.

② 当 $a < 0$ 时, 若 $x \in \left(0, -\frac{1}{a}\right)$, 则

$f'(x) > 0, f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递

增; 若 $x \in \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$, 则 $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

综上, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递增; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$ 上

单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2) 证明: 当 $a < 0$ 时, 要证 $f(x) \leq$

$-\frac{2}{a} - 2 + a$, 只需证 $f(x)_{\max} \leq -\frac{2}{a} -$

$2 + a$, 由 (1) 得, $f(x)_{\max} = f\left(-\frac{1}{a}\right) =$

$\ln\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} - \frac{a+2}{a} + a = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) -$

$\frac{1}{a} + a - 1$, 即证 $\ln\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} + 1 \leq 0$ 恒

成立. 令 $t = -\frac{1}{a} > 0, g(t) = \ln t - t + 1$

$(t > 0)$, 则 $g'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$,

当 $t \in (0, 1)$ 时, $g'(t) > 0, g(t)$ 单调递增,

当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $g'(t) < 0, g(t)$ 单调递

减, $\therefore g(t)$ 的最大值为 $g(1) = 0$, 即

$g(t) \leq 0, \therefore \ln\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} + 1 \leq 0$ 恒成

立, 原命题得证.

变式题 解: (1) 函数 $f(x) = \cos x + x \sin x$,

$x \in (-\pi, \pi)$, 求导得 $f'(x) = -\sin x +$

$\sin x + x \cos x = x \cos x$,

当 $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单

调递增; 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

单调递增区间为 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

(2) 证明: 当 $x \in [0, \pi)$ 时, 令 $F(x) = e^x +$

$e^{-x} - 2(\cos x + x \sin x)$, 求导得 $F'(x) =$

$e^x - e^{-x} - 2x \cos x \geq e^x - e^{-x} - 2x$,

令 $\varphi(x) = e^x - e^{-x} - 2x, x \in [0, \pi)$, 求导

得 $\varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} -$

$2 = 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立,

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上单调递增, 则

$\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 故 $F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$

在 $[0, \pi)$ 上单调递增, 所以 $F(x) \geq$

$F(0) = 0$, 所以 $2f(x) \leq e^x + e^{-x}$.

例 2 [思路点拨] (1) 求导, 分类讨论 a 与

0 的关系, 判断导函数的符号, 从而得出原

函数的单调区间; (2) 利用主元思想, 根据

题设条件 $a \leq 2$ 将问题转化成证明当 $x >$

1 时, $e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x > 0$ 恒成立即可.

解: (1) 由题可得, $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$+\infty)$, $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{ax-1}{x} < 0$ 恒成立,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a > 0$

时, 若 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, 则 $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增, 若 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$, 则

$f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减

区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为

$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$.

(2) 证明: 当 $a \leq 2$, 且 $x > 1$ 时, $e^{x-1} -$

$f(x) = e^{x-1} - a(x-1) + \ln x - 1 \geq$

$e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x$, 令 $g(x) = e^{x-1} -$

$2x + 1 + \ln x (x > 1)$, 要证 $e^{x-1} > f(x)$ 恒

成立, 只需证 $g(x) > 0$ 恒成立. 易知

$g'(x) = e^{x-1} - 2 + \frac{1}{x} (x > 1)$, 令 $h(x) =$

$g'(x)$, 则 $h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2} (x > 1)$.

显然 $h'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则

$h'(x) > h'(1) = e^0 - 1 = 0$, 即 $g'(x) =$

$h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g'(x) >$

$g'(1) = e^0 - 2 + 1 = 0$, 即 $g(x)$ 在 $(1,$

$+\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) > g(1) = e^0 -$

$2 + 1 + \ln 1 = 0$, 得证.

变式题 解: (1) $f'(x) = (ax^2 + 4ax + 2a +$

$1)e^x$, 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = e^x > 0$ 恒成立.

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 + 4ax + 2a + 1 = 0$

的判别式 $\Delta = 4a(2a-1)$, 可得当 $a > \frac{1}{2}$

时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty, -\frac{2a-\sqrt{2a^2-a}}{a}\right), \left(\frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(\frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a}, \frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a}\right)$.

当 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无单调递减区间.

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a}, \frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a}\right)$, 单调递减区间为 $\left(-\infty, \frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a}\right), \left(\frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a}, +\infty\right)$.

(2) 证明: $f(x) = (ax^2 + 2ax + 1)e^x - 2 =$

$[(x^2+2x)e^x]a+e^x-2$. 当 $x \geq 0$ 时, 令 $g(a) = [(x^2+2x)e^x]a+e^x-2, a \leq -\frac{1}{7}$, 则 $g(a)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{7}]$ 上单调递增, 故 $g(a) \leq g(-\frac{1}{7}) = -\frac{1}{7}(x^2+2x)e^x+e^x-2$. 当 $x \geq 0$ 时, 要证 $f(x) < 0$, 只需证 $-\frac{1}{7}(x^2+2x)e^x+e^x-2 < 0$,

即证 $(x^2+2x-7)e^x+14 > 0$. 设 $h(x) = (x^2+2x-7)e^x+14, x \geq 0$, 则 $h'(x) = (x^2+4x-5)e^x = (x-1)(x+5)e^x$, 当 $x \in [0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 所以当 $x \geq 0$ 时, $h(x) \geq h(1) = 14 - 4e > 0$, 即当 $x \geq 0$ 时, $f(x) < 0$. 故原不等式得证.

例 3 [思路点拨] (1) 根据导数的运算和导数的几何意义即可求得结果; (2) 由 (1) 可得 $f(x)$ 的解析式, 对要证的不等式进行变形, 构造两个函数, 分别利用导函数求出两函数在定义域内的最值, 进而得证. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x}e^x - \frac{b}{x^2}e^{x-1} + \frac{b}{x}e^{x-1}$. 由题意可得 $f(1) = b = 2$, $f'(1) = ae - b + b = e$, 故 $a = 1, b = 2$.

(2) 证明: 由 (1) 知, $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x}e^{x-1}$, 又 $x > 0$, 故 $f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$. 设函数 $g(x) =$

$x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$. 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x) = xe^{-x} - \frac{2}{e}, x > 0$, 则 $h'(x) = e^{-x}(1-x)$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $h(x)$ 的最大值为 $h(1) = -\frac{1}{e}$. 综上, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x)$, 即 $f(x) > 1$.

变式题 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore f'(x) = \frac{e}{x} - a = \frac{e-ax}{x^2} (x > 0)$, $\therefore$ 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{e}{a}$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{e}{a}$, 即函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{e}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{e}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{e}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{e}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明: 要证 $f(x) - \frac{e^x}{x} + 2e \leq 0$, 只需证明 $f(x) \leq \frac{e^x}{x} - 2e$.

由 (1) 知, 当 $a = e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = -e$.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 2e (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, $\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增, $\therefore g(x)_{\min} = g(1) = -e$, $\therefore$ 当 $a = e$ 时, $f(x) - \frac{e^x}{x} + 2e \leq 0$.

/第 3 课时 放缩法证明不等式/

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 先证明不等式 $e^x \geq x+1$, 再证明不等式 $x+1 \geq \ln(x+2)$, 进而可证 $f(x) \geq \ln(x+2)$.

证明: 设 $g(x) = f(x) - (x+1) = e^x - x - 1 (x > -2)$, 则 $g'(x) = e^x - 1$. 当 $-2 < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq x+1$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号).

设 $h(x) = x+1 - \ln(x+2) (x > -2)$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$, 当 $-2 < x < -1$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > -1$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(-1) = 0$, 所以 $x+1 \geq \ln(x+2)$ (当且仅当 $x=-1$ 时取等号).

因为 $f(x) \geq x+1$ 与 $x+1 \geq \ln(x+2)$ 的等号不能同时取到, 所以当 $x > -2$ 时, $f(x) > \ln(x+2)$.

变式题 证明: 构造函数 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$, 令 $g'(x) > 0$, 得 $x > 0$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $x < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $g(x) \geq g(0) = 0$, 则 $e^x \geq x+1$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号).

构造函数 $h(x) = \ln x - x + 1, x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, x > 0$, 令 $h'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, 令 $h'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 则 $\ln x \leq x-1$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号). 因为 $a \geq \frac{1}{e}$, 所以 $ae^x = e^{x+\ln a} \geq x +$

$\ln a + 1 \geq x + \ln \frac{1}{e} + 1 = x$, 又 $\ln x + 1 \leq x - 1 + 1 = x$, 所以 $ae^x \geq \ln x + 1$, 当且仅当 $a = \frac{1}{e}, x = 1$ 时等号成立, 所以当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

例 2 [思路点拨] (1) 利用导数研究函数 $f(x)$ 的单调性, 进而可求得最大值; (2) 由 (1) 得到 $\ln(x+1) \leq x(x+1)$, 令 $x = \frac{1}{n}$, 得到 $\ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{n+1}{n^2}$, 进而证明.

解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} - 1 = \frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$. 令 $g(x) = 1-x^2-\ln x, x > 0$, 则 $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(1) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = -1$.

(2) 证明: 由 (1) 知 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x \leq -1$, 即 $\ln x \leq x(x-1)$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立, 即 $\ln(x+1) \leq x(x+1)$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

令 $x = \frac{1}{n}, \therefore n \in \mathbf{N}^*, \therefore \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) < \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right) = \frac{n+1}{n^2}$, 即 $\ln \frac{n+1}{n} < \frac{n+1}{n^2}$,

$\therefore \frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2} > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$, 即

$\ln(n+1) < \frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2}, n \in \mathbf{N}^*$.

变式题 解: (1) 当 $a=0$ 时, $f(x) = e^x - x, f'(x) = e^x - 1$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$. 所以函数 $f(x)$ 在 $[-e, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, e]$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $[-e, e]$ 上的最小值为 $f(0) = e^0 - 0 = 1$. 易知 $f(e) = e^e - e > f(-e) = e^{-e} + e = \frac{1}{e^e} + e$, 则函数 $f(x)$

在 $[-e, e]$ 上的最大值为 $f(e) = e^e - e$. (2) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $e^x \geq (a+1)x$ 恒成立. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 可得 $a \leq \frac{e^x}{x} - 1$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$. 令 $g'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得最小值 $g(1) = e - 1$, 所以 $a \in (-\infty, e-1]$. 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, 若 $a \geq -1$, 则 $e^x \geq (a+1)x$ 恒成立; 若 $a < -1$, 取 $x = \frac{1}{a+1} < 0$, 则 $e^{\frac{1}{a+1}} < 1$, 不满足题意, 所以 $a \geq -1$.

综上, a 的取值范围为 $[-1, e-1]$. (3) 证明: 在 (2) 中, 令 $a = e-1$, 可知对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $e^x \geq ex$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 两边同时取对数得 $x \geq 1 + \ln x$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 故 $\ln x \leq x-1$, 可得 $\ln(x+1) \leq x$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号, 所以 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) < \frac{1}{n}$.

即 $\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$,

即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

例 3 [思路点拨] (1) 对函数 $g(x)$ 求导, 根据切线斜率为 2, 求出切点坐标, 进而得到切线方程, 即可证明; (2) 先证明 $g(x) \leq 2x+2$, 再利用放缩法证明 $f(x) + \pi > 2x+2$ 即可.

证明: (1) 由 $g(x) = \ln x + x + 3$, 得 $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$. 设切点坐标为 $(x_0, g(x_0))$, 由 $\frac{1}{x_0} + 1 = 2$, 得 $x_0 = 1$, 所以 $g(x_0) = 4$, 则切点坐标为 $(1, 4)$, 则切线方程为 $y-4 = 2(x-1)$, 即 $y = 2x+2$, 所以直线 $y = 2x+2$ 是曲线 $y = g(x)$ 的一条切线.

(2) 令 $h(x) = g(x) - (2x+2) = \ln x - x + 1 (x \in (0, \frac{\pi}{2}])$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$,

$h(x)$ 单调递增, 当 $x \in (1, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 即 $g(x) \leq 2x+2 (x \in (0, \frac{\pi}{2}])$. 要证 $f(x) + \pi > g(x)$,

只需证 $f(x) + \pi > 2x+2$, 即证 $2x \sin x + \pi > 2x+2$. 令 $m(x) = x - \sin x$, 则 $m'(x) = 1 - \cos x > 0$ 在 $(0,$

$\frac{\pi}{2}$ 上恒成立,所以 $m(x)=x-\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $m(x) > m(0)=0$, 即 $x > \sin x$, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $2x \sin x > 2 \sin^2 x$, 故只需证明当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $2 \sin^2 x + \pi \geq 2x + 2$.
令 $F(x) = 2 \sin^2 x - 2x + \pi - 2$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$), 则 $F'(x) = 4 \sin x \cos x - 2 = 2 \sin 2x - 2 \leq 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $F(x) \geq F(\frac{\pi}{2}) = 2 \times 1^2 - 2 \times \frac{\pi}{2} + \pi - 2 = 0$, 即 $2 \sin^2 x + \pi \geq 2x + 2$. 综上, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) + \pi > g(x)$.

变式题 证明: (1) 令 $g(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, 则 $g'(x) = -\sin x + x$, 令 $k(x) = g'(x)$, 则 $k'(x) = -\cos x + 1 \geq 0$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 故 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) \geq g'(0) = 0$, 故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \geq g(0) = 0$, 即当 $x \geq 0$ 时, $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$.

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 由 (1) 得 $x \geq \sin x$, 且 $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$. 对于 $a \geq 1$, $x \in [0, +\infty)$, 要证 $xe^{ax} + x \cos x + 1 \geq (1 + \sin x)^2$, 只需证 $xe^x + x(1 - \frac{1}{2}x^2) + 1 \geq (1 + x)^2$, 即证 $xe^x - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x \geq 0$. 当 $x = 0$ 时, 显然成立; 当 $x > 0$ 时, 即证 $e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \geq 0$. 令 $h(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, $x > 0$, 则

$h'(x) = e^x - x - 1$. 令 $\varphi(x) = h'(x)$, $x > 0$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 故 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x > 0$ 时, $h'(x) > h'(0) = 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 > 0$.

综上, 当 $a \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq (1 + \sin x)^2$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立.

第20讲 利用导数研究函数的零点

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 结合 $f'(\frac{1}{4}) < 0$, $f'(1) > 0$, 得到存在 $x_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 进而求得 $f(x)$ 的单调性, 结合函数零点存在定理, 即可求解.
解: 由题可得, $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 因为 $y = \frac{1}{4}e^x$ 和 $y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增, 所以 $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} - 1 < 0$, $f'(1) = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2} > 0$, 所以存在 $x_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $f(\frac{1}{100}) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{100}} - \frac{1}{10} > 0$,

$f(1) = \frac{e}{4} - 1 < 0$, $f(4) = \frac{1}{4}e^4 - 2 > 0$,

所以 $f(x)$ 有两个零点.

变式题 (1)C (2)2 [解析] (1) $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$, 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 又 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $f(\pi) = -2 < 0$, 故函数 $f(x)$ 的零点个数为 2.

(2) 令 $f(x) = e^x - |x+1| = 0$, 得 $e^x = |x+1|$, 画出 $y = e^x$ 与 $y = |x+1|$ 的图象如图所示, 当 $x > -1$ 时, $y = |x+1| = x+1$. 因为 $(e^x)' = e^x$, 所以 $y = e^x$ 的图象在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = e^0(x - 0)$, 即 $y = x + 1$, 所以由图可知 $y = e^x$ 与 $y = |x+1|$ 的图象有两个交点, 即 $f(x)$ 有两个零点.

例2 [思路点拨] 函数 $f(x)$ 的零点, 即方程 $a = \frac{2 \ln x}{x^2}$ 的解, 设 $g(x) = \frac{2 \ln x}{x^2}$, 利用导数研究函数 $g(x)$ 的性质, 讨论 a , 结合图象确定函数 $f(x)$ 的零点个数.

解: 由 $f(x) = 0$, 得 $a = \frac{2 \ln x}{x^2}$, 令 $g(x) = \frac{2 \ln x}{x^2}$, $x \in [1, e^2]$, 则 $g'(x) = \frac{2-4 \ln x}{x^3}$, 由

$g'(x) > 0$ 得 $1 \leq x < \sqrt{e}$, 由 $g'(x) < 0$, 得 $\sqrt{e} < x \leq e^2$, 所以 $g(x)$ 在区间 $[1, \sqrt{e}]$ 上单调递增, 在区间 $[\sqrt{e}, e^2]$ 上单调递减,

又 $g(1) = 0$, $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{e}$, $g(e^2) = \frac{4}{e^3}$, 所以函数 $g(x)$ 的图象如图所示, 由图可知, 当 $0 \leq a < \frac{4}{e^3}$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上有 1 个零点; 当 $\frac{4}{e^3} \leq a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在

$[1, e^2]$ 上有 2 个零点; 当 $a < 0$ 或 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上没有零点.

变式题 解: 由题得 $f'(x) = ae^{ax} - 1$. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e^a - 1 \leq 0$, 此时 $f(x)$ 存在一个零点.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$ 得 $x < -\frac{\ln a}{a}$, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > -\frac{\ln a}{a}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\ln a}{a})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{\ln a}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 的最小值为

$f(-\frac{\ln a}{a}) = \frac{1 + \ln a}{a}$. 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0, 此时 $f(x)$ 有一个零点.

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的最小值大于 0, 此时

$f(x)$ 没有零点. 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 的最小值小于 0, $f(-1) = e^{-a} + 1 > 0$,

$f(-\frac{\ln a}{a}) = \frac{1 + \ln a}{a} < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 此时 $f(x)$ 有两个零点.

综上, 当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有一个零点; 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 有两个零点;

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 没有零点.

例3 [思路点拨] (1) 由导数确定函数的单调性, 求其最大值即可得解;

(2) 求导得 $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$, 按照 $a \leq 0$, $0 < a < 1$ 及 $a > 1$ 分类并结合导数讨论函数的单调性, 求得函数的极值, 分析其零点即可得解.

解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$, $x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -1$.

(2) $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1) \ln x$, $x > 0$, 则 $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$.

当 $a \leq 0$ 时, $ax - 1 < 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = a - 1 < 0$, 此时函数无零点, 不合题意. 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, \frac{1}{a})$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

取 $0 < a < \frac{1}{e}$, 则 $f(\frac{e}{a^2}) = \frac{e}{a} - \frac{a^2}{e} - a - 1 + 2(a+1) \ln a > e^2 - \frac{1}{e^3} - \frac{3}{e} - 3 > 0$, 又 $f(1) = a - 1 < 0$, 所以 $f(x)$ 仅在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上有一个零点, 符合题意.

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 又 $f(1) = a - 1 = 0$, 所以 $f(x)$ 恰有一个零点, 符合题意.

当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 则当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{1}{a}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 此时 $f(1) = a - 1 > 0$,

由 (1) 得当 $0 < x < 1$ 时, $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$, 则 $\ln \sqrt{x} > 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $\ln x > 2(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})$,

此时 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1) \ln x < ax - \frac{1}{x} - 2(a+1)(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) < -\frac{1}{x} + \frac{2(a+1)}{\sqrt{x}}$ ($0 < x < 1$), 存在 $n = \frac{1}{4(a+1)^2} <$

$\frac{1}{a}$, 使得 $f(n) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$

上有一个零点, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上无零点,

所以 $f(x)$ 恰有一个零点, 符合题意.

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

例 4 [思路点拨] (1) 求得函数的导函数, 利用导函数的正负与函数的单调性的关系即可得到函数的单调区间.

(2) 思路一: 将曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点等价转化为方程 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$ 有两个不同的实数根, 即曲线

$y=m(x)$ 与直线 $y=\frac{\ln a}{a}$ 有两个交点, 利用导函数研究 $g(x)$ 的单调性, 并结合

$g(x)$ 的正负、零点和极限值分析 $g(x)$ 的

图象, 进而得到 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$, 然后得到 a

的取值范围. 思路二: 将已知转化为 $f(x)=1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根, 转化

化为函数 $g(x)=\ln x$ 与 $y=\frac{x \ln a}{a}$ 的图象

有两个交点, 分类讨论得到 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=\frac{x^2}{2^x}$, 则 $f'(x)=\frac{2x \cdot 2^x - x^2 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{x(2-x \ln 2)}{2^x}$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{\ln 2}$, 当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$

时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \frac{2}{\ln 2}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{2}{\ln 2})$, 单调递减区间是 $(\frac{2}{\ln 2}, +\infty)$.

(2) 方法一: 由 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1$, 得 $a^x = x^a$, 可得 $x \ln a = a \ln x$, 即 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$, 设

函数 $m(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $m'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个

交点等价于曲线 $y=m(x)$ 与直线 $y=\frac{\ln a}{a}$

有两个交点, 令 $m'(x)=0$, 得 $x=e$,

所以当 $x \in (0, e)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单

调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$,

$m(x)$ 单调递减. 所以 $m(x)_{\max} = m(e) = \frac{1}{e}$, 又 $m(1)=0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $m(x) \rightarrow$

0 , 所以结合 $m(x)$ 的图象可得 $0 < \frac{\ln a}{a} <$

$\frac{1}{e}$, 解得 $1 < a < e$ 或 $a > e$.

所以 a 的取值范围是 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

方法二: 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且

仅有两个交点等价于 $\frac{x^a}{a^x}=1$ 在区间 $(0,$

$+\infty)$ 上有两个不等实根. 因为 $x^a = a^x$,

所以两边取对数得 $a \ln x = x \ln a$, 即

$\ln x = \frac{x \ln a}{a}$, 则问题等价于 $g(x)=\ln x$

与 $y=\frac{x \ln a}{a}$ 的图象有且仅有两个交点.

① 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{\ln a}{a} < 0$, 直线 $y =$

$\frac{x \ln a}{a}$ 与 $g(x)$ 的图象只有一个交点, 不符

合题意.

② 当 $a > 1$ 时, 取 $g(x)=\ln x$ 的图象上一点 $(x_0, \ln x_0)$, 因为 $g'(x)=\frac{1}{x}$, 所以

$g'(x_0)=\frac{1}{x_0}$, 曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_0,$

$\ln x_0)$ 处的切线方程为 $y - \ln x_0 =$

$\frac{1}{x_0}(x-x_0)$, 即 $y=\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$. 当直

线 $y=\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$ 与直线 $y=\frac{x \ln a}{a}$ 为

同一直线时, $\begin{cases} \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{x_0}, \\ \ln x_0 - 1 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{e}, \\ x_0 = e. \end{cases}$

直线 $y=\frac{x \ln a}{a}$ 的斜率满足当 $0 < \frac{\ln a}{a} <$

$\frac{1}{e}$ 时, $g(x)=\ln x$ 与 $y=\frac{x \ln a}{a}$ 的图象有

且仅有两个交点.

记 $h(a)=\frac{\ln a}{a}$ ($a > 1$), 则 $h'(a) =$

$\frac{1-\ln a}{a^2}$, 令 $h'(a)=0$, 得 $a=e$. 当 $a \in (1,$

$e)$ 时, $h'(a) > 0$, $h(a)$ 在区间 $(1, e)$ 上单

调递增; 当 $a \in (e, +\infty)$ 时, $h'(a) < 0$, $h(a)$

在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 当 $a=e$ 时,

$h(a)$ 取得最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$, 所以当 $a > 1$

且 $a \neq e$ 时, 有 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$. 综上所述,

实数 a 的取值范围为 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

变式题 解: (1) 当 $a \neq 0, b=0$ 时, $f(x) =$

$ax e^{ax}$, $f'(x) = a e^{ax} + a^2 x e^{ax} =$

$e^{ax}(a^2 x + a)$, 当 $x < -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 单调递减, 当 $x > -\frac{1}{a}$ 时, $f'(x) >$

0 , $f(x)$ 单调递增, $\therefore f(x)$ 极小值 $=$

$f(-\frac{1}{a}) = -\frac{1}{e}$, $f(x)$ 无极大值.

(2) 当 $a=0$ 时, $g(x)=b e^{(b-1)x} - \ln x -$

x , 当 $x \in (1, e^2]$ 时, 令 $g(x)=0$, 得

$b e^{(b-1)x} = \ln x + x$, 即 $b e^{bx} = e^x (\ln x +$

$x)$, 即 $b x e^{bx} = x e^x (\ln x + x)$, 即 $b x e^{bx} =$

$e^{x+\ln x} (\ln x + x)$.

$\because x \in (1, e^2]$, $\therefore \ln x + x > 0$, $\therefore b > 0$.

令 $h(x)=x e^x$, 则 $h(bx)=h(x+\ln x)$,

$\therefore h'(x)=(x+1)e^x > 0$ 在 $(1, e^2]$ 上恒成

立, $\therefore h(x)$ 在 $(1, e^2]$ 上单调递增,

$\therefore b x = x + \ln x$, $\therefore b = 1 + \frac{\ln x}{x}$, $\therefore b - 1 =$

$\frac{\ln x}{x}$. 令 $u(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (1, e^2]$, 则

$u'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $x \in (1, e)$ 时,

$u'(x) > 0$, $u(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, e^2]$

时, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 单调递减.

又 $u(1)=0$, $u(e)=\frac{1}{e}$, $u(e^2)=\frac{2}{e^2}$,

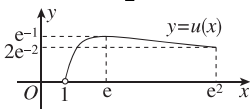
$\therefore y=u(x)$ 的大致图象如图所示.

由图可知, 要使 $b e^{(b-1)x} = \ln x + x$ 在 $(1,$

$e^2]$ 上有两个不同的根, 只需 $\frac{2}{e^2} \leq b - 1 <$

$\frac{1}{e}$, 即 $\frac{2}{e^2} + 1 \leq b < \frac{1}{e} + 1$,

$\therefore b$ 的取值范围为 $[\frac{2}{e^2} + 1, \frac{1}{e} + 1)$.



培优专题(二) 隐零点问题

例 1 解: (1) 由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$+\infty)$, $f'(x) = 2x - (a-2) - \frac{a}{x} =$

$\frac{2x^2 - (a-2)x - a}{x}$, 即 $f'(x) = \frac{(x+1)(2x-a)}{x}$.

(i) 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 在定义域 $(0,$

$+\infty)$ 上恒成立, 此时函数 $f(x)$ 在 $(0,$

$+\infty)$ 上单调递增;

(ii) 若 $a > 0$, 则令 $f'(x) > 0$, 得 $2x - a >$

0 , 解得 $x > \frac{a}{2}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $2x - a <$

0 , 可得 $0 < x < \frac{a}{2}$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$

上单调递减, 在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单

调递减, 在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明: 当 $a=1$ 时, $f(x)=x^2+x-\ln x$, 要证 $f(x)+e^x > x^2+x+2$, 只需证

$e^x - \ln x - 2 > 0$.

令 $g(x)=e^x - \ln x - 2$, 则 $g'(x)=e^x -$

$\frac{1}{x}$, 易知 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

令 $g'(x)=e^x - \frac{1}{x}=0$, 即 $e^x = \frac{1}{x}$, 可得

方程有唯一解, 设为 x_0 , 且 $x_0 \neq 1$,

所以 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$. 当 x 变化时, $g'(x)$ 与

$g(x)$ 的变化情况如下,

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 =$

$\frac{1}{x_0} + x_0 - 2$, 因为 $x_0 > 0$ 且 $x_0 \neq 1$, 所以

$\frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0$, 即

$g(x)_{\min} > 0$, 所以 $e^x - \ln x - 2 > 0$ 恒成

立, 得证.

【自测题】

解: (1) 当 $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时, $f(x) = x e^{x-1} - x -$

$\ln x$, $x > 0$, 则 $f'(x) = (x+1)e^{x-1} - 1 -$

$\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} (x e^{x-1} - 1)$. 设 $g(x) =$

$x e^{x-1} - 1$, $x > 0$, 则 $g'(x) = (x+1)e^{x-1} > 0$ 恒成立, 又 $g(1) = e^0 - 1 = 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单

调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 的单调递减区

间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) $f'(x) = a^2(x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

$(a^2 x e^x - 1)$, 设 $h(x) = a^2 x e^x - 1$, $x > 0$,

则 $h'(x) = a^2(x+1)e^x > 0$, 所以 $h(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(0) = -1 < 0$,

$h(\frac{1}{a^2}) = e^{\frac{1}{a^2}} - 1 > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0,$

$\frac{1}{a^2})$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $a^2 x_0 e^{x_0} - 1 = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递

减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$

单调递增, 当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取得极小

值, 也是最小值, 所以 $f(x) \geq f(x_0) =$

$a^2 x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 = 1 - \ln(x_0 e^{x_0}) =$

$1 + 2 \ln a$, 所以 $1 + 2 \ln a \geq 2 - a$, 即 $a +$

$2 \ln a - 1 \geq 0$, 设 $F(a) = a + 2 \ln a - 1$, 易

$\frac{1}{2}$), 使得 $m(x_0)=0$, 即 $e^{x_0}+3x_0-3=0$, 当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.
 $\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0-1-\frac{3x_0}{e^{x_0}}=x_0-1-\frac{3x_0}{3-3x_0}=x_0-1+\frac{x_0}{x_0-1}=x_0-1+\frac{1}{x_0-1}+1$. $\therefore x_0 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\therefore x_0-1 \in (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$,
 $\therefore h(x_0) \in (-\frac{3}{2}, -\frac{13}{12})$.

$\therefore k < h(x_0)$, $\therefore$ 整数 k 的最大值为 -2 .

【自测题】

解: (1) $\because f(x) = (a-1)x + x \ln x$, $\therefore f'(x) = \ln x + a$. $\because$ 函数 $f(x) = (a-1)x + x \ln x$ 的图象在点 $A(e^2, f(e^2))$ 处的切线斜率为 4 , $\therefore f'(e^2) = 4$, 即 $a + \ln e^2 = 4$, 故 $a = 2$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x + x \ln x$.
 $\because m(x-1) < f(x) + 1$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, $\therefore m < \frac{f(x)+1}{x-1} = \frac{x+x \ln x+1}{x-1}$ 对任意 $x > 1$ 恒成立. 令 $g(x) = \frac{x+x \ln x+1}{x-1}$, $x > 1$, 则 $g'(x) = \frac{(\ln x+2)(x-1)-(x+x \ln x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-\ln x-3}{(x-1)^2}$. 令 $u(x) = x - \ln x - 3$, $x > 1$, 则 $u'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $\therefore x > 1$, $\therefore u'(x) > 0$, $\therefore u(x) = x - \ln x - 3$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore u(4) = 1 - \ln 4 < 0$, $u(5) = 2 - \ln 5 > 0$, $\therefore$ 存在 $x_0 \in (4, 5)$, 使得 $u(x_0) = x_0 - \ln x_0 - 3 = 0$, 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增. $\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0+x_0 \ln x_0+1}{x_0-1} = \frac{x_0+x_0(x_0-3)+1}{x_0-1} = x_0-1$, 故 $m < x_0-1$.

$\therefore x_0 \in (4, 5)$, $\therefore x_0-1 \in (3, 4)$, 又 $m \in \mathbf{Z}$, $\therefore m$ 的最大值为 3 .

例 3 解: (1) 因为 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, 所以 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $\frac{1}{e}$, $f(x)$ 无极小值.

(2) 证明: 令 $h(x) = xg(x) + 2 - e^x f(x) + \frac{2}{x} = x \ln x + 2 - x + \frac{2}{x}$ ($x > 0$), 则 $h'(x) = \ln x - \frac{2}{x^2}$ ($x > 0$),
 令 $r(x) = \ln x - \frac{2}{x^2}$ ($x > 0$), 则 $r'(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $r(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $r(1) = \ln 1 - \frac{2}{1^2} = -2 < 0$, $r(e) = \ln e - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{2}{e^2} > 0$, 所以存在 $x_0 \in (1, e)$, 使得 $r(x_0) = 0$, 即 $\ln x_0 = \frac{2}{x_0^2}$ ($x_0 \in (1, e)$), 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $r(x) < 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $r(x) > 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 故 $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 \ln x_0 + 2 - x_0 + \frac{2}{x_0} = x_0 \cdot \frac{2}{x_0^2} + 2 - x_0 + \frac{2}{x_0} = 2 - x_0 + \frac{4}{x_0}$

($x_0 \in (1, e)$), 令 $m(x) = 2 - x + \frac{4}{x}$ ($x \in (1, e)$), 则 $m'(x) = -1 - \frac{4}{x^2} < 0$ 在 $(1, e)$ 上恒成立, 所以 $m(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 所以 $m(x) > m(e) = 2 - e + \frac{4}{e} > 0$, 所以 $h(x)_{\min} = h(x_0) = 2 - x_0 + \frac{4}{x_0} > 0$, 所以 $xg(x) + 2 > e^x f(x) - \frac{2}{x}$.

【自测题】

解: (1) 当 $a = e$ 时, $f(x) = e^x - \ln x + 1$, $\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $\therefore$ 切线的斜率 $k = f'(1) = e - 1$. $\because f(1) = e + 1$, $\therefore$ 切点坐标为 $(1, e+1)$, $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - e - 1 = (e - 1)(x - 1)$, 即 $y = (e - 1)x + 2$, $\therefore$ 切线与坐标轴交点的坐标分别为 $(0, 2)$, $(\frac{-2}{e-1}, 0)$, $\therefore$ 所求三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \left| \frac{-2}{e-1} \right| = \frac{2}{e-1}$.

(2) $\because f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$, $\therefore f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$ ($x > 0$). 设 $g(x) = f'(x)$, $x > 0$, 则 $g'(x) = ae^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 $a = 1$ 时, $f'(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1$, $\therefore f(x) \geq 1$ 恒成立. 当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, $\therefore e^{\frac{1}{a}-1} < 1$, $\therefore f'(\frac{1}{a}) = ae^{\frac{1}{a}-1} - a = a(e^{\frac{1}{a}-1} - 1) < 0$, $\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (\frac{1}{a}, 1)$, 使得 $f'(x_0) = ae^{x_0-1} - \frac{1}{x_0} = 0$, 即 $ae^{x_0-1} = \frac{1}{x_0}$, $\therefore \ln a + x_0 - 1 = -\ln x_0$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) = ae^{x_0-1} - \ln x_0 + \ln a = \frac{1}{x_0} + \ln a + x_0 - 1 + \ln a > 2 \ln a - 1 + 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} = 2 \ln a + 1 > 1$, $\therefore f(x) \geq 1$ 恒成立.

当 $0 < a < 1$ 时, $f(1) = a + \ln a < a < 1$, $\therefore f(x) \geq 1$ 不恒成立, 不合题意. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

第 21 讲 双变量不等式的证明

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 由条件可得 $x_2 = -x_1$, $m = x_1 x_2 + 4$, 由此可得要证 $f(-x_1) - 2x_1 + f(x_2) > 0$, 只需证 $(2+x_2) \ln(x_2+2) - \frac{x_2}{2} > 0$, 利用导数研究函数 $g(x) = (2+x) \ln(x+2) - \frac{x}{2}$ ($0 < x < 2$) 的单调性, 由此完成证明.

证明: 因为函数 $f(x) = m \ln(x+2) + \frac{x^2}{2} - 2x$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, +\infty)$, $f'(x) = \frac{m}{x+2} + x - 2 = \frac{x^2 + (m-4)}{x+2}$ ($x > -2$). 因为 $f'(x) = 0$ 的两根为 x_1, x_2 且 $-2 < x_1 < x_2$, 所以 $-4 < m-4 < 0$, 即 $0 < m < 4$, 其中 $x_1 = -\sqrt{4-m} > -2$, $x_2 = \sqrt{4-m}$, 所以 $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = m-4$ 且 $x_2 \in (0, 2)$, 则 $x_2 = -x_1$, $m = x_1 x_2 + 4$, 所以 $f(-x_1) = f(x_2)$, $m =$

$x_1 x_2 + 4 = 4 - x_2^2$. 要证 $f(-x_1) - 2x_1 + f(x_2) > 0$, 只需证 $2f(x_2) - 2x_1 > 0$, 只需证 $f(x_2) + x_2 > 0$, 即证 $m \ln(x_2+2) + \frac{x_2^2}{2} - x_2 > 0$, 即证 $(4-x_2^2) \ln(x_2+2) + \frac{x_2^2}{2} - x_2 > 0$, 即证 $(2+x_2) \ln(x_2+2) - \frac{x_2}{2} > 0$. 令 $g(x) = (2+x) \ln(x+2) - \frac{x}{2}$ ($0 < x < 2$), 则 $g'(x) = \ln(x+2) + \frac{1}{2} > \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 且 $g(0) = 2 \ln 2 > 0$, 故 $g(x) > g(0) > 0$, 所以 $f(-x_1) - 2x_1 + f(x_2) > 0$.

变式题 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{2}x^2 - x$, $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{x^2}{x+1}$. 因为 $x > -1$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明: 由题意得 $f'(x) = \frac{a}{x+1} + x - 1 = \frac{x^2 - 1 + a}{x+1}$. 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 不合题意. 当 $a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x^2 = 1 - a$. 当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{1-a}$, 则 $f(x)$ 只有一个极值点, 不合题意. 当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\sqrt{1-a}$, $x_2 = \sqrt{1-a}$, 则 $x_1 x_2 = a - 1$, $x_1 + x_2 = 0$, 故 $a = x_1 x_2 + 1 = 1 - x_2^2$. 要证 $f(x_2) > \frac{x_1}{2}$, 即证 $a \ln(1+x_2) + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 > \frac{x_1}{2}$, 即证 $2a \ln(1+x_2) + x_2^2 - 2x_2 - x_1 > 0$, 即证 $2(1-x_2^2) \ln(1+x_2) + x_2^2 - x_2 > 0$, 又 $x_2 = \sqrt{1-a} \in (0, 1)$, 所以要证 $f(x_2) > \frac{x_1}{2}$, 即证 $\ln(1+x_2) - \frac{x_2}{2(1+x_2)} > 0$. 构造函数 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{2(1+x)}$, $x \in (0, 1)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{4(x+1)^2} = \frac{2x+1}{2(1+x)^2} > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则 $g(x) > g(0) = 0$, 所以 $f(x_2) > \frac{x_1}{2}$.

例 2 [思路点拨] 原不等式可化为 $e^{\frac{a-b}{2}} - e^{\frac{b-a}{2}} \leq \frac{1}{6}(a-b)(e^{\frac{a-b}{2}} + e^{\frac{b-a}{2}} + 4)$, 换元, 令 $t = e^{\frac{a-b}{2}} > 1$, 原不等式可化为 $\ln t \geq \frac{3(t^2-1)}{t^2+4t+1}$, 构造函数 $h(x) = \ln x - \frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ($x > 1$), 利用导数讨论其单调性, 即可得证.

证明: 因为 $a > b$, 所以 $\frac{e^a - e^b}{a-b} \leq \frac{1}{6}(e^a + e^b + 4e^{\frac{a+b}{2}})$ 等价于 $e^{\frac{a-b}{2}} - e^{\frac{b-a}{2}} \leq \frac{1}{6}(a-b)(e^{\frac{a-b}{2}} + e^{\frac{b-a}{2}} + 4)$, 令 $t = e^{\frac{a-b}{2}} > 1$, 则不等式等价于 $t - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{3} \left(t + \frac{1}{t} + 3 \left(t - \frac{1}{t} \right) \right)$, 故只需证 $\ln t \geq \frac{3(t^2-1)}{t^2+4t+1}$, 设 $h(x) = \ln x - \frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$

$(x>1)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{6x(x^2+4x+1)-3(x^2-1)(2x+4)}{(x^2+4x+1)^2} = \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{(x^2+4x+1)^2} = \frac{(x-1)^4}{(x^2+4x+1)^2} > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(x) > h(1) = 0$, 故 $\frac{e^a - e^b}{a-b} \leq \frac{1}{6}(e^a + e^b + 4e^{\frac{a+b}{2}})$.

变式题 证明: $\because F(x) = \ln x - x + \frac{2}{x} (x > 0)$, $\therefore F'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \frac{2}{x^2}$, 令 $F'(x_1) = 0$, $\therefore F'(x_2) = m$, 得 $\begin{cases} \frac{2}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1 + m = 0, \\ \frac{2}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} + 1 + m = 0, \end{cases}$
 $\therefore \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 为方程 $2t^2 - t + 1 + m = 0$ 的两根, $\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$, 即 $2(x_1 + x_2) =$

$x_1 x_2$, $\therefore x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2) > 4\sqrt{x_1 x_2}$,
 $\therefore x_1 x_2 > 16$, $\therefore F(x_1) + F(x_2) = (\ln x_1 - x_1 + \frac{2}{x_1}) + (\ln x_2 - x_2 + \frac{2}{x_2}) = (\ln x_1 + \ln x_2) - (x_1 + x_2) + (\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}) = \ln(x_1 x_2) - \frac{x_1 x_2}{2} + 1$, 令 $t = x_1 x_2 > 16$, 则 $\ln(x_1 x_2) - \frac{x_1 x_2}{2} + 1 = \ln t - \frac{t}{2} + 1$,
令 $h(t) = \ln t - \frac{t}{2} + 1 (t > 16)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < 0$, $\therefore h(t)$ 在 $(16, +\infty)$ 上单调递减,
 $\therefore h(t) < h(16) = \ln 16 - 7 = 4\ln 2 - 7$,
即 $F(x_1) + F(x_2) < 4\ln 2 - 7$.

例 3 [思路点拨] 可以把 a 看成参数, b 看作主元变量, 构造函数证明即可.
证明: 设函数 $g(x) = f(a) + f(x) - f(a+x) + (a+x)\ln 2 (a > 0)$, 则 $g'(x) = f'(x) - f'(a+x) + \ln 2 =$

$(1 + \ln x) - [1 + \ln(a+x)] + \ln 2 = \ln \frac{2x}{a+x}$, 令 $g'(x) > 0$ 得 $x > a$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < a$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) \geq g(a) = f(a) + f(a) - f(2a) + 2a\ln 2 = 2a\ln a - 2a\ln(2a) + 2a\ln 2 = 0$, 所以 $f(a) + f(b) - f(a+b) + (a+b)\ln 2 \geq 0$, 即 $f(a) + f(b) \geq f(a+b) - (a+b)\ln 2$.

变式题 证明: 令 $h(x) = f(x) - bx + g(b) - f(0) - g(0) (x > 0)$, 则 $h'(x) = e^x - (b+1)$, 所以当 $x > \ln(b+1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $0 < x < \ln(b+1)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减. 故 $h(x) \geq h[\ln(b+1)] = f[\ln(b+1)] + g(b) - f(0) - g(0) - b\ln(b+1) = (b+k)\ln(b+k) - (b+1)\ln(b+1) - k\ln k$. 令 $t(x) = (x+k)\ln(x+k) - (x+1)\ln(x+1) - k\ln k (x > 0)$, 则 $t'(x) = \ln(x+k) - \ln(x+1)$, 当 $k \geq 1$ 时, $t'(x) \geq 0$, $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $t(x) \geq t(0) = 0$, 即 $h(x) \geq 0$, 即 $f(x) - bx + g(b) - f(0) - g(0) \geq 0$, 所以 $f(a) + g(b) \geq f(0) + g(0) + ab$.

第四单元 三角函数、解三角形

第 22 讲 任意角和弧度制、三角函数的概念

● 课基基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) 端点 (2) 正角 负角 象限角
 (3) $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

2. (1) 半径长 (2) $|\alpha| r - \frac{1}{2} |\alpha| r^2$

3. (2) $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}$

【对点演练】

1. ①④ [解析] 锐角一定是第一象限角, ①正确; 终边相同的角不一定相等, ②错误; 小于 90° 的角除锐角外还有零角、负角, ③错误; 钝角一定是第二象限角, ④正确. 故填 ①④.

2. $\frac{2\pi}{3}$ [解析] 与角 $-\frac{4\pi}{3}$ 终边相同的角是 $2k\pi + (-\frac{4\pi}{3}) (k \in \mathbb{Z})$, 令 $k=1$, 可得与角 $-\frac{4\pi}{3}$ 终边相同的角是 $\frac{2\pi}{3}$.

3. $\frac{3\sqrt{5}-10}{5}$ [解析] 由已知得 $r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, 所以 $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{-1} = -2$, 所以 $\frac{3}{\sqrt{5}} - 2 = \frac{3\sqrt{5}-10}{5}$.

4. -4π [解析] 时钟的分针顺时针旋转, 所得的角为负角, 又考试时间为 120 分钟, 所以从考试开始到结束, 时钟的分针旋转了 -4π 弧度.

5. 1 或 4 [解析] 设扇形的半径为 r , 圆心角为 $\alpha (\alpha > 0)$, 则扇形的弧长 $l = r\alpha$, 由题得 $\begin{cases} 2r + r\alpha = 6, \\ \frac{1}{2} r^2 \alpha = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} r=2, \\ \alpha=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r=1, \\ \alpha=4 \end{cases}$, 所以扇形的圆心角的弧度数为 1 或 4.

6. $\cos \theta$ [解析] $\because \sin \theta < 0, \tan \theta < 0, \therefore \theta$ 是第四象限角, $\therefore \cos \theta > 0, \therefore |\sin \theta - \cos \theta| + \sin \theta = -\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta = \cos \theta$.

● 课堂考点探究

- 例 1** (1) BCD (2) B [解析] (1) 与 -835° 终边相同的角可表示为 $\alpha = -835^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$, 当 $k=1$ 时, $\alpha = -475^\circ$; 当 $k=2$ 时, $\alpha = -115^\circ$; 当 $k=3$ 时, $\alpha = 245^\circ$; 当 $k=4$ 时, $\alpha = 605^\circ$. 故选 BCD.
 (2) 终边落在阴影部分(包括边界)的角 α 满足 $\frac{5\pi}{6} + k\pi \leq \alpha \leq (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即终

边落在阴影部分(包括边界)的角 α 的集合是 $\left\{ \alpha \mid \frac{5\pi}{6} + k\pi \leq \alpha \leq (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

故选 B.

变式题 (1) AB (2) 135° (或 -225°)

[解析] (1) 因为 α 的终边与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称, 而 α 是第二象限角, 所以 $-\alpha$ 是第三象限角, 所以 $\pi - \alpha$ 是第一象限角, 故 A 正确; 因为 α 是第二象限角, 所以 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以

$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角, 故 B 正确; 因为 α 是第二象限角, 所以 $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ 是第一象限角, 故

C 错误; 因为 α 是第二象限角, 所以 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\pi + 4k\pi < 2\alpha < 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以 2α 的终边可能在 y 轴负半轴上, 故 D 错误. 故选 AB.

(2) $\because -2025^\circ = -6 \times 360^\circ + 135^\circ, \therefore$ 在 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 角 -2025° 的终边与角 135° 的终边相同. $\therefore -2025^\circ = -5 \times 360^\circ - 225^\circ, \therefore$ 在 $-360^\circ \sim 360^\circ$ 范围内与角 -2025° 终边相同的另一个角是 -225° .

- 例 2** [思路点拨] (1) 由弧长公式即可得出弧长, 弓形的面积等于扇形的面积减去三角形的面积; (2) 由周长为定值得出弧长 l 和半径 R 的关系, 再把扇形的面积用 R 表示出来, 运用函数的知识求解即可. 解: 设扇形的弧长为 l .

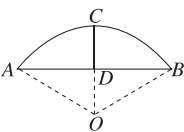
(1) 由 $\alpha = \frac{\pi}{3}, R = 10$, 得 $l = \frac{\pi}{3} \times 10 = \frac{10\pi}{3}$, $S = \frac{1}{2} \times \frac{10\pi}{3} \times 10 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 = \frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}$.

(2) 易知 $l + 2R = 20$, 则 $l = 20 - 2R (0 < R < 10)$, $\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} (20 - 2R) \cdot R = -R^2 + 10R = -(R - 5)^2 + 25$, $\therefore$ 当 $R = 5$ 时, $S_{\text{扇形}}$ 取得最大值 25, 此时 $l = 10, \alpha = \frac{l}{R} = 2$. 因此当 $\alpha = 2$ 时, 这个扇形的面积最大.

变式题 (1) D (2) C

[解析] (1) 如图, 由

题意得 $AB = 2\sqrt{3}CD$, A 弧田面积 $S = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3}CD \cdot CD + CD^2) = 4\sqrt{3} + 2$, 可得 $CD = 2$. 设圆的半径为 r , 则有 $AO^2 =$



$AD^2 + OD^2$, 即 $r^2 = (2\sqrt{3})^2 + (r-2)^2$, 解得 $r = 4, \therefore OD = 2$, 则在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $\angle AOD = \frac{\pi}{3}, \therefore \angle AOB = \frac{2\pi}{3}, \therefore$ 所求弧

长为 $4 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$. 故选 D.

(2) 显然 $\triangle AOB$ 为等腰三角形, $OA = \frac{1}{2}AB$, $OB = 5, AB = 8$, 则 $\cos \angle OAB = \frac{OA}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin \angle OAB = \frac{3}{5}$, 即 $\angle OAB \approx 37^\circ$, 于

是 $\angle AOB \approx 106^\circ = \frac{53\pi}{90}$, 所以横身的面积近似为 $\frac{1}{2} \angle AOB \cdot (OA^2 - OD^2) \approx \frac{1}{2} \times \frac{53\pi}{90} \times (5^2 - 3^2) \approx 14.8 (\text{cm}^2)$. 故选 C.

例 3 [思路点拨] (1) 对于 A 选项, 利用三角函数的定义计算即可; 对于 B, C 选项, 先判断角 α 的终边所过的点, 再用三角函数的定义求解; 对于 D 选项, 利用定义求出三角函数值, 再判断点所在象限. (2) 首先由角 β 的终边与单位圆的交点得出 $\cos \beta$, 进而求出角 α 的终边与单位圆的交点 $P(x, y)$, 可得 $\cos \alpha$ 的值, 由点 $(\frac{1}{2}, m)$ 在单位圆上, 得 m 的值, 进而得

$\sin \beta$ 的值, 即可求出 $\cos \alpha \sin \beta$ 的值.
 (1) ACD (2) $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$ [解析] (1) 因为角 θ 的终边经过点 $(2, -\sqrt{3})$, 所以 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{21}}{7}$, 故 A 正确; 因为 θ 与 α 的终边关于原点对称, 所以角 α 的终边经过点 $(-2, \sqrt{3})$, 所以 α 为第二象限角, 但不一定为钝角, 故 B 错误; $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$, 故 C 正确; 因为 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0, \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7} > 0$, 所以点 $(\tan \theta, \sin \alpha)$ 在第二象限, 故 D 正确. 故选 ACD.

(2) 由角 β 的终边与单位圆交于点 $(\frac{1}{2}, m)$, 得 $\cos \beta = \frac{1}{2}$, 又 $\sin \alpha \cos \beta < 0$, 所以 $\sin \alpha < 0$, 因为角 α 的终边落在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上, 所以角 α 只能是第三象限角. 记 P 为角 α 的终边与单位圆的交点, 设

$P(x, y) (x < 0, y < 0)$, 则 $x^2 + y^2 = 1$, 又 $y = \sqrt{3}x$, 所以 $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. 因为点 $(\frac{1}{2}, m)$ 在单位圆上, 所以 $(\frac{1}{2})^2 + m^2 = 1$, 解得 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\sin \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\cos \alpha \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

变式题 $\pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$ [解析] 在角 θ 的终边所在的直线 $y = -2x$ 上任取一点 $P(a, -2a) (a \neq 0)$, 则 $|OP| = \sqrt{5}|a|$ (O 为坐标原点), 由三角函数的定义知 $\sin \theta = \frac{-2a}{\sqrt{5}|a|}$, $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{5}|a|}$. 当 $a > 0$ 时, $2\sin \theta + \cos \theta = 2 \times \frac{-2a}{\sqrt{5}a} + \frac{a}{\sqrt{5}a} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$; 当 $a < 0$ 时, $2\sin \theta + \cos \theta = 2 \times \frac{-2a}{-\sqrt{5}a} + \frac{a}{-\sqrt{5}a} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例 4 [思路点拨] (1) 根据三角函数确定横坐标和纵坐标的正负即可求解. (2) 由题可知 α 为第四象限角, 由此可得角 α 的三角函数值的正负, 再依次判断各选项的正负即可.

(1) D (2) BD [解析] (1) 因为 α 是第二象限角, 所以 $0 < \sin \alpha < 1, -1 < \cos \alpha < 0$, 所以 $\cos(\sin \alpha) > 0, \sin(\cos \alpha) < 0$, 所以点 $(\cos(\sin \alpha), \sin(\cos \alpha))$ 在第四象限, 故选 D.

(2) 因为角 α 的终边经过点 $P(1, m) (m < 0)$, 所以 α 为第四象限角, 则 $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0$, 所以 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的正负无法判断, $\cos \alpha - \sin \alpha > 0, \sin \alpha \cos \alpha < 0, \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} > 0$. 故选 BD.

变式题 (1) D (2) BC

[解析] (1) $\because -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \therefore -\pi + 4k\pi < 2\alpha < 4k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故 $\sin 2\alpha < 0$.

(2) 因为 $\sin \alpha > 0, \tan \alpha < 0$, 所以 α 为第二象限角, $\cos \alpha < 0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故 A 错误; 因为 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角, 故 B 正确; $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha < 0$, 故 C 正确; 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故 D 错误. 故选 BC.

第 23 讲 同角三角函数的基本关系式与诱导公式

● 课基基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$

2. $-\sin \alpha \tan \alpha$

【对点演练】

1. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{3}$ [解析] $\because \sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 为第二象限角, $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{3}{5}, \therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$.

2. $\frac{5}{4}$ [解析] 原式 $= \frac{3\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 2} =$

$$\frac{3 \times 2 - 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

3. $-\frac{3}{5}$ [解析] $\because \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}, \therefore \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

4. $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ [解析] 因为 $\tan \alpha = k, \alpha$ 为钝角, 所以 $k < 0, \sin \alpha > 0$, 且 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = k$ ①, 又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ②, 所以由 ① ② 可得 $\sin \alpha = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

5. $\sin \alpha$ [解析] 原式 $= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$.

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ [解析] $\because \tan \alpha = \sqrt{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi, \therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}, \therefore \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{1}{2} - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 思路一: 根据条件设出角 θ 终边上一点 P 的坐标为 $(2, 1)$, 进而利用三角函数的定义求出 $\sin \theta, \cos \theta$ 即可得结果; 思路二: 根据商数关系与平方关系求 $\sin \theta$ 与 $\cos \theta$, 进而可得结果; 思路三: 根据条件得到 $(\sin \theta - \cos \theta)^2$ 的值, 缩小角 θ 的范围, 进而得到 $\sin \theta$ 与 $\cos \theta$ 的大小关系, 即可求解. (2) 利用平方关系式, 把分子、分母中的 1 代换为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ 整理化简即可.

(1) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) 1 [解析] (1) 方法一: 因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$, 所以可设 θ

终边上一点 P 的坐标为 $(2, 1)$, 则 $|OP| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ (O 为坐标原点), 所以 $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

方法二: 因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$, 所

$$\text{以 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{2}, \\ \cos \theta = \frac{2}{2}, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

方法三: $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - \frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1 - \frac{2\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{5}$, 因为

$\tan \theta = \frac{1}{2} < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 所以 $\sin \theta < \cos \theta$, 所以 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$(2) \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{1 - 2\sin^2 \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 1.$$

变式题 (1) A (2) 0 [解析] (1) 由三角函数的定义, 得 $\tan \alpha = \frac{3}{2\sin \alpha}$, 所以

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{2\sin \alpha}, \text{ 则 } 2(1 - \cos^2 \alpha) = 3\cos \alpha, \text{ 所以 } (2\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 2) = 0, \text{ 则}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

(2) $\because \cos \alpha = -\frac{5}{13} < 0$ 且 $\cos \alpha \neq -1, \therefore \alpha$ 是第二或第三象限角.

① 若 α 是第二象限角, 则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}, \text{ 此时}$$

$$13\sin \alpha + 5\tan \alpha = 13 \times \frac{12}{13} + 5 \times (-\frac{12}{5}) = 0.$$

② 若 α 是第三象限角, 则 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (-\frac{5}{13})^2} = -\frac{12}{13}$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}, \text{ 此时 } 13\sin \alpha +$$

$$5\tan \alpha = 13 \times (-\frac{12}{13}) + 5 \times \frac{12}{5} = 0. \text{ 综上, } 13\sin \alpha + 5\tan \alpha = 0.$$

例 2 [思路点拨] (1) 利用同角三角函数关系将原式化为关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的齐次式, 再利用同角公式化为关于 $\tan \alpha$ 的表达式

求解即可. (2) ① 将 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{3\sin \alpha - \cos \alpha} = 2$ 利用同角公式化为关于 $\tan \alpha$ 的表达式, 求出 $\tan \alpha$, 进而得到 $\tan(\pi - \alpha)$; ② 将 $\sin \alpha \cos \alpha$ 化为 $\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, 再化为关于 $\tan \alpha$ 的表达式求解.

(1) D (2) ① $-\frac{3}{5}$ ② $\frac{15}{34}$

[解析] (1) 因为 $\tan \alpha = 3$, 所以 $\frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha}{\sin \alpha} =$

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{10}, \text{ 故选 D.}$$

(2) ① 由 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{3\sin \alpha - \cos \alpha} = 2$, 得 $\frac{\tan \alpha + 1}{3\tan \alpha - 1} = 2$, 解得 $\tan \alpha = \frac{3}{5}$, 所以 $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha = -\frac{3}{5}$.

$$\text{② } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{15}{34}.$$

变式题 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) $-\frac{5}{3} - \frac{13}{5}$

[解析] (1) 因为 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\frac{1 - 3\sin \alpha \cos \alpha}{\tan^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha}{2^2} = -4$.

$$\tan^2 \alpha + 1 - 3\tan \alpha = 2^2 + 1 - 3 \times 2 = -4.$$

(2) 由 $\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - 1} = -1$ 得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以

$$\frac{\sin \alpha - 3\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 3}{\tan \alpha + 1} = -\frac{5}{3}, \sin^2 \alpha +$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + 2 = \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} + 2 =$$

$$\frac{(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2 + 1} + 2 = \frac{13}{5}.$$

例 3 [思路点拨] 根据同角三角函数关系结合角的范围判断即可.

ABD [解析] $\because \alpha \in (0, \pi), \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}, \therefore (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 +$

$$2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{25}, \text{ 解得 } \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$-\frac{12}{25}, \text{ 故 B 正确; } \because \alpha \in (0, \pi), \sin \alpha \cos \alpha =$$

$-\frac{12}{25} < 0, \therefore \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \cos \alpha < 0$, 故 A 正确, C 错误; 由 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 可知, $\cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 且 $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{12}{25}\right) = \frac{49}{25}$, 可得 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{7}{5}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 (1) D (2) $\frac{17}{13}$ [解析] (1) 由题意可得 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{25}$, 整理得 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} > 0$, 又 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$, 所以 $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$, 因为 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{25}$, 所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, 所以 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{7}{5}} = \frac{12}{35}$. 故选 D.

(2) $\because 0 < \theta < \pi, \sin \theta \cos \theta = -\frac{60}{169} < 0$, $\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \sin \theta - \cos \theta > 0$, $\therefore \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = \sqrt{1 - 2\sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 - 2 \times \left(-\frac{60}{169}\right)} = \sqrt{\frac{289}{169}} = \frac{17}{13}$.

例 4 [思路点拨] (1) 由已知利用诱导公式对分子、分母进行化简, 进而求目标式的值. (2) 由已知利用诱导公式求 $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right), \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值, 进而求目标式的值.

(1) -1 (2) $-\frac{4}{3}$ [解析] (1) 原式 = $\frac{-\tan \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) \cdot [-\sin(\pi + \alpha)]} = \frac{\tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{-\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -1$. (2) $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}, \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}$, 所以原式 = $-\frac{4}{3}$.

变式题 (1) D (2) $\cos \alpha$ [解析] (1) 因为角 α 为第三象限角, 所以 $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$. 对于 A, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha > 0$; 对于 B, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha > 0$; 对于 C, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha > 0$; 对于 D, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha < 0$. 故选 D.

(2) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \tan(90^\circ - \alpha)}{\sin(270^\circ + \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)}}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{-\cos \alpha} = \cos \alpha$.

例 5 [思路点拨] (1) 运用诱导公式和 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 化简即可; (2) $\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, 再化为关于 $\tan \alpha$ 的式子求解即可; (3) 令 $\alpha =$

$\frac{\pi}{6} = \theta$, 则 $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$, 则有 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, 用诱导公式可得 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$, 再用同角关系式联立即可求解.

解: (1) $f(\alpha) = \frac{(-\cos \alpha) \sin \alpha \tan^2 \alpha}{\sin \alpha (-\sin \alpha)} = \frac{(-\cos \alpha) \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$. (2) 由 (1) 得 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 3\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4 - 6}{4 + 1} = -\frac{2}{5}$.

(3) 由 (1) 得 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 3$, 令 $\alpha - \frac{\pi}{6} = \theta$, 则 $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{1}{\tan \theta} = 3$, 所以 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$, 又 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{3}$, 所以 $\cos \theta = -3\sin \theta$, 代入 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, 得 $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$. 当 $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 时, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}$; 当 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. 综上, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

变式题 (1) D (2) 18 [解析] (1) 由诱导公式可得, $\sin \alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) = -2\cos \alpha$, 所以 $\tan \alpha = -2$, 所以 $2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan^2 \alpha - \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{10}{5} = 2$.

(2) 由 $\sin(3\pi + \theta) = \frac{1}{3}$, 可得 $\sin \theta = -\frac{1}{3}, \therefore \frac{\cos(\pi + \theta)}{\cos \theta [\cos(\pi - \theta) - 1]} + \frac{\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \cos(\theta - \pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)}{\cos \theta (-\cos \theta - 1) - \cos^2 \theta + \cos \theta} = \frac{-\cos \theta}{\cos \theta (-\cos \theta - 1) - \cos^2 \theta + \cos \theta} = \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} = 18$.

第 24 讲 和、差、倍角的正弦、余弦和正切公式

● 课前基础巩固

[知识聚焦]

- (1) $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ (2) $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ (3) $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
- $\sin(\alpha + \varphi)$
- (1) $2\sin \alpha \cos \alpha$ (2) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $2\cos^2 \alpha - 1$ $1 - 2\sin^2 \alpha$ (3) $\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

[对点演练]

- $\frac{1}{2}$ [解析] 方法一: $\cos 42^\circ \cos 18^\circ -$

$\cos 48^\circ \sin 18^\circ = \cos 42^\circ \cos 18^\circ - \cos(90^\circ - 42^\circ) \sin 18^\circ = \cos 42^\circ \cos 18^\circ - \sin 42^\circ \sin 18^\circ = \cos(42^\circ + 18^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

方法二: 原式 = $\sin 48^\circ \cos 18^\circ - \cos 48^\circ \sin 18^\circ = \sin(48^\circ - 18^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

- $\frac{7}{25}$ [解析] $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 故 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$.

- -3 $-\frac{4}{3}$ [解析] $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2 + 1}{1 - 2} = -3$, $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$.

- $-\frac{5}{9}$ [解析] $\cos\left(2\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(-\pi + 2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = -\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right] = -\left(1 - 2 \times \frac{2}{9}\right) = -\frac{5}{9}$.

- $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析] $\frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ - 15^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- $\frac{3\pi}{4}$ [解析] $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{7 + \frac{4}{3}}{1 - 7 \times \frac{4}{3}} = -1$, 因为 α, β 均为锐角, 所以 $0 < \alpha + \beta < \pi$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 结合 $\tan \alpha \tan \beta$ 的值可得 $\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta$ 的关系, 根据两角和与差的余弦公式可求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值. (2) 由已知式展开化简得 $2\sin \theta = -\sqrt{3} \cos \theta$, 化弦为切得 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 利用倍角公式与同角三角函数关系式将所求式整理成齐次式, 化弦为切, 代入计算即得. (3) 思路一: 运用两角和的正切公式计算出 $\tan \alpha = -2$, 再结合 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ 求得 $\sin \alpha$; 思路二: 运用两角和的正切公式计算出 $\tan \alpha = -2$, 再用同角公式求出 $\cos \alpha$, 进而求得 $\sin \alpha$.

(1) A (2) B (3) A

[解析] (1) $\because \tan \alpha \tan \beta = 2, \therefore \sin \alpha \sin \beta = 2\cos \alpha \cos \beta$, 又 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m, \therefore \cos \alpha \cos \beta = -m, \sin \alpha \sin \beta = -2m, \therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -3m$. 故选 A.

(2) 由 $3\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 展开可得, $\frac{3}{2} \sin \theta + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta$, 整理得 $2\sin \theta = -\sqrt{3} \cos \theta$, 即 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} + 1} = \frac{1}{7}$. 故选 B.

(3) 方法一: 由 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} =$

$-\frac{1}{3}$, 解得 $\tan \alpha = -2$. 因为 α 是第二象限角, 所以由 $\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \end{cases}$ 可得 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

方法二: 由 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = -\frac{1}{3}$, 解得 $\tan \alpha = -2$. 因为 α 是第二象限角, 所以 $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \times (-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故选 A.

变式题 (1)D (2)B (3) $\frac{24}{7}$

[解析] (1) 由倍角公式可知 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, 则 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$. 因为 α 为锐角, 所以 $\frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 故选 D.

(2) 因为 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$, 所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$. 因为 $\tan(\pi - \beta) = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan \beta = -\frac{1}{2}$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{2}{11}$. 故选 B.

(3) $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - 3x - 3 = 0$ 的两个实数根, 则有 $\tan \alpha + \tan \beta = 3$, $\tan \alpha \tan \beta = -3$. 因此 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3}{4}$, 所以 $\tan(2\alpha + 2\beta) = \frac{2\tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$.

例 2 [思路点拨] (1) 思路一: 由已知结合辅助角公式及两角和与差的正弦公式对已知等式进行化简可求出 $\alpha - \beta$, 进而可求; 思路二: 根据等式恒成立, 取角 α, β 为特殊角分别判断各选项. (2) 先利用诱导公式变形, 再逆用两角和的正切公式化简即可. (3) 先由两角和的正弦公式和已知条件解得 $\sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{5}$, 进而得 $\sin 2\beta = -\frac{24}{25}$, 再利用两角差的正弦公式化简所求式子即可求解.

(1)C (2)B (3) $\frac{24}{25}$ [解析] (1) 方法一: 由 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$, 可知 $\sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$, 即 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \beta + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta = 2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$, 即 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \beta - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta = 0$, 即 $\sin\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 所以 $\alpha - \beta + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所

以 $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\tan(\alpha - \beta) = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -1, k \in \mathbf{Z}$, 故选 C.

方法二: 取 $\beta = 0$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$, 取 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, 则 $\tan(\alpha + \beta) = \tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{3}{4}\pi = -1$, 排除 B, D; 取 $\alpha = 0$, 则 $\sin \beta + \cos \beta = 2\sin \beta$, 即 $\sin \beta = \cos \beta$, 取 $\beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 排除 A. 故选 C.

(2) $\tan 8^\circ + \tan 127^\circ + \tan 8^\circ \tan 233^\circ = \tan 8^\circ + \tan(180^\circ - 53^\circ) + \tan 8^\circ \tan(180^\circ + 53^\circ) = \tan 8^\circ - \tan 53^\circ + \tan 8^\circ \tan 53^\circ = \tan(8^\circ - 53^\circ)(1 + \tan 8^\circ \tan 53^\circ) + \tan 8^\circ \tan 53^\circ = -1$. 故选 B.

(3) 因为 $\sin\left(\beta + \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 所以由两角和的正弦公式得 $\sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{5}$, 两边平方得 $1 + 2\sin \beta \cos \beta = 1 + \sin 2\beta = \frac{1}{25}$, 即 $\sin 2\beta = -\frac{24}{25}$. 故 $\sin(\alpha - 2\beta) \cos \alpha - \cos(2\beta - \alpha) \sin \alpha = \sin(\alpha - 2\beta) \cos \alpha - \cos(2\beta - \alpha) \sin \alpha = \sin(\alpha - 2\beta - \alpha) = -\sin 2\beta = \frac{24}{25}$.

变式题 (1)C (2) $\frac{1}{5}$

[解析] (1) 由 $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\lambda}{\cos 10^\circ} = 4$ 可得 $\lambda = \left(\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\right) \cos 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ - 4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - 2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - 2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - 2 \times \frac{1}{2} \cos 10^\circ + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 C.

(2) 因为 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$. 因为 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}$, 所以 $\cos(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{3}{5}$. 因为 $2 = \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$, 所以 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$. 因为 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{5} + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$.

例 3 [思路点拨] (1) 由 $\tan(2\alpha + \beta) = \tan[(\alpha + \beta) + \alpha]$ 利用两角和的正切公式计算可得. (2) 思路一: 利用 $\alpha = \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}, \alpha + \frac{\pi}{3} = \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}$ 及两角和与差的正弦公式化简即可求得 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 再利用二倍角公式即可求解; 思路二: 利用两角和的正弦公式将 $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 展开, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 再利用辅助角公式求得 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 最后利用二倍角公式即可求解.

(1)D (2) $\frac{7}{9}$ [解析] (1) 因为 $\tan \alpha =$

$3, \tan(\alpha + \beta) = -5$, 所以 $\tan(2\alpha + \beta) = \tan[(\alpha + \beta) + \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha} = \frac{-5 + 3}{1 - (-5) \times 3} = -\frac{1}{8}$. 故选 D.

(2) 方法一: 由 $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] + \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\sqrt{3} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 所以 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{9}$.

方法二: 将 $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 展开得 $\sin \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 整理得 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 即 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 所以 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{9}$.

变式题 (1)B (2) $\frac{16}{65}$

[解析] (1) 因为 $\sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, $2\sin \beta = \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 所以 $2\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - 2\cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 即 $2\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha = 3\cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 则 $2\tan(\alpha + \beta) = 3\tan \alpha$. 因为 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \tan \alpha = 3$. 又 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + \tan \beta}{1 - 2\tan \beta} = 3$, 故 $2 + \tan \beta = 3 - 6\tan \beta$, 解得 $\tan \beta = \frac{1}{7}$. 故选 B.

(2) 由题意可得 $\alpha + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \beta - \frac{5\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 所以 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{5}, \sin\left(\beta - \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{12}{13}$, 所以 $\sin(\alpha - \beta) = -\sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\beta - \frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}$.

第 25 讲 简单的三角恒等变换

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 根据题意, 结合三角函数的基本关系式、诱导公式和倍角公式, 准确化简、运算, 即可求解. (2) 将分子化为完全平方式, 分母利用诱导公式变形后, 再利用二倍角正弦、余弦以及同角公式化简.

(1)A (2) $\frac{1}{2} \cos 2x$ [解析] (1) 由 $\frac{1 + \tan 190^\circ}{1 - \tan 370^\circ} - \frac{2 \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1 + \tan 10^\circ}{1 - \tan 10^\circ} - \frac{2 \sin 20^\circ}{1 - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}} = \frac{2 \sin 20^\circ}{1 - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}} - \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{1 - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}} = \frac{(\cos 10^\circ + \sin 10^\circ)^2 - 1}{\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{1 + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ$. 故选 A.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{原式} &= \frac{\frac{1}{2}(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)}{\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos(\frac{\pi}{4} - x)} \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4} - x)} \\
 &= \frac{(2\cos^2 x - 1)^2}{4\sin(\frac{\pi}{4} - x)\cos(\frac{\pi}{4} - x)} \\
 &= \frac{\cos^2 2x}{2\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)} = \frac{\cos^2 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\cos 2x.
 \end{aligned}$$

变式题 (1)B (2)① $\frac{2}{\sin \alpha}$ ② $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

[解析] (1) $2\sqrt{1+\sin 4} + \sqrt{2+2\cos 4} = 2\sqrt{\sin^2 2 + 2\sin 2\cos 2 + \cos^2 2} + \sqrt{2+2(2\cos^2 2-1)} = 2\sqrt{(\sin 2 + \cos 2)^2} + \sqrt{4\cos^2 2} = 2|\sin 2 + \cos 2| + 2|\cos 2|$.
 $\because \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{4}, \therefore \cos 2 < 0, \therefore \sin 2 + \cos 2 = \sqrt{2}\sin(2 + \frac{\pi}{4}), \frac{3\pi}{4} < 2 + \frac{\pi}{4} < \pi$,
 $\therefore \sin 2 + \cos 2 > 0, \therefore \text{原式} = 2(\sin 2 + \cos 2) - 2\cos 2 = 2\sin 2$, 故选 B.

$$(2) \text{①原式} = \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \left(1 + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}} &= \frac{2}{\sin \alpha}. \\
 \text{②原式} &= \frac{\sin(2\alpha + \beta) - 2\sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \\
 &= \frac{\sin[\alpha + (\alpha + \beta)] - 2\sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \\
 &= \frac{\cos \alpha \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \\
 &= \frac{\sin[(\alpha + \beta) - \alpha]}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.
 \end{aligned}$$

例2 [思路点拨] (1)由同角三角函数的基本关系求出 $\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{5}$,再由二倍角的余弦公式和诱导公式化简代入即可得出答案.(2)思路一:根据两角和的正切公式得 $\tan(\alpha + \beta) = -2\sqrt{2}$,再缩小 $\alpha + \beta$ 的范围,最后结合同角的平方和关系即可得到答案;思路二:利用弦化切的方法即可得到答案.

$$\begin{aligned}
 (1) \text{A} \quad (2) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad [\text{解析}] \quad (1) \text{因为} \\
 \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{所以} \\
 \begin{cases} \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}, \\ \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \\
 \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{5}, \text{所以} \cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \pi\right] = -\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{6}) &= -\left[1 - 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = -\left[1 - 2 \times \frac{1}{5}\right] = -\frac{3}{5}. \text{故选 A.} \\
 (2) \text{方法一:由题得} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}. \because 2k_1\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}, \pi + 2k_2\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \therefore \pi + 2(k_1 + k_2)\pi < \alpha + \beta < 2\pi + 2(k_1 + k_2)\pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{即} \\
 \pi + 2k\pi < \alpha + \beta < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\
 \therefore \sin(\alpha + \beta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{方法二:} \because \alpha \text{ 为第一象限角, } \beta \text{ 为第三象限角, } \therefore \cos \alpha > 0, \cos \beta < 0, \cos \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\cos \beta} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}, \text{则} \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (\tan \alpha + \tan \beta)}{-4} = \frac{-4}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{-4}{\sqrt{(\tan \alpha + \tan \beta)^2 + (\tan \alpha \tan \beta - 1)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{4^2 + 2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

变式题 (1)C (2) $-\frac{1}{9}$ [解析] (1)由

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha - \beta) &= \frac{1}{3} \text{ 得 } \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \text{又 } \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{12}, \text{所以 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{5}{12}, \text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}, \text{故 } \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \text{故选 C.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin \alpha + \frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha = \frac{3}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha = \sqrt{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{则 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}, \text{故 } \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}.
 \end{aligned}$$

例3 [思路点拨] (1)先把 $\tan 80^\circ$ 化为 $\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}$,再分别应用两角差的正弦公式和二倍角公式化简即可;(2)根据题意利用诱导公式和倍角公式可得原式 = $-\frac{1}{2\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}$,分子、分母同乘 $\sin \frac{\pi}{5}$,结合倍角公式运算求解.

$$\begin{aligned}
 (1) \text{D} \quad (2) \text{D} \quad [\text{解析}] \quad (1) \frac{\tan 80^\circ - \sqrt{3}}{\sin 80^\circ} &= \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ \cos 80^\circ} = \frac{2\left(\sin 80^\circ \times \frac{1}{2} - \cos 80^\circ \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} \times 2\sin 80^\circ \cos 80^\circ} = \frac{4\sin(80^\circ - 60^\circ)}{\sin 160^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ}{\sin 160^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4. \text{故选 D.}
 \end{aligned}$$

$$\frac{4\sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - 20^\circ)} = \frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4. \text{故选 D.}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{因为} \frac{1}{2\cos \frac{3\pi}{5}} + \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5}} &= -\frac{1}{2\cos \frac{2\pi}{5}} + \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{-\cos \frac{4\pi}{5} + 2\cos^2 \frac{2\pi}{5}} = \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{2\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{2\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}} = -2. \text{故选 D.}
 \end{aligned}$$

变式题 (1)D (2) $-\frac{1}{8}$ [解析] (1)原式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 20^\circ (\sin 50^\circ + \sqrt{3} \cos 50^\circ)}{\cos 50^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \sin(50^\circ + 60^\circ)}{\cos 50^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \sin(90^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ - 40^\circ)} = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 1. \text{故选 D.} \\
 (2) \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 100^\circ &= -\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = -\frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{\frac{1}{2} \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{\frac{1}{4} \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{\frac{1}{8} \sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{\frac{1}{8} \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

例4 [思路点拨] (1)根据 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,得

到 $\alpha + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$,由同角三角函数

关系式求得 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值,然后由两角差的余弦公式求解即可;(2)由(1)可知 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{12}$,然后由两角差的正切公式求解即可.

$$\begin{aligned}
 \text{解:} (1) \text{因为 } \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{所以 } \alpha + \frac{\pi}{3} &\in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}), \text{又 } \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \text{所以} \\
 \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) &= \frac{13}{14}, \text{所以 } \cos \alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{3} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{2} + \frac{13}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{由(1)可知 } \tan \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{12}, \text{所以 } \tan \beta = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{11} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{1 + \frac{5\sqrt{3}}{11} \times \frac{\sqrt{3}}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{132}}{\frac{143 + 5}{154}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

因为 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\beta = \frac{\pi}{6}$.

变式题 (1) A (2) $-\frac{\pi}{4}$ [解析] (1) 因为

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{6}, \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{1}{4}, \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{6}, \\ \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{4}, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \cos \beta = \frac{2}{3}, \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}, \end{cases} \text{ 所以 } \cos(\alpha + \beta) =$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}, \text{ 又 } \alpha, \beta \in (0,$$

$$\frac{\pi}{2}), \text{ 所以 } \alpha + \beta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \alpha + \beta =$$

$$\frac{\pi}{3}. \text{ 故选 A.}$$

$$(2) \text{ 因为 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha \in (0, \pi), \text{ 所以}$$

$$\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin 2\alpha =$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}, \cos 2\alpha =$$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = -\frac{3}{5}, \text{ 又}$$

$$\beta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \alpha + \beta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}), \text{ 又 } 0 <$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \alpha + \beta \in (\frac{3\pi}{4},$$

$$\pi), \text{ 所以 } \cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} =$$

$$-\frac{7\sqrt{2}}{10}, \text{ 故 } \sin(\alpha - \beta) = \sin[2\alpha - (\alpha + \beta)] =$$

$$\sin 2\alpha \cos(\alpha + \beta) - \cos 2\alpha \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \times$$

$$\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{10} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 因为}$$

$$\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), \beta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \alpha - \beta \in$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \alpha - \beta = -\frac{\pi}{4}.$$

例 5 [思路点拨] (1) 由 $m \parallel n$ 求出 $\tan \alpha$ 的

值, 然后将原式的分子、分母同时除以

$\cos^2 \alpha$, 将其转化为关于 $\tan \alpha$ 的式子, 由

此求出结果; (2) 由 $|m + n| = |n|$ 求出

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{6})$ 的值, 然后再将 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$

表示为 $\sin[(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}]$, 结合两角

和的正弦公式求出结果.

解: (1) 因为 $m \parallel n$, 所以 $-\frac{1}{2} \times 2\sin \alpha =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\cos \alpha, \text{ 所以 } \sin \alpha = -\sqrt{3}\cos \alpha, \text{ 所以}$$

$$\tan \alpha = -\sqrt{3}, \text{ 则原式} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha} =$$

$$\frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + \tan \alpha - 2} = \frac{-2\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3} - 2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= 3 + \sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } |m + n| = |n|, \text{ 且 } m + n =$$

$$\left(2\cos \alpha - \frac{1}{2}, 2\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{ 所以 } \sqrt{\left(2\cos \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{(2\cos \alpha)^2 + (2\sin \alpha)^2}, \text{ 整理得 } 2\sqrt{3}\sin \alpha -$$

$$2\cos \alpha + 1 = 0, \text{ 所以 } 4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \text{ 即}$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}. \text{ 因为 } 0 < \alpha < \pi, \text{ 所以}$$

$$\alpha - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \text{ 又 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) <$$

$$0, \text{ 所以 } \alpha - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), \text{ 所以}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{ 所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) +$$

$$\frac{\pi}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\alpha -$$

$$\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{3\sqrt{5} - 1}{8}.$$

变式题 解: (1) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2\left(x -$

$$\frac{2025\pi}{2}\right) + 2\sin\left(x - 2024\pi\right)\cos x - \sqrt{3} =$$

$$2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3} = 2\sin x \cos x -$$

$$\sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x) = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x =$$

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 由 } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 所以 曲}$$

$$\text{线 } y = f(x) \text{ 的对称轴为直线 } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$$(k \in \mathbb{Z}).$$

$$(2) \text{ 由题意可得 } f\left(m - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{14}{25}, \text{ 即}$$

$$\sin\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{7}{25}, \text{ 又 } m \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\text{ 则 } 2m - \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \text{ 则 } \cos\left(2m -$$

$$\frac{2\pi}{3}\right) < 0, \text{ 所以 } \cos\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$-\sqrt{1 - \sin^2\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{24}{25},$$

$$\text{ 故 } \sin 2m = \sin\left[\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$\sin\left(2m - \frac{2\pi}{3}\right) \cos \frac{2\pi}{3} + \cos\left(2m -$$

$$\frac{2\pi}{3}\right) \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{7}{25} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{24}{25}\right) \times$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{7 + 24\sqrt{3}}{50}.$$

例 6 [思路点拨] (1) 利用锐角三角函数表

示出 PQ, PR ; (2) 依题意可得 $\angle QPR =$

$\frac{2\pi}{3}$, 则 $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR \cdot \sin \angle QPR$,

利用三角恒等变换公式化简, 再结合正弦

函数的性质求出最大值.

解: (1) 在 $\text{Rt} \triangle PAQ$ 中, $\angle PAQ = \alpha \in$

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), AP = 60, \text{ 所以 } PQ = AP \sin \alpha =$$

$$60\sin \alpha \text{ (米)}, \text{ 又 } \angle BAC = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle PAR =$$

$$\frac{\pi}{3} - \alpha, \text{ 在 } \text{Rt} \triangle PAR \text{ 中, 可得 } PR =$$

$$AP \sin \angle PAR = 60\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \text{ (米)}.$$

$$(2) \text{ 由题可知 } \angle QPR = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \triangle PQR$$

$$\text{的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR \cdot \sin \angle QPR =$$

$$\frac{1}{2} \times 60\sin \alpha \times 60\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \times \sin \frac{2\pi}{3} =$$

$$900\sqrt{3} \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$900\sqrt{3} \sin \alpha \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) =$$

$$450\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) =$$

$$450\sqrt{3} \left[\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right], \text{ 又 } \alpha \in \left(0,$$

$$\frac{\pi}{3}\right), \text{ 所以 } 2\alpha + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \text{ 故 当}$$

$$2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } \triangle PQR \text{ 的面积}$$

$$\text{有最大值 } 225\sqrt{3} \text{ 平方米, 即三角形绿地的最}$$

$$\text{大面积是 } 225\sqrt{3} \text{ 平方米, 此时 } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

变式题 解: (1) 延长 FG 交 AB 于 H , 如

图, 则 $GH = 60\sin \theta$, $AH = 60\cos \theta$, $GE =$

$80 - 60\cos \theta$, $FG = 80 - 60\sin \theta$, $\therefore S =$

$$(80 - 60\cos \theta)(80 - 60\sin \theta) = 400[16 -$$

$$12(\sin \theta + \cos \theta) + 9\sin \theta \cos \theta] \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } S = 400[16 - 12(\sin \theta +$$

$$\cos \theta) + 9\sin \theta \cos \theta] \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right), \text{ 令 } t =$$

$$\sin \theta + \cos \theta, \text{ 则 } \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}, \therefore t =$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \left(0 \leq \theta \leq$$

$$\frac{\pi}{2}\right), \therefore t \in [1, \sqrt{2}], \therefore S = 400\left(16 -$$

$$12t + \frac{9t^2 - 9}{2}\right) = 1800\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 + 1400,$$

$$\therefore t \in [1, \sqrt{2}], \therefore \text{ 当 } t = \frac{4}{3} \text{ 时, } S_{\min} = 1400,$$

$$\text{ 即当 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3} \text{ 时, 矩形 } ECFG \text{ 的}$$

$$\text{面积取得最小值, 最小值为 } 1400 \text{ 平方米}.$$

第 26 讲 三角函数的图象与性质

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

$$1. (1) \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \quad \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

$$(2) \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

$$2. \left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \quad [-1, 1] \quad [-1, 1]$$

$$2\pi \quad \pi \quad \text{奇函数} \quad \text{偶函数} \quad \text{奇函数}$$

$$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi] \quad \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] \quad [2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

$$(k\pi, 0) \quad \left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad x = k\pi$$

【对点演练】

$$1. [1, 3] \quad -\pi + 4k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad 4\pi$$

[解析] 由 $y = 2 - \sin \frac{x}{2} (x \in \mathbb{R})$ 知,

$y_{\min} = 2 - 1 = 1, y_{\max} = 2 + 1 = 3$, 所以函数

的值域为 $[1, 3]$. 当函数取最大值时,

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } x = -\pi +$$

$$4k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 其最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

$$2. \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$$

[解析] 由 $2k\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故

$f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

3. $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ [解析] 要使函数有意义, 则 $2x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$, 所以函数的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

4. ± 1 [解析] 由题意可得 $\frac{2\pi}{|2\omega|} = \pi$, 则 $\omega = \pm 1$.

5. 1 [解析] $\because y = -\sin^2 x + 3\sin x - 1 = -\left(\sin x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}, \sin x \in [-1, 1], \therefore$ 当 $\sin x = 1$ 时, $y_{\max} = 1$.

6. $\left[-\pi, -\frac{\pi}{6}\right]$ [解析] 依题意, $y = 2\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 由于 $x \in [-\pi, 0]$, 所以所求的单调递增区间为 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{6}\right]$.

● 课堂考点探究

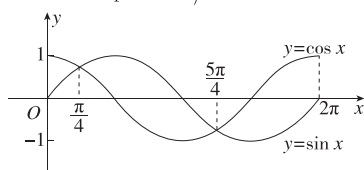
例 1 [思路点拨] (1) 根据对数函数的定义域可得 $2\sin x + 1 > 0$, 求解即可. (2) 根据正切函数的定义域及分母不等于零构造不等式组求解即可.

(1) D (2) A [解析] (1) 由 $2\sin x + 1 > 0$, 得 $\sin x > -\frac{1}{2}, \therefore 2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}, \therefore$ 函数 $y = \lg(2\sin x + 1)$ 的定义域为 $\left\{x \mid 2k\pi - \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 故选 D.

(2) 要使 $f(x)$ 有意义, 则 $\begin{cases} x \neq k\pi, \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2}, \\ x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \therefore x \neq \frac{2k}{4}\pi$ 且 $x \neq \frac{2k+1}{4}\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 故选 A.

变式题 $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ [解析] 方法一: 要使函数有意义, 则 $\sin x - \cos x \geq 0$, 在同一坐标系中画出 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象, 如图所示. 由图可知, 在 $[0, 2\pi]$ 内, 当 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ 时, 满足 $\sin x \geq \cos x$, 再结合正弦、余弦函数的最小正周期是 2π , 可知原函数的定义域为 $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.



方法二: 要使函数有意义, 则 $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, 所以 $2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 所以原函数的定义域为 $\left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

例 2 [思路点拨] (1) 结合辅助角公式化简成正弦型函数, 再求函数在给定区间内的最值即可. (2) 利用换元法和二次函数的性质即可求得 $f(x)$ 的值域.

(1) 2 (2) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ [解析] (1) $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 故当

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = 2$. (2) $f(x) = \cos 2x + 2|\sin x| = 1 - 2\sin^2 x + 2|\sin x| (x \in [0, 2\pi])$, 令 $|\sin x| = t$, 则 $t \in [0, 1]$, 则 $f(x)$ 的值域转化为 $g(t) = 1 - 2t^2 + 2t, t \in [0, 1]$ 的值域, $g(t) = -2t^2 + 2t + 1 = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$, 所以 $g(t) \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, 所以

函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

变式题 (1) A (2) A (3) $3 + \sqrt{2}$

[解析] (1) $f(x) = \sin 3\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(3\omega x + \pi) = -\sin 3\omega x$, 由 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 得 $\frac{2\pi}{3\omega} = \pi$, 解得 $\omega = \frac{2}{3}$, 则 $f(x) = -\sin 2x$. 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 易知 $f(x) = -\sin 2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

(2) 当 $x \in [0, a]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2a + \frac{\pi}{6}\right]$, 由函数 $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $[0, a]$ 上的值域为 $[-2, \sqrt{3}]$, 知函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, 2a + \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, 则有 $2a + \frac{\pi}{6} \in \left[\pi, \frac{11\pi}{6}\right]$, 即 $a \in \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right]$. 故选 A.

(3) 设 $t = \sin x + \cos x$, 则 $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}, t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 可得 $g(t) = t + t^2 - 1 + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 当 $t = \sqrt{2}$ 时, $g(t)_{\max} = \sqrt{2} + 2 + 1 = 3 + \sqrt{2}$, 即 $f(x)_{\max} = 3 + \sqrt{2}$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据三角函数的周期性, 求出各个函数的最小正周期, 从而得出结论; (2) 根据三角函数最值分析周期性, 结合三角函数最小正周期公式运算求解.

(1) ABC (2) B [解析] (1) 对于 A, $y = \cos |2x| = \cos 2x$, 所以它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 满足题意; 对于 B, $y =$

$|\cos x|$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{1} = \pi$, 满足题意; 对于 C, $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 满足题意; 对于 D, $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 不满足题意. 故选 ABC.

(2) 由题意知, x_1 为 $f(x)$ 的最小值点, x_2 为 $f(x)$ 的最大值点, 则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ (T 为 $f(x)$ 的最小正周期), 可得 $T = \pi$, 又 $\omega > 0$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 故选 B.

例 4 [思路点拨] (1) 利用降幂公式及辅助角公式化简 $f(x)$, 然后分别求出 $y = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right), y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$, 判断奇偶性即可. (2) 根据函数 $f(x)$ 图象的对称中心得到 b , 再根据函数的最小正周期的范围和图象的对称中心得到 ω 的值, 进而得到所求.

(1) B (2) A [解析] (1) $f(x) = \cos x - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 1 = \cos x -$

$1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} + 1 = \cos x -$

$\sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\cos x$, 所以

$y = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数, 故 A 错误, B 正确; $y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = -\sqrt{2}\sin x - 1$, 所以函数 $y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ 为非奇非偶函数, 故 C, D 均错误. 故选 B.

(2) 因为 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 即 $\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{\omega} < \pi$, 所以 $2 < \omega < 3$. 因为 $y = f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 所以 $b = 2$, 且 $\omega \times \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = \frac{2}{3}\left(k - \frac{1}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$, 又 $2 < \omega < 3$, 所以 $k = 4, \omega = \frac{5}{2}$, 所以 $f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1$.

例 5 [思路点拨] 化简得出 $f(x) = \cos 2x$, 利用余弦型函数的单调性逐项判断可得出正确的选项.

C [解析] $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, 令 $2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

同理, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$. 结合选项可知, C 选项正确.

【应用演练】

1. A [解析] 对于 A, $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 最小正周期 $T = 2\pi$, 故 A 正确; 对于 B, $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 B 错误; 对于 C, $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 是常

数函数,不存在最小正周期,故 C 错误;对于 D, $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 D 错误. 故选 A.

2. D [解析] $f(x) = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$. 故选 D.

3. B [解析] 因为函数 $f(x)$ 的一个周期为 4, 且 C, D 选项中函数的最小正周期为 8, 所以排除 C, D. 对于 A, 当 $x = 2$ 时, $f(2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = \sin \pi = 0$, 所以直线 $x = 2$ 不是该函数图象的对称轴, 排除 A. 对于 B, 当 $x = 2$ 时, $f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = \cos \pi = -1$, 所以直线 $x = 2$ 是该函数图象的对称轴. 故选 B.

4. B [解析] 当 $x \in \left(-\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{12}\right)$ 时, $3x + \varphi \in \left(-\frac{2\pi}{3} + \varphi, \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, 由于 φ 是三角形的一个内角, 所以 $0 < \varphi < \pi$, 则 $-\frac{2\pi}{3} < -\frac{2\pi}{3} + \varphi < \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \varphi < \frac{5\pi}{4}$, 由于函数 $y = 2\sin(3x + \varphi)$ 在区间 $\left(-\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上单调, 所以 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + \varphi, \\ \frac{\pi}{4} + \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, 即 φ 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$. 故选 B.

5. BCD [解析] 对于 A 选项, 令 $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$, 故函数 $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 不是偶函数, 故 A 错误; 对于 B 选项, 因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin 0 = 0$, 故 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点, 故 B 正确; 对于 C 选项, 当 $-\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$ 时, $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 故 C 正确; 对于 D 选项, 因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称, 故 D 正确. 故选 BCD.

第 27 讲 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 及三角函数模型的应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

$$1. \frac{-\varphi}{\omega}, \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega}, \frac{\pi - \varphi}{\omega}, \frac{\frac{3\pi}{2} - \varphi}{\omega}, \frac{2\pi - \varphi}{\omega}$$

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$2. |\varphi| \quad \left| \frac{\varphi}{\omega} \right| \quad 3. \frac{2\pi}{\omega} \quad \frac{\omega}{2\pi} \quad \omega x + \varphi \quad \varphi$$

【对点演练】

1. $2, \frac{1}{\pi}, \frac{\pi}{4}$ [解析] 由振幅、频率和初相的定义可知, 函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅为 2, 频率为 $\frac{1}{\pi}$, 初相为 $\frac{\pi}{4}$.

2. $\frac{\pi}{12}$ [解析] 由于函数 $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$, 故把 $y = \cos 3x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

3. $y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20, x \in [6, 14]$ [解析] 从题图中可以看出, $6 \sim 14$ 时的温度变化曲线是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 在半个周期内的图象, 所以 $A = \frac{1}{2} \times (30 - 10) = 10, b = \frac{1}{2} \times (30 + 10) = 20$, 又 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = 14 - 6$, 所以 $\omega = \frac{\pi}{8}$. 又 $\frac{\pi}{8} \times 10 + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, 0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, 所以所求解析式为 $y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20, x \in [6, 14]$.

4. 右 $\frac{\pi}{6}$ [解析] $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 故将函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度即可得到函数 $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

5. -1 或 -5 [解析] 由 $f\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{8} - x\right)$ 得, 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴, 故当 $x = \frac{\pi}{8}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值或最小值, 则 $-2 + m = -3$ 或 $2 + m = -3$, 解得 $m = -1$ 或 $m = -5$.

6. $-\sqrt{3}$ [解析] 由题图可知, $\frac{3}{4}T = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. 因为点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上, 所以 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f(0) = -\sqrt{3}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 根据三角函数的图象变换规则一一判断即可. (2) 根据函数图象平移可得 $g(x) = \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, 进而根据 $g(x) = f(-x)$ 即可代入化简得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 φ 的最小值.

(1) ACD (2) B [解析] (1) 对于 A, 将 $f(x) = \sin 4x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 可得到函数 $y = \sin 2x$ 的图象, 故 A 正确; 对于 B, 将 $f(x)$ 图象

上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 可得到函数 $y = \sin 8x$ 的图象, 故 B 错误; 对于 C, 将 $f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = \sin 4\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象, 故 C 正确; 对于 D, 将 $f(x)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后, 可得到函数 $y = \sin 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x - 2\pi) = \sin 4x$ 的图象, 与原图重合, 故 D 正确. 故选 ACD.

(2) $g(x) = f(x + \varphi) = \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, 要使 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 $g(x) = f(-x) = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $2\varphi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\varphi > 0$, 所以 $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{6}$, 故选 B.

变式题 (1) D (2) $\frac{1}{2}$ [解析] (1) $f(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{2}\cos 2x, g(x) = \sin 2x - 2\cos^2 x + 1 = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$, 故将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度可得 $y = \sqrt{2}\cos 2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的图象, 即为 $g(x)$ 的图象. 故选 D.

(2) 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] (\omega > 0)$ 的图象, 又 $g(x) \leq \left|g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$, 则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[\omega\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1, \therefore \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\omega = \frac{1}{2} + 3k (k \in \mathbf{Z})$, 又 $\omega > 0, \therefore \omega$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

例 2 [思路点拨] (1) 由图可知最大值为 2, 最小值为 -2, $\frac{T}{4} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$, 进而求出 A, ω , 再将点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$ 代入函数解析式即可求 φ .

(1) A (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ [解析] (1) 由图可知 $\frac{T}{4} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $T = 2\pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$, 排除 B, D.

当 $A > 0$ 时, $A = 2$, 所以 $f(x) = 2\sin(x + \varphi)$, 将最高点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$ 代入可得

$2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=2$, 所以 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 即 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 因为 $|\varphi|<\pi$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 故 A 正确; 当 $A<0$ 时, $A=-2$, 所以 $f(x)=-2\sin(x+\varphi)$, 将 $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$ 代入可得 $-2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=2$, 所以 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 即 $\varphi=-\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 因为 $|\varphi|<\pi$, 所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, 所以 $f(x)=-2\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$, 故 C 错误. 故选 A.

(2) 依题意设 $A\left(x_1, \frac{1}{2}\right), B\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$, 则 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$, 因为 $\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{2\pi}{3}$, 即 $\frac{\pi}{6}\omega=\frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega=4$, 又 $\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 所以 $\varphi=-\frac{8\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 不妨取 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$, 则 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$, 故 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式题 (1) C (2) C [解析] (1) $\because$ 点 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上, $\therefore \cos\left[\omega\times\left(-\frac{4\pi}{9}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=0, \therefore -\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z}), \therefore \omega=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k(k\in\mathbf{Z}), \therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k\right|}(k\in\mathbf{Z})$. 由图可知 $\frac{10\pi}{9}<T<\frac{13\pi}{9}$, 得 $\frac{18}{13}<\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k\right|<\frac{9}{5}(k\in\mathbf{Z})$, 解得 $-\frac{1}{15}<k<\frac{1}{39}$ 或 $\frac{25}{39}<k<\frac{11}{15}(k\in\mathbf{Z})$, 故 $k=0$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{4\pi}{3}$. 故选 C. (2) 由图象可知, $A=2$, 由 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 可得 $T=\frac{2\pi}{3}-0=\frac{2\pi}{3}$, 且 $T=\frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega=3$, 所以 $f(x)=2\sin(3x+\varphi)$, 由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 可得, $f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\pi}{2}\right)=f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=-2$, 所以 $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=2\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\varphi\right)=-2$, 即以 $\frac{5}{4}\pi+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 即 $\varphi=-\frac{7}{4}\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$. 故选 C.

例 3 [思路点拨] (1) 先化简, 再利用相邻对称轴与对称中心的距离求出周期, 再求出参数 ω , 然后利用复合函数同增异减的规则求出单调递增区间即可; (2) 先根据

题意求出 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$,

然后求其取值范围即可.

解: (1) 因为 $f(x)=\sin(\pi-\omega x)\cos\omega x+\cos^2\omega x=\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\omega x\right)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}(\omega>0)$, 又由 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$, 得 $\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$, 可得 $\omega=1$, 所以 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$, 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 则 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}\right], k\in\mathbf{Z}$. (2) 由 (1) 知 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$, 由题意可得 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$, 因为 $x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $4x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 故 $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\in\left[0, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$, 故所求取值范围为 $\left[0, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$.

变式题 (1) BC (2) $-\frac{\pi}{3}$ [解析] (1) 方

法一: $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 最大值为 1, $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 最大值为 1, 故 B, C 均正确; 因为 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$, 所以将 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度可得 $g(x)$ 的图象, 又 $\frac{\pi}{8}<\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的零点不相同, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴不相同, 故 A, D 均不正确. 故选 BC.

方法二: $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 最大值为 1, $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$, 最大值为 1, 故 B, C 均正确; 令 $f(x)=\sin 2x=0$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 令 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的零点不相同, A 不正确; 令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$, 令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴不相同, D 不正确. 故选 BC.

(2) 根据题意可得周期 $T=\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{9}\right)\times$

$4=\frac{2\pi}{3}$, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3$, 所以 $f(x)=\cos(3x+\varphi)$, 因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 $3x+\varphi\in\left(\frac{\pi}{2}+\varphi, \pi+\varphi\right)$, 且 $\begin{cases} 2k\pi\leq \frac{\pi}{2}+\varphi, k\in\mathbf{Z}, \\ \pi+\varphi\leq \pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}, \end{cases}$ 解得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq \varphi\leq 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{2}<\varphi\leq 0$, 又因为 $f\left(\frac{5\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$, 所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

例 4 [思路点拨] (1) 根据已知条件列方程组求 A, B, ω, φ , 即可得函数 $H(t)$ 的解析式; (2) 令 $H(t)=30$, 结合余弦函数分析运算.

解: (1) 由题意知 $\begin{cases} A+B=90, \\ -A+B=10, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=40, \\ B=50, \end{cases} \omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$, 故 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+50, t\in[0, 30]$. 因为 $H(0)=40\sin\varphi+50=10$, 所以 $\sin\varphi=-1$, 又 $|\varphi|\leq\pi$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, 因此 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+50=50-40\cos\frac{\pi}{15}t, t\in[0, 30]$.

即 $H(t)=50-40\cos\frac{\pi}{15}t, t\in[0, 30]$. (2) 令 $H(t)=50-40\cos\frac{\pi}{15}t=30$, 可得 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$, 因为 $t\in[0, 30]$, 所以 $\frac{\pi}{15}t\in[0, 2\pi]$, 所以 $\frac{\pi}{15}t=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$, 解得 $t=5$ 或 $t=25$, 故游客甲坐上摩天轮 5 分钟或 25 分钟时, 距离地面的高度恰好为 30 米.

变式题 (1) A (2) BC [解析] (1) 设 $d=A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0, \omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$, 由题意可知, $d_{\max}=A+b=6, d_{\min}=-A+b=-2$, 解得 $A=4, b=2$, 易知函数 $d=4\sin(\omega t+\varphi)+2(\omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 $T=\frac{60}{1.5}=40$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{40}=\frac{\pi}{20}$, 当 $t=0$ 时, $d=4\sin\varphi+2=0$, 可得 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$, 又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$, 故 $d=4\sin\left(\frac{\pi}{20}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$, 故选 A.

(2) 由 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, 得 $f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$, 由题意得 $f(2\pi)=f'(2\pi)$, 即 $A\sin\varphi=A\omega\cos\varphi$, 故 $\tan\varphi=\omega$, 因为 $\omega\in\mathbf{N}^*, |\varphi|<\frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan\varphi=\omega<\sqrt{3}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}, \omega=1$, 故选项 A 错误; 因为破碎的涌潮的波谷为 -4 , 所以 $f'(x)$ 的最小值为 -4 , 即 $-A\omega=-4$, 得 $A=4$, 所以 $f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$

$4\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, 故选项 B 正确; 因为 $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f'(x) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f'\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4\cos x$ 为偶函数, 故选项 C 正确; $f'(x) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 由 $-\frac{\pi}{3} < x < 0$, 得 $-\frac{\pi}{12} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$, 因为函数 $y = 4\cos x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 上单调递增, 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减, 所以 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 上不单调, 故选项 D 错误. 故选 BC.

培优专题(三) 三角函数中的参数范围问题

例 1 (1)A (2)C [解析] (1) 由 $x \in (0, \pi)$, 得 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \omega\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有 2 个极值点, 所以 $2\pi < \omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{11}{6} < \omega \leq \frac{17}{6}$. 由 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}\right)$, 得 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{24}\omega + \frac{\pi}{6}\right)$, 因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}\right)$ 上单调递增, $\omega > 0$, 所以 $\begin{cases} \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} \geq \pi + 2k\pi, \\ \frac{11}{24}\omega + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\frac{5}{2} + 6k \leq \omega \leq 4 + \frac{48k}{11}, k \in \mathbf{Z}$. 综上, $\frac{5}{2} \leq \omega \leq \frac{17}{6}$. 故选 A.

(2) $\because$ 函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$) 的图象的一条对称轴为直线 $x = -\frac{\pi}{6}$, $\therefore -\frac{\pi\omega}{6} + \varphi = k_1\pi + \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbf{Z}$, $\therefore \varphi = k_1\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\omega}{6}, k_1 \in \mathbf{Z}$, 当 $\omega x + k_1\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\omega}{6} = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ 时, 令 $k = k_2 - k_1$, 得 $x = \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 又 $f(x)$ 在 $\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调, $\therefore$ 存在 $k \in \mathbf{Z}$, 使 $\begin{cases} \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6} \leq \pi, \\ \frac{(k+1)\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6} \geq \frac{4\pi}{3}, \end{cases}$ 解得 $\frac{6}{7}k \leq \omega \leq \frac{2}{3}(k+1), k \in \mathbf{Z}$, 由 $\frac{6}{7}k \leq \frac{2}{3}(k+1), k \in \mathbf{Z}, \omega > 0$, 得 $0 \leq k \leq \frac{7}{2}$, 故当 $k = 3$ 时, ω 取得最大值 $\frac{8}{3}$. 故选 C.

【自测题】

(1)D (2) $\frac{7}{4}$ [解析] (1) 因为 $f(x) = 2\sin \omega x(\sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x) = 2\sqrt{3} \sin^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x = \sin 2\omega x - \sqrt{3} \cos 2\omega x + \sqrt{3} = 2\sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$, 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 且 $\omega > 0$, 得 $2\omega x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$,

由 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 得 $\frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \omega \leq \frac{5}{4}$. 因为对任意的实数 $a, f(x)$ 在 $(a, a + \pi)$ 上不单调, 所以 $f(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} < 2\pi$, 所以 $\omega > \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} < \omega \leq \frac{5}{4}$. 故选 D.

(2) 因为 $f(x) = \sin 2\omega x + \cos 2\omega x = \sqrt{2} \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{16}\right)$, 且 $\omega > 1$, 所以 $2\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4}\right)$, 且 $-\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{4} < 0 < \frac{\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4}$, 由 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{16}\right)$ 上单调, 得 $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{4} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 所以 $1 < \omega \leq 2$, 又因为

$f(x)$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $\pi\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = k - \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = \frac{7}{4}$.

例 2 (1)A (2)C [解析] (1) 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\omega x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \omega\pi - \frac{\pi}{3}\right]$ ($\omega > 0$), 依题意可得 $\frac{3\pi}{2} \leq \omega\pi - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{2}$, 解得 $\omega \in \left[\frac{11}{6}, \frac{17}{6}\right)$, 故选 A.

(2) 由题意知, 曲线 C 为 $y = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 又 C 关于 y 轴对称, 所以 $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$, 故当 $k = 0$ 时, ω 取得最小值, 为 $\frac{1}{3}$, 故选 C.

【自测题】

C [解析] 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $\omega x \in \left(-\frac{\omega\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{3}\right)$, 因为函数 $f(x) = 2\sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上只有一个极值点, 所以 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\omega\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$ 得 $\frac{3}{2} < \omega \leq 3$. 故选 C.

例 3 (1)D (2)BC [解析] (1) 依题意, $f(x) = \cos(2\omega x - \omega x) - 2\sin 2\omega x \sin \omega x = \cos(2\omega x + \omega x) = \cos 3\omega x$, 当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $3\omega x \in (0, 6\omega\pi)$, 若 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有最小值没有最大值, 则 $\pi < 6\omega\pi \leq 2\pi$, 所以 $\frac{1}{6} < \omega \leq \frac{1}{3}$. 故选 D.

(2) 因为 $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 所以当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 即直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 又因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, 所以 $f(0) = 2$, 即 $f(0) = m \cos 0 + 2\sqrt{3} \sin 0 = 2$, 所以 $m = 2$, 所以 $f(x) = 2\cos \omega x + 2\sqrt{3} \sin \omega x = 4\left(\frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x\right) = 4\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\omega = \frac{16}{3} + 8k, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$ 时, $\omega = \frac{16}{3}$, 当 $k = 1$ 时, $\omega = \frac{40}{3}$. 故选 BC.

【自测题】

$\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{3}\right]$ [解析] $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \cos^2 \omega x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1}{2} \cos 2\omega x + 1 = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 由 $x \in [0, \pi)$, $\omega > 0$, 得 $2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{6}\right)$, 因为 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi)$ 上只有一个零点和两个最大值点, 所以 $\frac{5\pi}{2} < 2\pi\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$, 解得 $\frac{7}{6} < \omega \leq \frac{5}{3}$.

例 4 $[2, 3]$ [解析] 因为 $x \in [0, 2\pi], \omega > 0$, 所以 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则需满足 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 所以 $2 \leq \omega < 3$.

【自测题】

C [解析] 因为 $x \in (0, \pi), \omega > 0$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$, 要使函数在区间 $(0, \pi)$ 上恰有三个极值点、两个零点, 则 $\frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$, 解得 $\frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$. 故选 C.

第 28 讲 余弦定理、正弦定理

● 课前基础巩固

【对点演练】

1. [解析] 因为在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ, C = 45^\circ, c = \sqrt{2}$, 所以由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{1}{2} = 1$.
2. $\frac{\pi}{6}$ [解析] 因为 $b^2 + c^2 = a^2 + \sqrt{3}bc$, 所以由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$.
3. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ [解析] 因为 $a = 3, b = 5, c = 7$, 所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9 + 25 - 49}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.
4. $A = B, A > B$ [解析] 根据正弦定理知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \sin B \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow A = B, \sin A > \sin B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow A > B$.
5. 30° 或 150° [解析] 由正弦定理得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\frac{7}{2} \times \frac{3}{7}}{3} = \frac{1}{2}$, 因为 $b > a > b \sin A$, 所以 $B = 30^\circ$ 或 150° .
6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 [解析] $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cos 30^\circ = 1$, 所以 $b = 1$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 思路一: 根据辅助角公式对条件 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 进行化简处理即可求解; 思路二: 利用同角三角函数的关系求解.

(2) 先根据正弦定理边角互化求出 B , 然

后根据正弦定理求出 b, c 即可求解.

解: (1) 方法一: $\because \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = 2, A + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right),$

$\therefore A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2},$ 即 $A = \frac{\pi}{6}.$

方法二: 由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2, \sin^2 A + \cos^2 A = 1,$ 得 $4\cos^2 A - 4\sqrt{3} \cos A + 3 = 0,$ 解得 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2},$ 又 $A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{6}.$

(2) $\because \sqrt{2} b \sin C = c \sin 2B, \therefore \sqrt{2} \sin B \sin C = 2 \sin C \sin B \cos B,$ 又 $\sin B \sin C > 0,$

$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2},$ 则 $B = \frac{\pi}{4},$ 得 $C = \frac{7\pi}{12},$

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = 4,$

$\therefore b = 4 \sin B = 2\sqrt{2}, c = 4 \sin C = \sqrt{6} + \sqrt{2},$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}.$

变式题 1 (1) C (2) C [解析] (1) 方法一: 因为 $a \cos B - b \cos A = c,$ 所以由正弦定理得 $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin C,$ 即 $\sin(A - B) = \sin C,$ 所以 $A - B = C$ 或 $A - B + C = \pi$ (舍). 因为 $C = \frac{\pi}{5}, A + B + C = \pi,$ 所以 $A + B = \frac{4\pi}{5}.$ 所以 $B = \frac{3\pi}{10}.$ 故选 C.

方法二: 由余弦定理得 $a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} -$

$b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c,$ 整理得 $a^2 = b^2 + c^2,$

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $A = \frac{\pi}{2},$

又 $C = \frac{\pi}{5},$ 所以 $B = \frac{3\pi}{10}.$ 故选 C.

(2) 因为 $B = 60^\circ, b^2 = \frac{9}{4}ac,$ 所以 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}.$ 由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 -$

$ac = \frac{9}{4}ac,$ 即 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac,$ 所以 $\sin^2 A +$

$\sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12},$ 所以 $(\sin A +$

$\sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4},$ 则

$\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2},$ 故选 C.

变式题 2 解: (1) 由 $\frac{\cos C}{c} = \frac{\cos A}{3b - a}$ 及正弦定

理可得, $\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\cos A}{3 \sin B - \sin A},$

即 $3 \sin B \cos C - \sin A \cos C = \cos A \sin C,$

所以 $3 \sin B \cos C = \sin A \cos C + \cos A \sin C =$

$\sin(A + C),$ 又 $\sin(A + C) = \sin(\pi - B) =$

$\sin B,$ 且 $\sin B \neq 0,$ 所以 $\cos C = \frac{1}{3}.$ 又

$\sin C > 0,$ 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

(2) 因为 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = 5\sqrt{2},$ 所以 $ab =$

$15.$ 由余弦定理, 得 $c^2 = a^2 + b^2 -$

$2ab \cos C = a^2 + b^2 - 10.$

又 $c^2 = 6(a - b)^2 = 6(a^2 + b^2) - 180,$

所以 $a^2 + b^2 = 34, c = 2\sqrt{6},$

所以 $a + b = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = 8,$

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 8 + 2\sqrt{6}.$

例 2 [思路点拨] (1) 利用余弦定理将等式

整理得到 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b},$ 对

$c \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac} = b - c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$ 化

简得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b}.$ 当 $a^2 +$

$b^2 - c^2 = 0,$ 即 $a^2 + b^2 = c^2$ 时, $\triangle ABC$ 为

直角三角形; 当 $a^2 + b^2 - c^2 \neq 0$ 时, 得

$a = b,$ 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 综上, $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形, 故

D 正确. 故选 D.

(2) 由题可得 $a(1 + \cos C) = b(1 - \cos A) +$

$a,$ 化简得 $a \cos C + b \cos A = b,$ 由正弦定理

可得 $\sin A \cos C + \sin B \cos A = \sin B,$ 因为

$\sin B = \sin(A + C),$ 所以 $\sin A \cos C +$

$\sin B \cos A = \sin A \cos C + \sin C \cos A,$ 即

$\cos A(\sin B - \sin C) = 0,$ 所以 $\cos A = 0$

或 $\sin B = \sin C,$ 可得 $A = \frac{\pi}{2}$ 或 $B = C,$ 所

以 $\triangle ABC$ 为直角三角形或等腰三角形.

故选 D.

变式题 (1) C (2) ACD [解析] (1) $\because a^2 +$

$b^2 - c^2 = ab, \therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2},$ 又

$C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}.$ 由 $2 \cos A \sin B =$

$\sin C,$ 得 $\cos A = \frac{\sin C}{2 \sin B} = \frac{c}{2b} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},$

$\therefore b^2 = a^2,$ 即 $b = a,$ 又 $C = \frac{\pi}{3}, \therefore$ 该三角

形为等边三角形, 故选 C.

(2) 对于 A, 若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C},$ 则

由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{\cos C},$ 即

$\tan A = \tan B = \tan C,$ 则 $A = B = C,$ 所以

$\triangle ABC$ 一定是等边三角形, 故 A 正确;

对于 B, 若 $a \cos A = b \cos B,$ 则由正弦定理

得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B,$ 即 $\sin 2A =$

$\sin 2B,$ 则 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = 180^\circ,$ 即

$A = B$ 或 $A + B = 90^\circ,$ 所以 $\triangle ABC$ 是等

腰三角形或直角三角形, 故 B 错误; 对于

C, 若 $b \cos C + c \cos B = b,$ 则由正弦定理

得 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin B,$ 所以

$\sin(B + C) = \sin A = \sin B,$ 即 $A = B,$ 所

以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形, 故 C 正确;

对于 D, 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a^2 + b^2 < c^2,$

且 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$ 所以 $\cos C <$

$0,$ 所以角 C 为钝角, 所以 $\triangle ABC$ 一定是

钝角三角形, 故 D 正确. 故选 ACD.

例 3 [思路点拨] (1) 由两角和与差的余弦

公式、正弦定理化简已知式即可得出答

案; (2) 由正弦定理化简已知式即可得出

答案.

解: (1) 由已知条件得 $\sin 2B +$

$\sin A \sin 2B = \cos A + \cos A \cos 2B,$

则 $\sin 2B = \cos A + \cos A \cos 2B =$

$\cos[\pi - (B + C)] + \cos[\pi - (B + C) +$

$2B] = -\cos(B + C) - \cos(B - C) =$

$-2 \cos B \cos C,$ 所以 $2 \sin B \cos B =$

$-2 \cos B \cos C,$ 所以 $(\sin B + \cos C) \cos B = 0.$

由题知 $1 + \cos 2B \neq 0,$ 所以 $B \neq \frac{\pi}{2},$ 所以

$\cos B \neq 0,$

所以 $\sin B = -\cos C = \frac{1}{2},$ 可得 $B = \frac{\pi}{6}.$

(2) 由 (1) 知 $\sin B = -\cos C > 0,$ 则 $B =$

$C - \frac{\pi}{2},$ 则 $\sin A = \sin(B + C) =$

$\sin\left(2C - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2C.$ 由正弦定理得

$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 2C + \cos^2 C}{\sin^2 C} =$

$\frac{(1 - 2 \sin^2 C)^2 + (1 - \sin^2 C)}{\sin^2 C} =$

$\frac{2 + 4 \sin^4 C - 5 \sin^2 C}{\sin^2 C} = \frac{2}{\sin^2 C} + 4 \sin^2 C -$

$5 \geq 2 \sqrt{\frac{2}{\sin^2 C} \cdot 4 \sin^2 C} - 5 = 4\sqrt{2} - 5,$

当且仅当 $\sin^2 C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以

$\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5.$

第 29 讲 多三角形背景下解三角形

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 利用正弦定理即可求

解; (2) 找到隐含条件 $\angle ADB$ 和 $\angle BDC$

互补, 从而列出等式求出 a, c 的关系, 再

在 $\triangle ABC$ 中利用余弦定理即可求解.

解: (1) 证明: 由 $BD \sin \angle ABC = a \sin C$ 及

正弦定理得, $BD \cdot b = ac,$

又 $b^2 = ac,$ 所以 $BD \cdot b = b^2,$ 即 $BD = b.$

(2) 若 $AD = 2DC,$ 则 $AD = \frac{2}{3}b, DC = \frac{1}{3}b.$ 在

$\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ADB =$

$\frac{DA^2 + DB^2 - AB^2}{2DA \cdot DB} = \frac{\left(\frac{2}{3}b\right)^2 + b^2 - c^2}{2 \times \frac{2}{3}b \cdot b};$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BDC =$

$\frac{DB^2 + DC^2 - BC^2}{2DB \cdot DC} = \frac{b^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot \frac{1}{3}b}.$

因为 $\angle ADB + \angle BDC = \pi,$ 所以

$\left(\frac{2}{3}b\right)^2 + b^2 - c^2 = b^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 - a^2$

$2 \times \frac{2}{3}b \cdot b = 2 \cdot b \cdot \frac{1}{3}b$

0, 即 $\frac{11}{3}b^2 = 2a^2 + c^2,$ 又 $b^2 = ac,$ 所以

$\frac{11}{3}ac = 2a^2 + c^2,$ 即 $6a^2 - 11ac + 3c^2 = 0,$

即 $(3a - c) \cdot (2a - 3c) = 0,$ 解得 $3a = c$ 或

$2a = 3c.$ 当 $3a = c$ 时, 由 $\frac{11}{3}b^2 = 2a^2 + c^2,$

得 $a^2 = \frac{1}{3}b^2, c^2 = 9a^2 = 3b^2,$ 在 $\triangle ABC$

中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC =$

$\frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$

$\frac{\frac{1}{3}b^2 + 3b^2 - b^2}{2b^2} = \frac{7}{6}b^2 = \frac{7}{6} > 1,$ 不成

立. 当 $2a=3c$ 时, 由 $\frac{11}{3}b^2=2a^2+c^2$, 得 $a^2=\frac{3}{2}b^2, c^2=\frac{2}{3}b^2$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{\frac{3}{2}b^2+\frac{2}{3}b^2-b^2}{2b^2} = \frac{\frac{5}{6}b^2}{2b^2} = \frac{5}{12}$. 综上, $\cos \angle ABC = \frac{7}{12}$.

变式题 解: (1) 由 $\cos B + 2\cos C = 0$ 和余弦定理可得, $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + 2 \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 0$, 将 $c=2b$ 代入得, $\frac{a^2+4b^2-b^2}{2a \cdot 2b} + 2 \times \frac{a^2+b^2-4b^2}{2ab} = 0$, 化简得 $5a^2=9b^2$, 即 $a=\frac{3\sqrt{5}}{5}b$. 由余弦定理可得, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+4b^2-\frac{9}{5}b^2}{2b \cdot 2b} = \frac{4}{5}$.

(2) 由 (1) 和余弦定理可得, $\cos \angle ACB = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab} = \frac{b^2+\frac{9}{5}b^2-4b^2}{2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}b \cdot b} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\angle ACB \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 故 $\sin \angle ACB = \sqrt{1 - (-\frac{\sqrt{5}}{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 由 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, 可得 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$, 整理得 $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 两边同时平方可得, $|\overrightarrow{CD}|^2 = (\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB})^2 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}ab\cos \angle ACB$,

又因为 $CD = \sqrt{17}$, 所以 $17 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{9} \times \frac{9}{5}b^2 + \frac{4}{9} \times \frac{3\sqrt{5}}{5}b^2 \times (-\frac{\sqrt{5}}{5})b^2$, 整理得 $\frac{17}{45}b^2 = 17$, 可得 $b=3\sqrt{5}$, 则 $a=\frac{3\sqrt{5}}{5} \times 3\sqrt{5} = 9$, 故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}absin \angle ACB = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 27$.

例 2 [思路点拨] (1) 记 CD 的中点为 E , 利用向量运算证明 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$ 即可; (2) 先根据向量关系得 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 再由角平分线定理得 $c=2b$, 分别在 $\triangle ACD, \triangle ABD$ 中使用余弦定理可得 $a^2 = \frac{9b^2}{2}$, 再在 $\triangle ABC$ 中利用余弦定理求 $\cos \angle BAC$, 然后由平方关系可得 $\sin \angle BAC$.

解: (1) 证明: 记 CD 的中点为 E , 连接 $\overrightarrow{AE}$, 则 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$, 因为 $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$, 所以 AE 为 CD 的垂直平分线, 所以 $AD=AC=b$.
(2) 记 $\angle CAD = \theta$, 因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$, 所以 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 则 $BD = \frac{2}{3}a, DC = \frac{1}{3}a$, 又 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 所以 $\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC} = 2$, 则 $c=2b$. 在 $\triangle ACD, \triangle ABD$ 中,

分别由余弦定理得 $b^2 + b^2 - 2b^2 \cos \theta = \frac{a^2}{9}, b^2 + 4b^2 - 4b^2 \cos \theta = \frac{4a^2}{9}$, 消去 $\cos \theta$ 可得 $a^2 = \frac{9b^2}{2}$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理

得 $\cos \angle BAC = \frac{b^2 + 4b^2 - \frac{9b^2}{2}}{4b^2} = \frac{1}{8}$, 所以

$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - (\frac{1}{8})^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

变式题 解: (1) 依题意, 由正弦定理可得 $\frac{\sin C - \sin B}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$, 所以 $\sin C - \sin B = \sin(A-B)$, 又 $\sin C = \sin[\pi - (A+B)] = \sin(A+B)$, 所以 $\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$. 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 方法一: 由题意得, $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$, 所以 $\frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}b \cdot c \sin \frac{\pi}{3}$, 即 $b+c = \frac{\sqrt{3}}{2}bc$, 又 $b=AC=2\sqrt{3}$, 所以 $c=\sqrt{3}$, 所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = 9$, 即 $a=3$, 所以 $a+c=3+\sqrt{3}$.

方法二: 如图, 在 $\triangle ACD$ 中, $AD=2, AC=2\sqrt{3}$, $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 由余弦定理得, $CD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 4$, 所以 $CD=AD=2$, 所以 $C = \angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 所以 $B = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $a = b \cos \frac{\pi}{6} = 3, c = b \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, 所以 $a+c=3+\sqrt{3}$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据条件, 利用余弦定理, 即可求出结果; (2) 根据 (1) 中结果及条件, 求得 $\sin \angle ACD, \sin \angle ADC$, 再利用正弦定理即可求出结果.

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle BCA = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$, 又 $AB = \sqrt{5}, AC = 3, BC = 2\sqrt{2}$, 所以 $\cos \angle BCA = \frac{9+8-5}{2 \times 3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 由 (1) 知 $\cos \angle BCA = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\sin \angle BCA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCA} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\cos \angle BCD = -\frac{12}{13}$, 所以 $\sin \angle BCD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCD} = \sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = \frac{5}{13}$, 所以 $\sin \angle ACD = \sin(\angle BCD - \angle BCA) = \sin \angle BCD \cos \angle BCA - \cos \angle BCD \sin \angle BCA = \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{12}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$.

因为 $\cos \angle ADC = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, 所以 $\sin \angle ADC = \sqrt{1 - (-\frac{\sqrt{21}}{5})^2} = \frac{2}{5}$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$, 即 $\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{AD}{\frac{17\sqrt{2}}{26}}$, 所以 $AD = \frac{255\sqrt{2}}{52}$.

变式题 解: (1) 设 $BC = CD = x > 0$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = 9 + x^2 - 2 \times 3x \cos B = 7$, 即 $x^2 + 2 = 6x \cos B$ ①. 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = 1 + x^2 - 2x \cos D = 7$, 即 $x^2 - 6 = 2x \cos D$ ②. 因为 $B + D = \pi$, 所以 $\cos D = \cos(\pi - B) = -\cos B$, 联立 ① ② 可得 $x = 2$ (负值舍去), $\cos B = \frac{1}{2}$. 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以

$B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle PBC$ 中, 由正弦定理知, $\frac{BC}{\sin \angle BPC} = \frac{PC}{\sin B}$, 所以 $\sin \angle BPC = \frac{BC \sin B}{PC} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = 1$, 又 $0 < \angle BPC < \pi$, 所以 $\angle BPC = \frac{\pi}{2}$. 在 $Rt \triangle PBC$ 中, 由勾股定理知, $PB = \sqrt{BC^2 - PC^2} = 1$, 则 $PA = AB - PB = 2$.

第 30 讲 余弦定理、正弦定理应用举例

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 仰角 俯角

【对点演练】

1. $\sqrt{3}$ [解析] 在 $\triangle ABC$ 中, 易得 $A = 30^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 则 $AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}(\text{km})$.

2. $(30\sqrt{3} + 30) \text{ m}$ [解析] 由题意知 $\angle APB = 45^\circ - 30^\circ$, 所以 $\sin \angle APB = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 由正弦定理得 $PB = \frac{AB \sin 30^\circ}{\sin \angle APB} = \frac{60 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = 30(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\text{m})$, 所以该树的高度为 $30(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin 45^\circ = (30\sqrt{3} + 30)(\text{m})$.

3. $2\sqrt{3} \text{ km}$ [解析] 依题意知 $\angle ACB = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$, 所以由余弦定理得 $AB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3}(\text{km})$.

4. $200\sqrt{3} \text{ m}$ [解析] 由题意得 $BC = \frac{100}{\tan 15^\circ}$, $\frac{100}{\tan 75^\circ} = 100 \times \frac{\tan 75^\circ - \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ \tan 75^\circ} = 100 \times \frac{\tan 60^\circ(1 + \tan 15^\circ \tan 75^\circ)}{\tan 15^\circ \tan 75^\circ}$, 而 $\tan 15^\circ \tan 75^\circ = \frac{\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \cdot \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 1$, 所以 $BC = 100 \times 2\sqrt{3} = 200\sqrt{3}(\text{m})$.

5. 200° [解析] 根据方位角的概念可得点 A 的方位角为 200° .

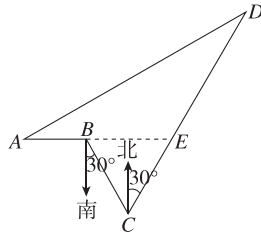
● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 在 $\triangle ACD$ 中, 利用 $\angle ADC = 30^\circ, \angle ACD = 120^\circ$, 得到 $\angle CAD = \angle CAD$, 求出 AC , 在 $\triangle BCD$ 中, 利用正弦定理求出 BC , 在 $\triangle ABC$ 中, 利用余弦定理求出 AB .

D [解析] 因为 $\angle ADC = 30^\circ, \angle ACB = 75^\circ, \angle ACD = 120^\circ$, 所以 $\angle BCD = 45^\circ, \angle CAD = 30^\circ$, 在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ADC = \angle CAD = 30^\circ$, 所以 $AC = CD = 10\sqrt{3}$. 在 $\triangle BDC$ 中, $\angle CBD = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$, 由正弦定理得 $BC = \frac{10\sqrt{3} \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB = (10\sqrt{3})^2 +$

$(5\sqrt{2}+5\sqrt{6})^2 - 2 \times 10\sqrt{3} \times (5\sqrt{2}+5\sqrt{6}) \cos 75^\circ = 500$, 所以 $AB = 10\sqrt{5}$, 即基站 A, B 之间的距离为 $10\sqrt{5}$ km, 故选 D.

变式题 (1) B (2) 475 **[解析]** (1) 如图, $AB=4, BC=6, CD=16$, 延长 AB 交 CD 于点 E , 则 $\angle CBE=60^\circ, \angle BCE=60^\circ$, 因此 $\triangle CBE$ 是正三角形, 故 $BE=CE=BC=6, \angle BEC=60^\circ$, 故 $AE=DE=10, \angle AED=120^\circ$. 在 $\triangle ADE$ 中, 由余弦定理得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2-2AE \cdot DE \cos 120^\circ}=\sqrt{10^2+10^2-2 \times 10 \times 10 \times (-\frac{1}{2})}=10\sqrt{3}$, 所以 A, D 两地间的距离为 $10\sqrt{3}$ km. 故选 B.

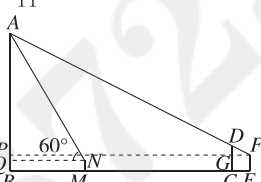


(2) 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E . 如图, 由题意可得 $B=90^\circ, \angle CAB=30^\circ, BC=300$ m, 所以 $AC=\frac{BC}{\sin \angle CAB}=\frac{600(\text{m})}{\sin 30^\circ}=300\sqrt{3} \approx 300 \times 1.73=519(\text{m})$. 在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin \angle CAD}=\frac{AC}{\sin D}$, 则 $\sin D=\frac{3 \sin 80^\circ}{4}$, 所以 $\cos \angle EAD=\frac{3 \sin 80^\circ}{4} \approx 0.735$, 所以 $\sin \angle EAD \approx 0.68, \cos \angle CAE=\cos(80^\circ-\angle EAD) \approx 0.17 \times 0.735+0.98 \times 0.68=0.79135$. 在直角三角形 ACE 中, $AE=AC \cdot \cos \angle CAE \approx 600 \times 0.79135 \approx 475(\text{m})$. 因为 $AE < AB$, 所以最短距离约为 475 m.

例 2 **[思路点拨]** (1) 设 $AB=x$ m, 利用两个直角三角形分别求出 BC 与 BD , 在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理列方程, 求解即可. (2) 根据题意可得 $PM=\frac{MN}{\sin 15^\circ}$, 在 $\triangle FPM$ 中利用正弦定理可求得 $PF=\frac{\sqrt{3}MN}{1-\cos 30^\circ}$, 进而在 $\text{Rt} \triangle PEF$ 中可求得 EF . (1) C (2) A **[解析]** (1) 设 $AB=x$ m, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, 因为 $\angle ACB=45^\circ$, 所以 $BC=x$ m, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 因为 $\angle ADB=30^\circ$, 所以 $BD=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$ (m), 在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC \cdot BD \cdot \cos \angle CBD$, 即 $23.8^2=x^2+3x^2-3x^2$, 可得 $x=23.8$. 故选 C.

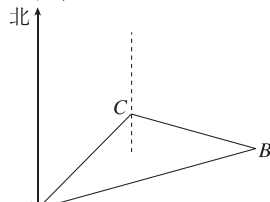
(2) 在 $\text{Rt} \triangle PMN$ 中, $PM=\frac{MN}{\sin 15^\circ}$, 在 $\triangle FPM$ 中, $\angle FMP=45^\circ+15^\circ=60^\circ, \angle FPM=180^\circ-60^\circ-15^\circ=105^\circ$, 则 $\angle MFP=180^\circ-105^\circ-60^\circ=15^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{PM}{\sin \angle MFP}=\frac{PF}{\sin \angle PMF}$, 则 $PF=\frac{\sin \angle PMF}{\sin \angle MFP} \cdot PM=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} \cdot \frac{MN}{\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{MN}{\sin^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}MN}{1-\cos 30^\circ}$. 在 $\text{Rt} \triangle PEF$ 中, $EF=PF \cdot \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}MN}{1-\cos 30^\circ} \cdot \sin 60^\circ=\frac{40\sqrt{3} \times (2-\sqrt{3})}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=120(\text{m})$. 故选 A.

变式题 B **[解析]** 如图, 过点 N 作 $NQ \perp AB$ 于点 Q , 过点 F 作 $FP \perp AB$ 于点 P , 交 CD 于点 G , 则四边形 $BMNQ$, 四边形 $BCGP$, 四边形 $CEFG$, 四边形 $BEFP$ 都是矩形, 所以 $BQ=MN=1$ m, $BM=QN, BP=CG=EF=1.5$ m, $FG=CE=2$ m, 所以 $DG=CD-CG=2.5-1.5=1$ (m). 在 $\text{Rt} \triangle AQN$ 中, $QN=\frac{AQ}{\tan \angle ANQ}=\frac{AB-1}{\tan 60^\circ}=\frac{AB-1}{\sqrt{3}}$, 所以 $FP=BM+MC+CE=\frac{AB-1}{\sqrt{3}}+94$, 由已知得 $\triangle DFG \sim \triangle AFP$, 所以 $\frac{FG}{DG}=\frac{FP}{AP}$, 即 $\frac{2}{1}=\frac{AB-1}{\frac{AB-1.5}{\sqrt{3}}+94}$, 所以 $AB=\frac{581+95\sqrt{3}}{11} \approx \frac{581+95 \times 1.732}{11} \approx 67.8(\text{m})$. 故选 B.



例 3 **[思路点拨]** 设所需时间为 t 小时, 用 t 表示出 AB 和 CB , 在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理可求出 t , 再用正弦定理可求出 $\angle CAB$, 进而可得方位角. **[解析]** 如图所示, 设所需时间为 t 小时, 则 $AB=10\sqrt{3}t$ 海里, $CB=10t$ 海里, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=45^\circ+(180^\circ-105^\circ)=120^\circ$, 由余弦定理得 $AB^2=AC^2+CB^2-2AC \cdot CB \cdot \cos 120^\circ$, 即 $(10\sqrt{3}t)^2=10^2+(10t)^2-2 \times 10 \times 10t \cos 120^\circ$, 整理得 $2t^2-t-1=0$, 可得 $t=1$, 所以 $AB=10\sqrt{3}$ 海里, $CB=10$ 海里, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CB}{\sin \angle CAB}=\frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 所以 $\sin \angle CAB=\frac{CB \sin \angle ACB}{AB}=\frac{10 \sin 120^\circ}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$, 所以 $\angle CAB=30^\circ$, 所以航行的方位角为 75° , 追上渔船所需的时间为 1 小时.

$\frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 所以 $\sin \angle CAB=\frac{CB \sin \angle ACB}{AB}=\frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$, 所以 $\angle CAB=30^\circ$, 所以舰艇航行的方位角为 75° , 追上渔船所需的时间为 1 小时.



变式题 (1) B (2) AC **[解析]** (1) 如图, 依题意知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=70^\circ+35^\circ=105^\circ, AB=40$ 海里, $BC=40\sqrt{2}$ 海里, 所以由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC=40^2+(40\sqrt{2})^2-2 \times 40 \times 40\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=3200+1600\sqrt{3}$, 所以 $AC=\sqrt{3200+1600\sqrt{3}}=20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (海里). 由正弦定理得 $\frac{40\sqrt{2}}{\sin \angle CAB}=\frac{20(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sin 105^\circ}$, 所以 $\sin \angle CAB=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 又因为 $\angle CAB$ 为锐角, 所以 $\angle CAB=45^\circ$, 所以航行的方向和距离分别为北偏东 $65^\circ, 20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 海里. 故选 B.

(2) 如图, 由题意可知 $\angle ADB=60^\circ, \angle BAD=75^\circ, \angle CAD=30^\circ$, $AB=12\sqrt{6}, AC=8\sqrt{3}$, 所以 $B=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$. 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 所以 $AD=\frac{12\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$, 故 A 正确; 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $CD=\sqrt{AC^2+AD^2-2AC \cdot AD \cos \angle CAD}$, 即 $CD=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+24^2-2 \times 8\sqrt{3} \times 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$, 故 B 错误; 由 B 项知 $CD=AC$, 所以 $\angle CDA=\angle CAD=30^\circ$, 所以灯塔 C 在 D 的南偏西 30° 方向上, 故 C 正确; 由 $\angle ADB=60^\circ$, 得 D 在灯塔 B 的北偏西 60° 方向上, 故 D 错误. 故选 AC.

第五单元 平面向量与复数

第 31 讲 平面向量的概念及其线性运算

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 大小 方向 大小 $|\vec{a}|$ $|\vec{AB}|$ 0
1 个单位长度 1 长度 方向 $\vec{a}=\vec{b}$
相同 相反 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 平行

【对点演练】

1. $\vec{CF}$ **[解析]** 将 $\vec{CD}$ 平移到 $\vec{AF}, \vec{EF}$ 平移到 $\vec{CB}$, 故 $\vec{BA}+\vec{CD}+\vec{EF}=\vec{CB}+\vec{BA}+\vec{AF}=\vec{CF}$.
2. $\frac{1}{2}$ **[解析]** $\because \lambda \vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 共线, $\therefore$ 存在实数 μ 使得 $\lambda \vec{a}+\vec{b}=\mu(\vec{a}+2\vec{b})$,

$$\therefore \begin{cases} \lambda=\mu, \\ 1=2\mu, \end{cases} \therefore \begin{cases} \lambda=\frac{1}{2}, \\ \mu=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. $\vec{b}-\vec{a}$ $-\vec{a}-\vec{b}$ **[解析]** 如图, $\vec{DC}=\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}, \vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=-\vec{OA}-\vec{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$.
4. 充分不必要 **[解析]** $\vec{a}=\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$, 充分性成立, $|\vec{a}|=|\vec{b}| \nRightarrow \vec{a}=\vec{b}$, 必要性不成立, 所以“ $\vec{a}=\vec{b}$ ”是“ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ”的充分不必要条件.
5. 平行四边形 **[解析]** 在平面四边形 ABCD 中, 因为 $\vec{AB}=\vec{DC}$, 所以 $AB=DC$, 且 $AB \parallel DC$, 所以四边形 ABCD 是

平行四边形.

6. [2, 6] **[解析]** 当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同时, $|\vec{a}-\vec{b}|=2$; 当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反时, $|\vec{a}-\vec{b}|=6$; 当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线时, $2 < |\vec{a}-\vec{b}| < 6$. 所以 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的取值范围为 $[2, 6]$.

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** 根据平面向量的基本概念, 对给出的说法进行分析, 判断正误即可.

AC **[解析]** 对于 A, 向量 $\vec{AB}$ 与向量 $\vec{BA}$ 的长度相等, 方向相反, 故 A 正确; 对于 B, 当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 且 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 为零向量时, 不满足条件, 故 B 错误; 对于 C, 两个有共同起点且相等的向量, 其终点必相同, 故 C 正确; 对于 D, 两个有公共终点的向量不一定是共线向量, 故 D 错误. 故

选 AC.

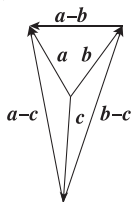
变式题 (1)BD (2)A [解析] (1)零向量是有方向的,其方向是任意的,故 A 错误;若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都是零向量,则它们必相等,故 B 正确;若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都为单位向量,则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 长度相等,但方向不一定相同,故 C 错误;由向量相等的定义知 D 正确. 故选 BD.

(2) $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ 等价于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向,当 $\mathbf{a} = 3\mathbf{b}$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向,故选 A.

例 2 [思路点拨] (1)利用平行四边形的特点及平行四边形法则与三角形法则判断即可. (2)根据充分性、必要性的定义,结合向量减法的几何意义判断条件间的推出关系,即可得到答案.

(1)C (2)A [解析] (1)在平行四边形中, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$. $\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|, \therefore |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|, \therefore$ 平行四边形 ABCD 是矩形. 故选 C.

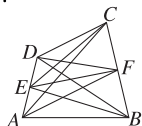
(2)如图,由 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq 1, |\mathbf{b} - \mathbf{c}| \leq 2$, 得 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b} - \mathbf{c}| \leq 3$, 充分性成立;当 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| \leq 3$ 时, 不一定有 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq 1, |\mathbf{b} - \mathbf{c}| \leq 2$, 必要性不成立. 综上, “ $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq 1, |\mathbf{b} - \mathbf{c}| \leq 2$ ” 是 “ $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| \leq 3$ ” 的充分不必要条件. 故选 A.



例 3 [思路点拨] (1)结合已知条件及向量减法的三角形法则求解即可. (2)根据向量的加减法法则,结合已知条件逐个分析判断即可.

(1)B (2)D [解析] (1)因为点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$, 所以 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DA}$, 所以 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD})$, 所以 $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CD} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$.

(2)如图,因为在平面四边形 ABCD 中, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,



$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 因为

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$, 所以 $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, 所以 A 不符合题意; 因为 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$, 所以 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, 所以 B 不符合题意; 因为 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$, 所以 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}$, 所以 C 不符合题意; 因为 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, 所以 D 符合题意. 故选 D.

例 4 [思路点拨] (1)由 O 是 $\triangle ABC$ 的重心可得 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$. 结合已知条件可得 λ 的值. (2)利用平面向量的线性运算求出 m, n , 即可求出 $m+n$.

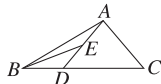
(1)C (2)B [解析] (1)由题知 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \lambda(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + (2-\lambda)\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$. $\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, $\therefore (2-\lambda)\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 又 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 不共线, $\therefore \lambda = 1$. 故选 C.

(2)因为 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$, 所以 $m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{6}$, 所以 $m+n = \frac{1}{2}$, 故选 B.

【应用演练】

1. B [解析] 如图, 由题

知 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} +$



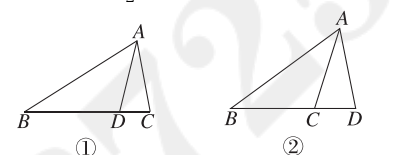
$\overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})] = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b}$. 故选 B.

2. AD [解析] 对于 A, 因为 D 是 AB 的中点, 所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. 因为 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$, 所以 A 正确; 对于 B, 由向量加法的三角形法则, 得 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$, 所以 B 错误; 对于 C, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, 所以 C 错误; 对于 D, 因为

D 是 AB 的中点, 所以 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, 所以 D 正确. 故选 AD.

3. BC [解析] 当点 D 在线段 BC 上时, 如图①, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$, 此时 $\frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$. 当点 D

在线段 BC 的延长线上时, 如图②, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b}$, 此时 $\frac{m}{n} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$. 故选 BC.



4. $\frac{20}{3}$ [解析] 由题知 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = -m\overrightarrow{OC}$, 则 $\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = -\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}$, 设 $-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$, 则 $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$, 因为 $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, 所以 A, B, D 三点共线, 则 $\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OD}$ 反向共线, 所以 $m > 0$, 所以 $\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{m}{5}$, 所以 $\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{m}{m+5}$, 因为 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 所以 $\frac{m}{m+5} = \frac{4}{7}$, 解得 $m = \frac{20}{3}$.

5. 2 [解析] 因为四边形 ABCD 是边长为 1 的正方形, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AB}$, 又 $|\overrightarrow{AB}| = 1$, 所以 $|\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}| = |2\overrightarrow{AB}| = 2$.

例 5 [思路点拨] (1)利用共线向量定理即可得到答案. (2)将 $\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ 化为 $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{PA}$, 根据共线向量定理可判定.

(1)C (2)B [解析] (1)因为 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{d}$ 共线, 所以存在 $k \in \mathbf{R}$, 使得 $\mathbf{d} = k\mathbf{c}$, 即 $\mathbf{a} + (2x-1)\mathbf{b} = kx\mathbf{a} + kb\mathbf{b}$. 因为向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 所以 $\begin{cases} kx = 1, \\ k = 2x-1, \end{cases}$ 整理可得 $x(2x-1) = 1$, 即 $2x^2 - x - 1 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 1$.

(2)由 $\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$, 得 $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{PB} = \lambda\overrightarrow{PA}$, 即 $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{PA}$, 则 $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{PA}$ 为共线向

量, 又 $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{PA}$ 有一个公共点 P, 所以 C, P, A 三点共线, 即点 P 在 AC 边所在直线上. 故选 B.

变式题 (1)A (2)C [解析] (1) $2\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$, 即 $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$, 因为点 A, B, C 是直线 l 上相异的三点, 所以点 A, B, C 三点共线, 则 $\frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} = 1$, 解得 $\lambda = -1$. 故选 A.

(2) $\because O$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且实数 x, y, z 满足 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \mathbf{0} (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$, $\therefore x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = -z\overrightarrow{OC}$. 若 $xyz = 0$, 则当 x, y, z 中有两个为 0 时, O 与 $\triangle ABC$ 的一个顶点重合. 当 x, y, z 中只有一个为 0 时, 假设 $x = 0 (y, z \neq 0)$, 可得 $y\overrightarrow{OB} = -z\overrightarrow{OC}$, $\therefore \overrightarrow{OB} = -\frac{z}{y}\overrightarrow{OC}$, $\therefore$ 向量 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 共线, $\therefore$ 点 O 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上. 若点 O 在 $\triangle ABC$ 的边所在直线上, 假设在 AB 上, 则向量 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 共线, $\therefore z = 0, \therefore xyz = 0$. $\therefore "xyz = 0"$ 是 “点 O 在 $\triangle ABC$ 的边所在直线上” 的充要条件. 故选 C.

第 32 讲 平面向量基本定理及坐标表示

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1)不共线 任一 有且只有一对
- (2)不共线 所有
- 互相垂直
- (1) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ $(\lambda x_1, \lambda y_1)$
(2) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

【对点演练】

- (9, 7) [解析] 依题意得 $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (5, 5)$, 所以 $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2(2, 1) + (5, 5) = (9, 7)$.
- $-\frac{3}{49}$ [解析] $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7} \times \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$, 故 $\lambda\mu = -\frac{1}{7} \times \frac{3}{7} = -\frac{3}{49}$.
- (2, 2) 或 (3, 1) [解析] 由题意可知 $\overrightarrow{P_1 P_2} = (3, -3)$. 若 $\overrightarrow{P_1 P} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1 P_2}$, 则点 P 的坐标为 (2, 2); 若 $\overrightarrow{P_1 P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{P_1 P_2}$, 则点 P 的坐标为 (3, 1).
- ② [解析] 两个不共线的向量可以构成一个基底, ①③④中两向量共线, ②中 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{e}_2$ 不共线. 故填②.
- 2 或 -1 [解析] $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2x - 2, 3 - x)$, $\therefore (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \parallel \mathbf{a}$, $\therefore 2x - 2 = x(3 - x)$, 即 $x^2 - x - 2 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -1$.
- $(-\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$ 或 (1, 0) [解析] 由点 P 在直线 AB 上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{PB}|$, 可得 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$. 当 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ 时, 设 $P(a, b)$, 则 $(a + 3, b - 4) = 2(-1 - a, 2 - b)$, 解得 $a = -\frac{5}{3}, b = \frac{8}{3}$, 此时点 P 的坐标为 $(-\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$. 当 $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$ 时, 设 $P(m, n)$, 则 $(m + 3, n - 4) = -2(-1 - m, 2 - n)$, 解得 $m = 1, n = 0$, 此时点 P 的坐标为 (1, 0). 综上, 点 P 的坐标为 $(-\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$ 或 (1, 0).

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1)将 $\overrightarrow{AG}$ 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 表

示出来,比较系数得到 x, y 的值,即可求解。(2)根据条件,结合图形,利用向量的中线公式,得到 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE})$,再利用向量的线性运算,即可求解。

(1)A (2)C [解析] (1)连接 BD , 设 AC 与 BD 相交于点 O , 则 O 为 AC, BD 的中点, 因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$, 所以 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, 又 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 所以 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$, 所以 $x + 2y = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. 故选 A.

(2)因为点 F 为 DE 的中点, 所以 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE})$, 又 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EC}$, 所以 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{8}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$. 故选 C.

变式题 (1)A (2)A [解析] (1)如图, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BD}$, 又因为

$\overrightarrow{OE} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{BD}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{8}, \mu = \frac{3}{8}$, 故 $\lambda - \mu = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{4}$. 故选 A.

(2)选取 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ 为基底, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HF} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{GH} = -2x\overrightarrow{AB} + 2x\overrightarrow{AC} + 3y\overrightarrow{AB} - 2y\overrightarrow{AC} = (-2x + 3y)\overrightarrow{AB} + (2x - 2y)\overrightarrow{AC}$, $\therefore \begin{cases} -2x + 3y = 3, \\ 2x - 2y = 1, \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{9}{2}, \\ y = 4, \end{cases}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{GH}$. 故选 A.

例 2 [思路点拨] (1)代入各点坐标即可求解。(2)根据题意建立平面直角坐标系, 然后表示出 a, b, c 的坐标, 代入 $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$) 中可求出 λ, μ 的值, 从而可求得结果。

(1)B (2)-4 [解析] (1)因为 $A(-1, 1), B(2, 3), C(-6, 5)$, 所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[(3, 2) + (-5, 4)] = \frac{1}{2}(-2, 6) = (-1, 3)$. 故选 B.

(2)根据题意建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $a = (0, 4), b = (-1, 6) = (-1, -2) + (0, 4), c = (2, 0) = (7, 2) - (5, -2)$, 所以 $\lambda a + \mu b = \lambda(-1, -2) + \mu(6, -4) = (-\lambda + 6\mu, -2\lambda - 4\mu)$, 因为 $c = \lambda a + \mu b$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 所以 $(-\lambda + 6\mu, -2\lambda - 4\mu) = (2, 0)$, 所以 $\begin{cases} -\lambda + 6\mu = 2, \\ -2\lambda - 4\mu = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = 2, \\ \mu = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以

$$\frac{\lambda}{\mu} = -4.$$

变式题 (1)A (2)D [解析] (1) $\overrightarrow{AB} = (3, 1), \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-4, -3) - (3, 1) = (-7, -4)$.

(2)建立如图所示的平面直角坐标系, 若 $A(0, 0), B(2, 0), |\overrightarrow{AC}| = 1, \angle BAC = 120^\circ$, 则 $C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. 设

$\triangle ABC$ 的外心为 $O(x, y)$, 由 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$, 得 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, 解得 $x = 1$, 由 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$, 得 $\sqrt{1^2 + y^2} = \sqrt{(1+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$, 解得 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 可得 $O(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 则 $\overrightarrow{AO} = (1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 又 $\overrightarrow{AC} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 故 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}) = \lambda(2, 0) + \mu(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 得 $\begin{cases} 2\lambda - \frac{1}{2}\mu = 1, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{5}{6}, \\ \mu = \frac{4}{3}, \end{cases}$ 故 $\lambda + \mu = \frac{13}{6}$.

例 3 [思路点拨] (1)根据向量的坐标运算求得 $2a - b$, 结合 $a \parallel (2a - b)$, 列出方程, 即可求解。(2)设出点 D 的坐标, 求出 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ 的坐标, 利用向量共线构造方程组求解。

(1)C (2)A [解析] (1)由向量 $a = (-1, 4), b = (3, -2\lambda)$, 可得 $2a - b = (-5, 8 + 2\lambda)$, 因为 $a \parallel (2a - b)$, 所以 $-1 \times (8 + 2\lambda) = 4 \times (-5)$, 解得 $\lambda = 6$. 故选 C.

(2)设 $D(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AD} = (x, y - 2), \overrightarrow{BC} = (4, 3)$, 因为 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, 所以 $\begin{cases} 4 = 2x, \\ 3 = 2(y - 2), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = \frac{7}{2}, \end{cases}$ 所以顶点 D 的坐标为 $(2, \frac{7}{2})$. 故选 A.

变式题 (1)ABD (2)3 [解析] (1)由题意得 $ma + c = (3m - 1, m + 2), a + nb = (3 + 2n, 1 + 3n)$. 由 $(ma + c) \parallel (a + nb)$ 可得 $(3 + 2n)(m + 2) - (1 + 3n)(3m - 1) = 0$, 整理得 $mn = n + 1$. A 中, $2 \times 1 = 1 + 1$, 满足题意; B 中, $0 \times (-1) = -1 + 1$, 满足题意; C 中, $3 \times 2 \neq 2 + 1$, 不满足题意; D 中, $(-1) \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + 1$, 满足题意. 故选 ABD.

(2) $\because \overrightarrow{OA} = (-1, k), \overrightarrow{OB} = (1, 2), \overrightarrow{OC} = (k + 2, 0), \therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 2 - k), \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (k + 1, -2). \therefore A, B, C$ 三点共线, $\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}, \therefore (k + 1)(2 - k) = -2 \times 2$, 又 $k > 0, \therefore k = 3$.

拓展应用 2 等和线求最值范围问题 [典型例题]

例 1 D [解析] 由题意知, 向量 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 且点 D 在线段 BC 上(不包括端点), 由等和线定理可得 $x + y = 1$, 且 $x > 0, y > 0$, 故 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = (\frac{1}{x} + \frac{2}{y})(x + y) = \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} + 3 \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3$, 当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$, 即 $x = \sqrt{2} - 1, y = 2 - \sqrt{2}$ 时取等号, 故 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小

值为 $2\sqrt{2} + 3$, 故选 D.

例 2 $\frac{8}{3}$ [解析] 方

法一: 如图, 作 BC 的平行线, 与圆 O 相切于点 P , 与直线 AB 相交于点 E , 与直线 AC 相交于点 F , 设 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AE} + \mu\overrightarrow{AF}$, 则 $\lambda + \mu = 1, \therefore BC \parallel EF, \therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = k$, 则 $k \in [0, \frac{4}{3}]$, $\therefore \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AE} + \mu\overrightarrow{AF} = \lambda k\overrightarrow{AB} + \mu k\overrightarrow{AC}, \therefore x = \lambda k, y = \mu k, \therefore 2x + 2y = 2(\lambda + \mu)k = 2k \leq \frac{8}{3}$.

方法二: 如图, 过点 P 作 BC 的平行线, 与直线 AB 相交于点 E , 与直线 AC 相交于点 F , 设 AP 与 BC 相交于点 D . 由等和线定理知, 当 AP 过圆心 O 并且 A, P 位于 O 点两侧时, $x + y$ 取得最大值, 此时 $x + y = \frac{AP}{AD} = \frac{4}{3}, \therefore 2x + 2y$ 的最大值为 $\frac{8}{3}$.

【巩固演练】

1. B [解析] 方法一(常规方法): $\because E$ 为线段 AO 的中点, $\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BD}, \therefore \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}$,

则 $\lambda + \mu = \frac{3}{4}$.

方法二(等和线法): 如图, 延长 BE , 交 AD 于 F , 过点 E 作 AD 的平行线, 设 $\lambda + \mu = k$, 则 $k = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{4}$, 即 $\lambda + \mu = k = \frac{3}{4}$.

2. A [解析] 由重心的性质可得 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 又 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3x}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$, 由 M, G, N 三点共线, 得 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{3y} = 1$, 即 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

3. C [解析] 方法一: 根据题意, 将图形特殊化, 如图, 设 AD 垂直平分 BC , 且 AD 与 BC 交于点 O , 因为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 2, 所以 $DO = 2AO$. 当点 P 与点 A 重合时, 可得 $\overrightarrow{AP} = \mathbf{0}$, 此时 $\lambda = \mu = 0$, 即 $\lambda + \mu$ 的最小值为 0; 当点 P 与点 D 重合时, 可得 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AO} = 3 \times (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, 此

时 $\lambda = \mu = \frac{3}{2}$, 即 $\lambda + \mu$ 的最大值为 3. 所以 $\lambda + \mu$ 的取值范围为 $[0, 3]$. 故选 C. 方法二: 因为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 2, 所以 A, D 到 BC 的距离之比为 1:2, 过点 P 作与 BC 平行的直线 EF , EF 交直线 AC 于 E , 交直线 AB 于 F , 如图所示. 由等和线定理得, 当 P 与 D 重合时, $\lambda + \mu$ 的最大值为 3, 当 P 与 A 重合时, $\lambda + \mu$ 的最小值为 0, 所以

$\lambda + \mu$ 的取值范围为 $[0, 3]$, 故选 C.

4. $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$ [解析] 方

法一: 如图, 取 AC 的中点 D, 连接 BD, 则

$D(-1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{AP} =$

$\lambda \overrightarrow{AB} + 2\mu \overrightarrow{AD}$, 可得 $\angle ABD = 45^\circ$, 作 BD 的平行线, 与圆 O 相切于点 P_0 , 与 x 轴相交于点 M, 由等和线定理知当 P 在 P_0 处时 $\lambda + 2\mu$ 最大, 易知 $\angle P_0MO = 45^\circ$, 连接 AP_0 与 BD 交于点 N, 连接 OP_0 , 因为 $|OP_0| = 1$, 所以 $|OM| = \sqrt{2}$. 设 $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$, 则 $m + n = 1$, 由三角形相似知 $\frac{|AP_0|}{|AN|} = \frac{|AM|}{|AB|}$, 则 $\overrightarrow{AP_0} = \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \overrightarrow{AN}$, 此时 $\lambda \overrightarrow{AB} + 2\mu \overrightarrow{AD} = \frac{|AM|}{|AB|} \cdot (m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD})$, 所以 $\lambda + 2\mu = \frac{|AM|}{|AB|}$.

($m+n$) = $\frac{|AM|}{|AB|}$, 故 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为 $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{2+\sqrt{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{3}$.

方法二: 设 $P(x, y)$, 又 $A(-2, 0)$, $B(-\frac{1}{2}, 0)$, $C(0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AP} = (x+2, y)$, $\overrightarrow{AB} = (\frac{3}{2}, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1)$, 代入

$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 可得 $\begin{cases} x+2 = \frac{3}{2}\lambda + 2\mu, \\ y = \mu, \end{cases}$

则 $x+y+2 = \frac{3}{2}\lambda + 3\mu = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu)$, 所以 $\lambda + 2\mu = \frac{2}{3}(x+y+2)$. 由 $1 = x^2 + y^2 \geq 2xy$, 得 $xy \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 1 + 1 = 2$, 得 $x+y \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以 $\lambda + 2\mu = \frac{2}{3}(x+y+2) \leq \frac{2}{3}(\sqrt{2}+2) = \frac{2\sqrt{2}+4}{3}$, 即 $\lambda + 2\mu$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$.

5. $(1, \frac{5}{3})$

[解析] 如图, 设圆 C 与直线 BD 相切于点 E, 过 A 作 $AG \perp BD$ 于 G, 作直线 $l \parallel DB$, 且直线 l 与圆 C 相切于点 F, 连接 EF, 则 EF 过圆心, 且 $EF \perp BD$. 由图可知, 对圆 C 内任意一点 P, AP 在直线 AG 上的射影长度 d 满足 $AG < d < AG + EF$, 又 $AG = \frac{AD \cdot AB}{DB} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $EF = 2EC =$

$2CD \sin \angle ABD = \frac{2}{\sqrt{10}}$, 所以 $\frac{3}{\sqrt{10}} < d < \frac{5}{\sqrt{10}}$, 又 $\alpha + \beta = \frac{d}{AG}$, 所以 $1 < \alpha + \beta < \frac{5}{3}$.

第 33 讲 平面向量的数量积

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (2) $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ 0

(3) OM_1

2. ① $|\mathbf{a}| \cos \theta$ ② $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ③ $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$

④ $-\frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}{2}$ $|\mathbf{a}|^2$ $\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ ⑤ $\leq$

3. ① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ② $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$

③ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

4. $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ $x_1 x_2 + y_1 y_2$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \quad \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

【对点演练】

1. $63 \frac{16}{65}$ [解析] $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 5 + 4 \times 12 = 63$. 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{63}{5 \times 13} = \frac{63}{65}$, 所以 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{16}{65}$.

2. $\pm \frac{3}{4}$ [解析] 由题意知 $(\mathbf{a} + k\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - k\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - k^2 \mathbf{b}^2 = 9 - 16k^2 = 0$, 解得 $k = \pm \frac{3}{4}$.

3. $\sqrt{7}$ [解析] 因为 $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, 且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2} = \sqrt{4 + 2 \times 2 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} + 1} = \sqrt{7}$.

4. 16 [解析] 由 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 两边平方可得 $\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}^2$, 所以 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$, 所以 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4^2 - 0 = 16$.

5. $-3\sqrt{2}\mathbf{e}$ [解析] 向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{e}$ 上的投影向量为 $|\mathbf{a}| \cdot \cos 135^\circ \mathbf{e} = 6 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \mathbf{e} = -3\sqrt{2}\mathbf{e}$.

6. 菱形 [解析] $\because$ 平面四边形 ABCD 满足 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}$, $\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形, 又 $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 即 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\therefore$ 该平行四边形的对角线互相垂直, $\therefore$ 该四边形是菱形.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 思路一: 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ 为基底表示 $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}$, 再结合数量积的运算律运算求解; 思路二: 建系, 利用平面向量的坐标运算求解; 思路三: 利用余弦定理求出 $\cos \angle DEC$, 进而根据数量积的定义求解. (2) 根据已知条件可得向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 60° , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} |\mathbf{a}|^2$, 再利用数量积运算可得解.

(1) B (2) C [解析] (1) 方法一: 由题知 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 2$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = (\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 =$

$-1 + 4 = 3$. 故选 B. 方法二: 如图, 以 A 为原点, AB, AD 所在直线分别为 x, y 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $E(1, 0)$, $C(2, 2)$, $D(0, 2)$, 则 $\overrightarrow{EC} = (1, 2)$, $\overrightarrow{ED} = (-1, 2)$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = (1, 2) \cdot (-1, 2) = -1 + 4 = 3$. 故选 B. 方法三: 由题意可得, $ED = EC = \sqrt{5}$, $CD = 2$, 在 $\triangle CDE$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle DEC = \frac{DE^2 + CE^2 - DC^2}{2DE \cdot CE} = \frac{5 + 5 - 4}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = |\overrightarrow{EC}| |\overrightarrow{ED}| \cos \angle DEC = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 3$. 故选 B.

(2) 由 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 及向量加减法的几何意义, 可得向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 60° , $\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} |\mathbf{a}|^2$, $\therefore \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^2 =$

$\frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \frac{3}{2} \mathbf{a}^2$. 故选 C.

变式题 (1) 11 (2) D [解析] (1) 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{1}{3}$, 又 $|\mathbf{a}| = 1$,

$|\mathbf{b}| = 3$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta = 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1$, 所以 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 2 \times 1 + 3^2 = 11$.

(2) 方法一: 以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x, y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $A(3, 0)$, $B(0, 4)$. 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 则 $\overrightarrow{PA} = (3 - \cos \theta, -\sin \theta)$, $\overrightarrow{PB} = (-\cos \theta, 4 - \sin \theta)$, $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (3 - \cos \theta)(-\cos \theta) + (-\sin \theta)(4 - \sin \theta) = -3\cos \theta - 4\sin \theta + 1 = -5\sin(\theta + \varphi) + 1 \in [-4, 6]$ (其中 $\tan \varphi = \frac{3}{4}$). 故选 D.

方法二: 由题易知 $\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CB} \rangle = \pm \sin \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CA} \rangle$, 且 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1 + 3\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CA} \rangle + 4\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CB} \rangle + 0 = 1 + 3\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CA} \rangle \pm 4\sin \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CA} \rangle = 1 + 5\sin(\langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CA} \rangle \pm \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{3}{4}$, $\therefore -4 \leq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 6$. 故选 D.

例 2 [思路点拨] 由 $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$ 得 $\mathbf{b}^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 由 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$, 得 $4|\mathbf{b}|^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$, 联立即可得解.

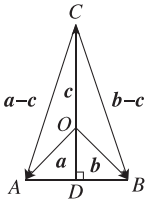
B [解析] 因为 $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$, 所以 $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0$, 得 $|\mathbf{b}|^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. ①. 因为 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$, 所以 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2 = 4$, 即 $|\mathbf{a}|^2 + 4|\mathbf{b}|^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$, 得 $4|\mathbf{b}|^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. ②. 由 ①② 得 $|\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{2}$, 则 $|\mathbf{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 B.

例 3 [思路点拨] (1) 结合已知条件, 利用平面向量模与数量积的运算即可得解. (2) 首先由 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 及 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{2}$ 得到 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. 思路一: 利用已知及向量数量积的定义, 求出 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ 及 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}|$, $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$, 进而求出 $\cos \langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle$; 思路二: 由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是单位正交向量, 作出图形, 在特殊三角形中表示出已知和待求向量, 用三角恒等变换求解; 思路三: 由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是单位正交向量, 令 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$, 求出 $\mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}$, 利用坐标运算求解.

(1) C (2) D [解析] (1) 因为向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, -1)$, 所以 $|\mathbf{a}| = 2$, 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 由 $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = 2|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, 得 $\mathbf{a}^2 - 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 = 4(\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2)$, 即 $3\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 又 $|\mathbf{b}| = 1$, 则有 $12 + 24\cos \theta = 0$, 得 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, 又 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

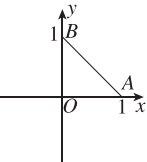
(2) 因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c}$, 即 $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}^2$, 即 $1 + 1 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. 方法一: 因为 $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{a} - (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{b} - (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, 所以 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 2\mathbf{a}^2 + 5\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b}^2 = 4$, 且 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(2\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$, $|\mathbf{b} - \mathbf{c}| = |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, 所以 $\cos \langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})}{|\mathbf{a} - \mathbf{c}| |\mathbf{b} - \mathbf{c}|} = \frac{4}{5}$. 故选 D.

方法二:如图,设 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, 由题知, $OA = OB = 1$, $OC = \sqrt{2}$, $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形, AB 边上的高 $OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\triangle ACB$ 是等腰三角形, C, O, D 共



线,所以 $CD = CO + OD = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \angle ACD = \frac{3}{\sqrt{10}}$, 所以 $\cos \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = \cos \angle ACB = \cos 2 \angle ACD = 2 \cos^2 \angle ACD - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{5}$.

方法三:如图,令向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的起点均为 O , 终点分别为 A, B , 以 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 的方向分别为 x, y 轴的正方向建立平面直角坐标系, 则 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b} = (-1, -1)$, 所以 $\vec{a} - \vec{c} = (2, 1)$, $\vec{b} - \vec{c} = (1, 2)$, 则 $\cos \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = \frac{(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})}{|\vec{a} - \vec{c}| |\vec{b} - \vec{c}|} = \frac{2+2}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.



例4 [思路点拨] 思路一:根据 $\vec{a}, \vec{b}$ 的坐标得到 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 再根据向量垂直列出方程即可得到答案;思路二:根据向量的坐标运算求出 $\vec{a} + \lambda\vec{b}, \vec{a} + \mu\vec{b}$, 再根据向量垂直的坐标表示即可得到答案.

D [解析] 方法一:因为 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$, 所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 又 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$, 所以 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \lambda\mu\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$, 即 $2 + 2\lambda\mu = 0$, 所以 $\lambda\mu = -1$, 故选 D.

方法二:因为 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1)$, 所以 $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$, $\vec{a} + \mu\vec{b} = (1 + \mu, 1 - \mu)$, 由 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \mu\vec{b})$ 得 $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$, 即 $2 + 2\lambda\mu = 0$, 所以 $\lambda\mu = -1$, 故选 D.

例5 [思路点拨] (1) 根据 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, 即可得到答案. (2) 由已知条件及投影向量的定义可得答案.

(1) A (2) -2 [解析] (1) 因为 $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影

向量为 $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \frac{5\pi}{6} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{4} \vec{a}$, 故选 A.

(2) $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = 2\vec{a}$, 故 $\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 2$, 则 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 + \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 - \frac{1}{2} \lambda = 2$, 解得 $\lambda = -2$.

【应用演练】

1. D [解析] 因为 $\vec{b} \perp (\vec{b} - 4\vec{a})$, 所以 $\vec{b} \cdot (\vec{b} - 4\vec{a}) = 0$, 即 $4 + x(x - 4) = 0$, 解得 $x = 2$, 故选 D.

2. D [解析] 因为 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, 所以 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 3$, 故 $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3$, 即 $1 + 2 \times 1 \times 2 \times \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 4 = 3$, 即 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\frac{1}{2}$, 所以 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 故选 D.

3. D [解析] 因为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\vec{b}$, 所以 $-\frac{1}{2}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, 所以 $-\frac{1}{2}\vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$, 故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$, 所以 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} =$

$$\sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{1 + 4 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{7}, \text{ 故选 D.}$$

4. D [解析] 因为 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 2$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 所以 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$, 即 $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{a}^2 = -1$. 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$, 因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 故选 D.

例6 [思路点拨] (1) 由 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 得到 $2a \cdot \sqrt{2} \sin B = \sqrt{6}b$, 再利用正弦定理求解; (2) 根据 $a = 3$ 和 $A = \frac{\pi}{3}$, 利用正弦定理得到外接圆的直径, 进而得到 b, c , 然后用 B 表示出 $b + c$, 结合 B 的取值范围即可求解.

解: (1) $\because \vec{m} \perp \vec{n}, \therefore 2a \cdot \sqrt{2} \sin B - \sqrt{6}b = 0$, 即 $2a \cdot \sqrt{2} \sin B = \sqrt{6}b$, 由正弦定理得 $2 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B$.

$\because \sin B \neq 0, \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $\because A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

(2) $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore$ 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$

$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}, \therefore b = 2\sqrt{3} \sin B, c = 2\sqrt{3} \sin C,$

$\therefore b + c = 2\sqrt{3}(\sin B + \sin C) = 2\sqrt{3} \left[\sin B + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - B \right) \right] =$

$2\sqrt{3} \left(\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right) =$

$2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \right) = 2\sqrt{3} \times$

$\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B + \frac{1}{2} \cos B \right) = 6 \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right),$

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore 0 <$

$B < \frac{\pi}{2}, 0 < C = \frac{2}{3}\pi - B < \frac{\pi}{2}$, 得 $\frac{\pi}{6} <$

$B < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} <$

$\sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$, 则 $3\sqrt{3} < 6 \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) \leq 6,$

$\therefore 3 + 3\sqrt{3} < b + c \leq 6$, 又 $\because a = 3,$

$\therefore 3 + 3\sqrt{3} < a + b + c \leq 9, \therefore \triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(3 + 3\sqrt{3}, 9]$.

变式题 (1) A (2) B

[解析] (1) 如图, 以 E 为原点, 建立平面直角坐标系. 由题意知, 梯形 $ABCD$ 的高

为 $\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-1}{2}\right)^2} =$

$2\sqrt{3}$, 则 $A(-4, 0), C(-1, 2\sqrt{3}), D(-2,$

$2\sqrt{3})$. 因为以 E 为圆心, 1 为半径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 所以可设点 $P(\cos \theta,$

$\sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi$, 则 $\vec{DP} \cdot \vec{AC} = (\cos \theta + 2,$

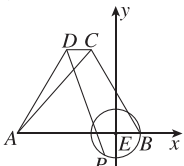
$2\sqrt{3} \sin \theta - 12) \cdot (3, 2\sqrt{3}) = 3 \cos \theta + 6 +$

$2\sqrt{3} \sin \theta - 12 = 2\sqrt{3} \sin \theta + 3 \cos \theta - 6 =$

$\sqrt{21} \sin(\theta + \varphi) - 6$, 其中 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故当

$\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $(\vec{DP} \cdot \vec{AC})_{\max} = \sqrt{21} - 6$, 故选 A.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 设 BC 的中点为 D , 连接



OD , 因为 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 所以 $OD \perp BC$, 即 $\vec{OD} \cdot \vec{BC} = 0$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{BC} + \vec{BA} \cdot \vec{CA} = (\vec{OD} + \vec{DB} + \vec{BA}) \cdot \vec{BC} + \vec{BA} \cdot \vec{CA} = -\frac{1}{2} \vec{BC}^2 + \vec{BA}^2 = -2 + c^2$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin \angle BAC} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, 则 $c = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin C \leq$

$\frac{4}{\sqrt{3}}$, 当且仅当 $\sin C = 1$, 即 $C = \frac{\pi}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $\vec{OA} \cdot \vec{BC} + \vec{BA} \cdot \vec{CA}$ 的最大值为 $-2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{10}{3}$, 故选 B.

拓展应用 3 极化恒等式

【典型例题】

例1 (1) C (2) B

[解析] (1) 方法一: 如图, 依题意得 $\vec{AE} = \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AB}$, $\vec{EB} = -\vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AB}$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{EB} = \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2 - |\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, 故选 C.

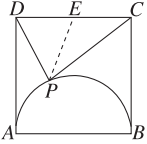
方法二: 设 F 是 AB 的中点, 连接 EF , 则 $EF = 1$, 根据极化恒等式得 $\vec{AE} \cdot \vec{EB} = -\vec{EA} \cdot \vec{EB} = -(|\vec{EF}|^2 - \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2) = -\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$, 故选 C.

(2) 方法一: 因为圆的半径为 1, BC 是直径, $\vec{BF} = 2\vec{FO}$, 所以 $|\vec{OF}| = \frac{1}{3}$. $\vec{FD} = \vec{OD} - \vec{OF} = \vec{OE} - \vec{OF}$, 因为 DE 是直径, 所以 $\vec{OD} = -\vec{OE}$, $|\vec{OD}| = |\vec{OE}| = 1$, 则 $\vec{FD} \cdot \vec{FE} = (\vec{OD} - \vec{OF}) \cdot (\vec{OE} - \vec{OF}) = (-\vec{OE} - \vec{OF}) \cdot (\vec{OE} - \vec{OF}) = -(\vec{OE} + \vec{OF}) \cdot (\vec{OE} - \vec{OF}) = |\vec{OF}|^2 - |\vec{OE}|^2 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$, 故选 B.

方法二: 依题意, O 为 DE 的中点, $DE = 2$, 因为 $\vec{BF} = 2\vec{FO}$, 所以 $|\vec{FO}| = \frac{1}{3}$, 根据极化恒等式得 $\vec{FD} \cdot \vec{FE} = |\vec{FO}|^2 - \frac{1}{4} |\vec{DE}|^2 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$, 故选 B.

例2 (1) B (2) $\frac{1}{2}$ 0

[解析] (1) 取 CD 的中点 E , 连接 PE , 如图所示, 则 PE 的取值范围是 $\left[\frac{AD}{2},$



$AE]$, 即 $[2, 2\sqrt{5}]$, 根据极化恒等式得

$\vec{PC} \cdot \vec{PD} = \vec{PE}^2 - \frac{\vec{CD}^2}{4} = \vec{PE}^2 - 4$, 所以

$\vec{PC} \cdot \vec{PD} \in [0, 16]$, 故选 B.

(2) 由对称性可得 O 为 MN 的中点, 所以

$\vec{PO} = \vec{PN} + \vec{NO} = \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{NM} = \vec{b} +$

$\frac{1}{2} (\vec{PM} - \vec{PN}) = \vec{b} + \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2} \vec{a} +$

$\frac{1}{2} \vec{b} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$, 所以 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. 由极化恒

等式得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{PO}^2 - \vec{OM}^2 = 4 - \vec{OM}^2$, 所以

当 $|\vec{OM}|$ 取得最大值 2 时, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 取得最小值 0.

【巩固演练】

1. A [解析] 连接 OE , 由已知得 $MN = 2BC = 4$, $OM = 2$, $OE = 1$. 由极化恒等式可得 $\vec{EM} \cdot \vec{EN} = \vec{EO}^2 - \vec{OM}^2 = 1 - 4 = -3$, 故选 A.

2. B [解析] 方法一:依题意, D 是 BC 边的中点, E, F 是线段 AD 的两个三等分点 (E 靠近点 A), 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}\right) = \frac{4\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{4} = \frac{36\overrightarrow{FD}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{4} = 7, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{4\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2}{9} = \frac{16\overrightarrow{FD}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{9} = 2$, 因此 $\overrightarrow{FD}^2 = 1, \overrightarrow{BC}^2 = 8$, 故 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FD}\right) = \frac{4\overrightarrow{FD}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{4} = \frac{4 \times 1 - 8}{4} = -1$. 故选 B.

方法二:依题意, D 是 BC 边的中点, E, F 是线段 AD 的两个三等分点 (E 靠近点 A), $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 7, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = 2$, 由极化恒等式得 $|\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 = 7, \frac{4}{9}|\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 = 2$, 解得 $|\overrightarrow{AD}| = 3, |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}$, 所以 $DF = 1, \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FC} = |\overrightarrow{FD}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 = 1 - 2 = -1$, 故选 B.

3. C [解析] 方法一:取 AB 的中点 D , 连接 CD, OD , 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}^2 = -1$, 又 $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以 $|\overrightarrow{CD}|_{\min} = 2 - \sqrt{3}, |\overrightarrow{CD}|_{\max} = 2 + \sqrt{3}$, 即 $2 - \sqrt{3} \leq |\overrightarrow{CD}| \leq 2 + \sqrt{3}$, 所以 $(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})_{\min} = 6 - 4\sqrt{3}, (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})_{\max} = 6 + 4\sqrt{3}$. 故 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围为 $[6 - 4\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}]$. 故选 C.

方法二:取 AB 的中点 D , 连接 CD, OD , 因为圆 O 的半径为 2, $AB = 2$, 所以由极化恒等式得 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2 - 1$, 又 $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以 $|\overrightarrow{CD}|_{\min} = 2 - \sqrt{3}, |\overrightarrow{CD}|_{\max} = 2 + \sqrt{3}$, 即 $2 - \sqrt{3} \leq |\overrightarrow{CD}| \leq 2 + \sqrt{3}$, 所以 $(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})_{\min} = 6 - 4\sqrt{3}, (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})_{\max} = 6 + 4\sqrt{3}$. 故 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围为 $[6 - 4\sqrt{3}, 6 + 4\sqrt{3}]$. 故选 C.

4. C [解析] 方法一:设 AC 与 BD 的交点为 O , 由 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$, 得 $|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OA}$, 同理可得 $|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OB}, |\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC}, |\overrightarrow{PD}|^2 = |\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OD}$, 所以 $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 4|\overrightarrow{PO}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 4|\overrightarrow{PO}|^2 + 10 \geq 10$, 当点 P 与点 O 重合时, 等号成立, 故选 C.

方法二:设 AC 与 BD 的交点为 O , 连接 PO , 由平行四边形的性质得 $AC^2 + (2PO)^2 = 2(PA^2 + PC^2), BD^2 + (2PO)^2 = 2(PD^2 + PB^2)$, 所以 $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = \frac{1}{2}[AC^2 + (2PO)^2 + BD^2 + (2PO)^2] = 4PO^2 + 10 \geq 10$, 当点 P 与点 O 重合时, 等号成立, 故选 C.

5. -4 [解析] 取 MN 的中点 E , 连接 AE , 由极化恒等式, 得 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{AE}^2 - \frac{1}{4} \times 4 = \overrightarrow{AE}^2 - 1 = 4, \therefore \overrightarrow{AE}^2 = 5, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2 = 5 - \frac{1}{4} \times 36 = -4$.

6. 9 [解析] 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}^2 -$

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2 = 9 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2 = -7, \text{得 } |\overrightarrow{BD}| = 8, \text{则 } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2 = 25 - \frac{1}{4} \times 64 = 9.$$

7. $2\sqrt{3}$ [解析] 取 BC 的中点 Q , 连接 PQ , 则 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{1}{4}[(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})^2 - (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC})^2] = \frac{1}{4}(4|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2), \therefore \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})^2 - 3\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 4|\overrightarrow{PQ}|^2 - \frac{3}{4}(4|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2) = |\overrightarrow{PQ}|^2 + \frac{3}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 \geq 2|\overrightarrow{PQ}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \geq \sqrt{3}S_{\text{四边形}ABCD} = 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}|$ 且 $PQ \perp BC$ 时取等号.

第 34 讲 平面向量的综合问题

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) 向量 (2) 向量问题 (3) 向量运算

【对点演练】

1. 5 [解析] $\because \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \therefore AC \perp BD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5$.

2. $-\frac{1}{2}$ [解析] $\because \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \therefore \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{12}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}^2 = \frac{1}{12} \times 2 \times 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6} \times 2^2 = -\frac{1}{2}$.

3. $15\sqrt{3}$ 正北

[解析] 如图, 设 $\overrightarrow{AD}$ 表示小船的航行速度, $\overrightarrow{AB}$ 表示河水的速度, 以 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC}$ 就是小船实际航行的速度. 由已知条件及余弦定理可得 $|\overrightarrow{AC}| = 15\sqrt{3}, \therefore \angle BAC = \angle ACD = 90^\circ, \therefore$ 小船实际航行速度的大小为 $15\sqrt{3}$ km/h, 方向为正北.

4. 重 [解析] 由原等式得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 即 $\overrightarrow{AP} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 根据向量加法的平行四边形法则知 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ (D 为 BC 的中点), 所以点 P 的轨迹一定过 $\triangle ABC$ 的重心.

5. 外心 [解析] 设 D 为 BC 的中点, 可得 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}, \therefore \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}), \therefore 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 2\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}), \therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}, \therefore \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) = 0$, 即 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \therefore \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{PD}, \therefore$ 点 P 一定是 $\triangle ABC$ 的外心.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 由三角形“四心”的性质即可判断出答案. (2) 根据给定条件, 利用数量积的运算律及数量积的定义可得 AP 平分 $\angle BAC, BP$ 平分 $\angle ABC$, 结合三角形内心的定义判断即可.

(1) B (2) D [解析] (1) $\because \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}, \therefore \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$, 设 AB 的中点为 D , 则 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MD}, \therefore C, M, D$ 三点共线, 即 M 为 $\triangle ABC$ 的中线 CD

上的点, 且 $MC = 2MD, \therefore M$ 为 $\triangle ABC$ 的重心. $\because |\overrightarrow{NA}| = |\overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{NC}|, \therefore NA = NB = NC, \therefore N$ 为 $\triangle ABC$ 的外心. $\because \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}, \therefore \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0$, 即 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \therefore PB \perp AC$, 同理可得 $PA \perp BC, PC \perp AB, \therefore P$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 故选 B.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\overrightarrow{PA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right) = 0$, 得 $\overrightarrow{PA} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \overrightarrow{PA} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, 即 $\overrightarrow{AP} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \overrightarrow{AP} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, 由 $\overrightarrow{PB} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} - \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\right) = 0$, 同理得 $\overrightarrow{BP} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \overrightarrow{BP} \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$, 显然 $\overrightarrow{AP} \neq \mathbf{0}, \overrightarrow{BP} \neq \mathbf{0}$, 则

即 P 与 A 不重合, 同理 $\overrightarrow{BP} \neq \mathbf{0}$, 则 $|\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAC = |\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAB$, 即 $\cos \angle PAC = \cos \angle PAB$, 可得 $\angle PAC = \angle PAB$, 于是 AP 平分 $\angle BAC$, 同理得 BP 平分 $\angle ABC$, 所以点 P 是 $\triangle ABC$ 的内心. 故选 D.

变式题 (1) 重心 (2) 1 [解析] (1) 因为 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{NC}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \overrightarrow{AM} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = \frac{\mu+1}{\mu} \overrightarrow{AN} = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \overrightarrow{AN}$, 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\lambda}\right) \overrightarrow{AM} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\mu}\right) \overrightarrow{AN}$, 又因为 $\lambda + \mu = \lambda\mu$, 且 $\lambda\mu \neq 0$, 即 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1$, 所以 $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\lambda}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\mu}\right) = 1$, 所以 G, M, N 三点共线, 故 MN 恒过 $\triangle ABC$ 的重心.

(2) $\because \overrightarrow{OH} = m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AO}, \therefore \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AO} = m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \therefore \overrightarrow{AH} = (m-1)\overrightarrow{OA} + m(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. 取 BC 的中点 D , 连接 OD , 则 $OD \perp BC, \therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \therefore \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (m-1)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + 2m\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC}, \therefore 0 = (m-1)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + 0, \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0, \therefore m-1=0$, 解得 $m=1$.

例 2 [思路点拨] (1) 由题意设 $a=5m, b=5m, c=8m (m>0)$, 由余弦定理结合 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -28$ 可求出 m , 从而可求出 a, b, c 的值, 求得 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 R 及 $\cos \angle GCB$, 结合向量数量积的定义求解即可. (2) 记 $|\overrightarrow{AB}| = c, |\overrightarrow{AC}| = b, |\overrightarrow{BC}| = a$, 由余弦定理及基本不等式求出 bc 的最大值, 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$, 求数量积后得出结论.

(1) B (2) $\frac{11}{8}$ [解析] (1) 由题意设 $a=5m, b=5m, c=8m (m>0)$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 由余弦定理, 得 $\cos \angle ACB = \frac{(5m)^2 + (5m)^2 - (8m)^2}{2 \times 5m \times 5m} = -\frac{7}{25}$. 因为 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -28$, 所以 $5m \times 5m \times \cos \angle ACB = -28$, 解得 $m=2$ (负值舍去), 所以 $a=10, b=10, c=16$. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 因为 $\sin \angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$,

所以 $2R = \frac{c}{\sin \angle ACB} = \frac{50}{3}$, 所以 $R = \frac{25}{3}$. 由 $\triangle ABC$ 为等腰三角形知

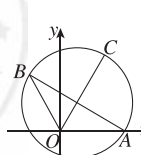
$\angle GCB = \frac{1}{2} \angle ACB$, 所以 $\cos^2 \angle GCB = \frac{1 + \cos \angle ACB}{2} = \frac{9}{25}$, 即 $\cos \angle GCB = \frac{3}{5}$, 所以 $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CG}| |\overrightarrow{CB}| \cos \angle GCB = \frac{25}{3} \times 10 \times \frac{3}{5} = 50$. 故选 B.

(2) 记 $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{AC}| = b$, $|\overrightarrow{BC}| = a$, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 即 $b^2 + c^2 - bc = 3$, 即 $b^2 + c^2 = 3 + bc$, 由基本不等式得 $3 + bc = b^2 + c^2 \geq 2bc$, 得 $bc \leq 3$, 当且仅当 $b = c = \sqrt{3}$ 时等号成立. 由题意知 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{8} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{8} \overrightarrow{AC}^2 + \frac{5}{12} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{8}(b^2 + c^2) + \frac{5}{12} bc \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}(b^2 + c^2) + \frac{5}{24} bc = \frac{1}{8}(3 + bc) + \frac{5}{24} bc = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} bc \leq \frac{11}{8}$, 当且仅当 $b = c = \sqrt{3}$ 时取等号, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最大值为 $\frac{11}{8}$.

变式题 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析] 设内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BC}^2$, 可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}^2$, 所以 $a \cos(\pi - B) + b \cos C = \frac{1}{2} a^2$, 可得 $2(-c \cos B + b \cos C) = a$, 由正弦定理得 $2 \sin B \cos C - 2 \sin C \cos B = \sin A$, 又因为 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 所以 $2 \sin B \cos C - 2 \sin C \cos B = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 所以 $\sin B \cos C = 3 \cos B \sin C$, 则 $\tan B = 3 \tan C$. 因为 B, C 为三角形的内角, 所以 $\tan C > 0$, 则 $\tan(B - C) = \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B \tan C} = \frac{2 \tan C}{1 + 3 \tan^2 C} = \frac{2}{\frac{1}{\tan C} + 3 \tan C} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\tan C} \times 3 \tan C} = 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $\frac{1}{\tan C} = 3 \tan C$, 即 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立, 所以 $\tan(B - C) \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\tan(B - C)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 3 [思路点拨] 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = (x, y)$, 根据已知设出 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的坐标, 由 $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \perp (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ 得到 C 在以 AB 为直径的圆上, 得出 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y$, 设 $x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, y = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$, 利用辅助角公式得到 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 的最大值.

C [解析] 令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = (x, y)$, 如图所示, 不妨令 $\mathbf{a} = (1, 0), \mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 如图



$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, 线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 因为 $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \perp (\mathbf{c} - \mathbf{b})$, 所以 C 在以 AB 为直径的圆上, 即在圆 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}$ 上. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = x - \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, 令 $x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, y = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta + \frac{3}{4} \sin \theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \in [-1, 1]$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right]$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 的最大值为 $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

变式题 B [解析] 方法一: 因为 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 所以 $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 1} = 2$. 由 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ 得 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2$, 即 $a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + c^2 = b^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + c^2$, 即 $1 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 3 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1$, 即 $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 1$. 设 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 θ , 则 $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 1 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \theta = 2|\mathbf{c}| \cos \theta$, 则当 $\cos \theta = 1$ 时, $|\mathbf{c}|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

方法二: $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 如图所示, 设 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, 设 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 由 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ 知, 点 C 在线段 AB 的垂直平分线上, 设 D 为 AB 的中点, 连接 OD , 则 $OD = 1$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最小值为点 O 到垂直平分线的距离, 即为 $\frac{1}{2} OD = \frac{1}{2}$. 故选 B.

方法三: $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 建立如图所示的平面直角坐标系, $A(0, 1), B(\sqrt{3}, 0)$. 设 $\mathbf{c} = (x, y)$, 由 $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ 知 $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + y^2}$, 所以 $y + 1 = \sqrt{3}x$, 则 $|\mathbf{c}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4x^2 - 2\sqrt{3}x + 1}$, 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 时, $|\mathbf{c}|$ 取到最小值 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

第 35 讲 复数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1) 虚数单位 i 实部 $b=0$ 虚部 $b \neq 0$
 $a=0$ 且 $b \neq 0$ (2) $a=c$ 且 $b=d$
 (3) $a=c$ 且 $b=-d$
 (4) $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$
- (1) $Z(a, b)$
- ① $(a+c) + (b+d)i$ ② $(a-c) + (b-d)i$
 ③ $(ac-bd) + (ad+bc)i$

$$\textcircled{4} \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

【对点演练】

- 3 [解析] 因为复数 $z = \frac{m^2+m-6}{m} + (m^2-2m)i$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} m \neq 0, \\ \frac{m^2+m-6}{m} = 0, \end{cases}$ 解得 $m = -3$.
- 3-4i [解析] $\because \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$, $\therefore \overrightarrow{CA}$ 在复平面对应的复数为 $-1-3i-(2+i) = -3-4i$.
- 12 26 [解析] $\because -3+2i$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0 (p, q \in \mathbf{R})$ 的一个根, $\therefore -3-2i$ 是此方程的另一个根, $\therefore (-3+2i)+(-3-2i) = -\frac{p}{2}, (-3+2i)(-3-2i) = \frac{q}{2}$, 解得 $p=12, q=26$.
- 1 [解析] 因为 $\frac{3-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$, 所以复数 $\frac{3-i}{1-i}$ 的虚部为 1.
- 0 二 [解析] 由 $(a-i)(1-2i) = -3+bi$, 得 $a-2-(1+2a)i = -3+bi$, 由复数相等的充要条件得 $\begin{cases} a-2 = -3, \\ -(1+2a) = b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \end{cases}$ 所以 $a+b=0, z = -1+i$, 所以复数 z 在复平面对应的点为 $(-1, 1)$, 位于第二象限.
- 1+i [解析] 由 $(z-1) \cdot i^{2025} = 1-2i$, 得 $(z-1)i = 1-2i$, 则 $z-1 = \frac{1-2i}{i} = \frac{(1-2i)i}{i^2} = -2-i$, 则 $z = -1-i$, 所以 $z = -1-i$.
- 3 [解析] 因为 $(3+i)(1-ai) = (3+a) + (1-3a)i, a \in \mathbf{R}$, 且 $(3+i)(1-ai)$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} 3+a=0, \\ 1-3a \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a = -3$.
- 2π [解析] 设 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 由 $1 \leq |z-1+i| \leq \sqrt{3}$ 可得 $1 \leq (a-1)^2 + (b+1)^2 \leq 3$, 即复数 z 在复平面对应的点构成的图形是以 $(1, -1)$ 为圆心, 分别以 $1, \sqrt{3}$ 为半径的圆所夹的圆环, 其面积为 $3\pi - \pi = 2\pi$.

● 课堂考点探究

探究点一

- C** [解析] 因为 $(a+i)(1-ai) = a - a^2i + i + a = 2a + (1-a^2)i = 2$, 所以 $\begin{cases} 2a=2, \\ 1-a^2=0, \end{cases}$ 解得 $a=1$. 故选 C.
- C** [解析] 由题意得 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. 对于 A 选项, 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 不合题意, 故 A 错误; 对于 B 选项, 当 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时, $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, 不合题意, 故 B 错误; 对于 C 选项, 当 $\theta = \frac{2023\pi}{4}$ 时, $\sin\left(\frac{2023\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 506\pi = 0$, 故 C 正确; 对于 D 选项, 当 $\theta = \frac{2025\pi}{4}$ 时, $\sin\left(\frac{2025\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 不合题意, 故 D 错误. 故选 C.
- B** [解析] $(\sqrt{3}+i)z+i = \sqrt{3}$, 故 $z = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{3-i^2} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 故 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 故选 B.
- BC** [解析] 对于 A, 若 z 为纯虚数, 则 $a^2-1=0$ 且 $a+1 \neq 0$, 故 $a=1$, 故 A 错

误;对于B,若 z 在复平面内对应的点位于第二象限,则 $\begin{cases} a^2-1<0, \\ a+1>0, \end{cases}$ 解得 $-1<a<1$,即 $a\in(-1,1)$,故B正确;对于C,若 $a=0$,则 $z=-1+i$,则 $\bar{z}=-1-i$,故C正确;对于D,若 $a=0$,则 $|z|=\sqrt{2}$,故D错误.故选BC.

探究点二

- D [解析] 因为 z 在复平面内对应的点的坐标是 $(-1, \sqrt{3})$,所以根据复数的几何意义可知, $z=-1+\sqrt{3}i$,由共轭复数的定义可知, $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$. 故选D.
- B [解析] 设复数 z, i 在复平面上对应的点分别为 $P, C(0, 1)$,因为 $|z-i|=2$,所以 $|PC|=2$,故复数 z 在复平面上对应的点的轨迹是以 C 为圆心,2为半径的圆. 故选B.
- B [解析] 若复数 z 满足 $|z|=|z-2-2i|$,则由复数的几何意义可知复数 z 对应的点的集合是线段 OA 的垂直平分线,其中 $O(0, 0), A(2, 2)$,所以 $|z|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}|OA|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$. 故选B.
- 2 [解析] 依题意, $z_2=i\cdot(1+i)=i-1$,则 $z_2-z_1=i-1-(1+i)=-2$,所以 $|\frac{z_1}{z_2}|=|z_2-z_1|=2$.

探究点三

- C [解析] 由题可得 $z=(1+i)(z-1)$,

$$\text{则 } z = \frac{1+i}{i} = 1-i.$$

- D [解析] $z_1=(1+i)(1-2i)=1-2i+i-2i^2=3-i$,则 $|z-z_1|=|-2i-3+i|=-3-i|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$. 故选D.
- C [解析] $\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(1-i)}{5}=1-i$. 故选C.
- AD [解析] 设 $z=a+bi, w=c+di$,其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$,且复数 z, w 均不为0.对于选项A,由 $z=a+bi$ 可得 $\bar{z}=a-bi$,所以 $z \cdot \bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$,即 $\frac{|z|}{z}=\frac{1}{\bar{z}}$,A中说法一定正确;对于选项B, $\bar{z}+w=a+c+(b+d)i$,所以 $|z+w|^2=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2, (|z|+|w|)^2=(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2=a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$,当 $|z+w|=|z|+|w|$,即 $|z+w|^2=(|z|+|w|)^2$ 时,可得 $ac+bd=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$,两边平方整理得 $2abcd=a^2d^2+b^2c^2$,所以 $|z+w|=|z|+|w|$ 不一定成立,B中说法不一定正确;对于选项C, $\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}$

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{z}{w}\right)=\frac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2+d^2}, \frac{\bar{z}}{w}=\frac{a-bi}{c+di}=\frac{(a-bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-bd-(ad+bc)i}{c^2+d^2}, \text{当 } \left(\frac{z}{w}\right)=\frac{\bar{z}}{w} \text{ 时, 可}$$

- 得 $bd+adi=0$,所以 $\left(\frac{z}{w}\right)=\frac{\bar{z}}{w}$ 不一定成立,C中说法不一定正确;对于选项D,若 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2} \in \mathbf{R}$,则 $b=0$,所以 $z=a \in \mathbf{R}$,D中说法一定正确. 故选AD.
- BCD [解析] 因为复数 a, b 满足 $a^2-2a+2=0, b^2-2b+2=0$,所以复数 a, b 均是方程 $x^2-2x+2=0$ 的根,在复数范围内,解方程 $x^2-2x+2=0$ 得 $x_1=1+i, x_2=1-i$,所以 $a=b=1+i$ 或 $a=b=1-i$ 或 $a=1+i, b=1-i$ 或 $a=1-i, b=1+i$.当 $a=b=1+i$ 时, $ab=(1+i)^2=2i$;当 $a=b=1-i$ 时, $ab=(1-i)^2=-2i$;当 $a=1+i, b=1-i$ 时, $ab=(1+i)(1-i)=2$;当 $a=1-i, b=1+i$ 时, $ab=(1-i)(1+i)=-2$. 故选BCD.

第六单元 数列

第36讲 数列的概念与简单表示法

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 确定的顺序 每一个数 序号 n

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

2. 有限 无限 $> < =$

3. 序号 n 数列的第 n 项 a_n

【对点演练】

- $\frac{1}{2n-1}$ [解析] 因为 $\frac{1}{2 \times 1 - 1} = 1$,
 $\frac{1}{2 \times 2 - 1} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2 \times 3 - 1} = \frac{1}{5}, \frac{1}{2 \times 4 - 1} = \frac{1}{7}, \frac{1}{2 \times 5 - 1} = \frac{1}{9}, \cdots$,所以 $a_n = \frac{1}{2n-1}$.
- $2n+2$ [解析] $\because a_1 = S_1 = 1+3=4$,
 $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2+3n) - [(n-1)^2+3(n-1)] = 2n+2 (n \geq 2)$,当 $n=1$ 时,
 $2n+2=4=a_1, \therefore a_n = 2n+2$.
- 70 [解析] $\because 5-1=4, 12-5=7, 22-12=10, \therefore$ 相邻两个图形的小石子数的差值依次增加3, $\therefore$ 第5个五边形数是 $22+13=35$,第6个五边形数是 $35+16=51$,第7个五边形数是 $51+19=70$.
- 22 [解析] 由题意可得数列的通项公式为 $a_n = \sqrt{2n-1}$,又 $\sqrt{43} = \sqrt{2n-1}$,解得 $n=22$,所以 $\sqrt{43}$ 是这个数列的第22项.
- 30 [解析] 因为 $a_n = -n^2+11n = -(n-\frac{11}{2})^2 + \frac{121}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$,所以当 $n=5$ 或6时, a_n 取得最大值30.
- $a_n = \begin{cases} 6, n=1, \\ 2n+2, n \geq 2 \end{cases}$ [解析] $S_n = n^2+3n+2$,当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 6$,当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)^2+3(n-1)+2$,所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2+3n+2) - [(n-1)^2+3(n-1)+2] = 2n+2$,当 $n=1$ 时, $a_1=6$ 不满足上式,所以 $a_n = \begin{cases} 6, n=1, \\ 2n+2, n \geq 2 \end{cases}$.

● 课堂考点探究

- 例1 [思路点拨] (1)观察每项的特点,分别确定项的符号以及每一项的联系,即可找出数列的通项公式.(2)代入各选项依次验证前4项即可.
(1)D (2)ABD [解析] (1)通过观察这一列数发现,奇数项为正,偶数项为负,故第 n 项的正负可以用 $(-1)^{n+1}$ 表示.而

$$1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0, -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1, \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4, \cdots,$$

故数列的通项公式可以为 $a_n =$

$$(-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, \text{ 故选D.}$$

(2)令 $n=1, 2, 3, 4$,分别代入各选项进行验证,易知C选项中 $a_3=-2$,不合题意,A,B,D均符合题意. 故选ABD.

变式题 (1)C (2)(15, 26) [解析] (1)因为数列9.99, 999.999, 9999.9999, ...的通项公式为 $10^n - 1$,所以数列0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...的通项公式为 $\frac{1}{10^n} (10^n - 1) =$

$$1 - \frac{1}{10^n}, \text{ 而数列 } 0.4, 0.44, 0.444, 0.4444, \cdots \text{ 的每一项都是上面数列对应项的 } \frac{4}{9}, \text{ 所以数列 } 0.4, 0.44, 0.444, 0.4444, \cdots \text{ 的一个通项公式为 } a_n = \frac{4}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right), \text{ 故选C.}$$

$$(2) \text{ 依题意, 数列的各项依次写为 } \frac{\sqrt{2^2+1}}{1 \times 3}, \frac{\sqrt{3^2+1}}{2 \times 4}, \frac{\sqrt{4^2+1}}{a}, \frac{\sqrt{b}}{4 \times 6}, \frac{\sqrt{6^2+1}}{5 \times 7}, \cdots, \text{ 则数列的通项公式为 } a_n = \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n(n+2)}, \text{ 所以 } a_3 = \frac{\sqrt{4^2+1}}{3 \times 5}, a_4 = \frac{\sqrt{5^2+1}}{4 \times 6}, \text{ 即 } a=15, b=26, \text{ 所以有序数对 } (a, b) \text{ 为 } (15, 26).$$

例2 [思路点拨] (1)利用 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1, \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 进行求解.(2)先将 $n=1$ 代入题干表达式计算出 a_1 的值,当 $n \geq 2$ 时,由 $a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3}$,可得 $a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1} = \frac{n}{3}$,两式相减进一步计算即可推导出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$$(1)a_n = \begin{cases} -12, n=1, \\ 2n-15, n \geq 2 \end{cases} \quad (2)a_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, n=1, \\ \frac{1}{3^n}, n \geq 2 \end{cases}$$

[解析] (1)当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1-14+1=-12$;当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2-14n-(n-1)^2+14(n-1) = 2n-15. \because a_1=-12$ 不符合该式, $\therefore a_n = \begin{cases} -12, n=1, \\ 2n-15, n \geq 2. \end{cases}$

(2)由题意,当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{2}{3}$,当 $n \geq 2$ 时,由 $a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3}$,可得 $a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1} = \frac{n}{3}$,两式相减,可得 $3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3} - \frac{n}{3} = \frac{1}{3}$,解得 $a_n = \frac{1}{3^n}. \because$ 当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{2}{3}$ 不满足上式, $\therefore a_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, n=1, \\ \frac{1}{3^n}, n \geq 2. \end{cases}$

变式题 (1)B (2) $a_n = 4n+1$

[解析] (1)由题设得 $a_{n+1} = 2^n a_n$,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^n$,所以 $\frac{a_2}{a_1} = 2^1, \frac{a_3}{a_2} = 2^2, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2^{n-1} (n \geq 2)$,将上面 $n-1$ 个式子

两端分别相乘,可得 $\frac{a_n}{a_1} = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$

$(n \geq 2)$,即 $a_n = 2 \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} (n \geq 2)$,所以 $a_8 = 2^{29}$. 故选B.

(2)因为 $S_n = 2n^2 + a_n - n - 1$ ①,所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2(n-1)^2 + a_{n-1} - (n-1) - 1$ ②,①-②得 $a_{n-1} = 4n-3 (n \geq 2)$,则 $a_n = 4n+1$,当 $n=1$ 时, $a_1 = 4 \times 1 + 1 = 5$,符合上式,故 $a_n = 4n+1$.

例3 [思路点拨] (1)先化简得 $a_n = 1 + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{n - \sqrt{2024}} (n \in \mathbf{N}^*)$,再借助函数的单调性分析得解.(2)由递增数列的定义可推出 λ 的取值,然后利用 $\lambda < 1$ 得

$\{a_n\}$ 为递增数列, 即可得解.

(1)B (2)C [解析] (1) $a_n =$

$$\frac{n - \sqrt{2025}}{n - \sqrt{2024}} = \frac{n - \sqrt{2024 + \sqrt{2024} - \sqrt{2025}}}{n - \sqrt{2024}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{n - \sqrt{2024}}}{1} =$$

$1 + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{n - \sqrt{2024}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 因为 $44^2 < 2024 < 45^2$, 所以当 $n \leq 44$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 递增, 且 $a_n > 1$; 当 $n \geq 45$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 递减, 且 $a_n < 1$. 故在数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项中最小项和最大项分别是 a_{45}, a_{44} . 故选 B.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $a_{n+1} - a_n = [(n+1)^2 - 3\lambda(n+1)] - (n^2 - 3\lambda n) = (n^2 + 2n + 1 - 3\lambda n - 3\lambda) - (n^2 - 3\lambda n) = 2n + 1 - 3\lambda > 0$, 即 $3\lambda < 2n + 1$. 由于 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $3\lambda < 2 \times 1 + 1 = 3$, 解得 $\lambda < 1$; 反之, 当 $\lambda < 1$ 时, $a_{n+1} - a_n > 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 “ $\lambda < 1$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 为递增数列” 的充要条件.

变式题 (1)D (2)-6 [解析] (1) 若数列 $\{a_n + n^2\}$ 是等差数列, 则数列的首项为 $a_1 + 1^2 = 6$, 公差为 $(a_2 + 2^2) - (a_1 + 1^2) = 7$, 所以 $a_n + n^2 = 6 + (n-1) \times 7 = 7n - 1$, 则 $a_n = -n^2 + 7n - 1$.

方法一: $a_{n+1} - a_n = [-(n+1)^2 + 7(n+1) - 1] - (-n^2 + 7n - 1) = -2n + 6$, 则当 $n = 1, 2, 3$ 时, $a_{n+1} - a_n \geq 0$, 则 $a_4 = a_3 > a_2 > a_1$; 当 $n \geq 4$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$, 故此时数列 $\{a_n\}$ 递减, 则 $a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > \dots$. 综上, $\{a_n\}$ 的最大项为 $a_3 = a_4 = 11$. 故选 D.

方法二: $a_n = -n^2 + 7n - 1 = -\left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{45}{4}$, 结合二次函数的性质可得 $n = 3$ 或 $n = 4$ 时 a_n 取最大值, 所以 $\{a_n\}$ 的最大项为 $a_3 = a_4 = 11$, 故选 D.

(2) 依题意, $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 所以

$a_2 = -3, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, a_5 = 2, \dots$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的数列, 且每 4 项的积为 $2 \times (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = 1$.

又 $2026 = 506 \times 4 + 2$, 所以 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2026} = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{506} \cdot a_1 \cdot a_2 = -6$.

例 4 [思路点拨] 思路一: 根据递推公式 $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$, 利用累加法公式 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 (n \geq 2)$ 求出 a_n , 再求 a_7 即可; 思路二: 由递推公式得 $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 再利用累加法公式直接求 a_7 .

C [解析] 方法一: 由题得 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = (2n-3) + (2n-5) + \dots + 3 + 1 + 1 = \frac{(n-1)[(2n-3)+1]}{2} + 1 = n^2 - 2n +$

$2 (n \geq 2)$, 所以 $a_7 = 7^2 - 2 \times 7 + 2 = 37$.

方法二: 由题意得 $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 所以 $a_7 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 37$. 故选 C.

例 5 [思路点拨] 利用累乘法即可求得 a_n .

D [解析] 因为 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n} (n \geq 2)$, 所以

以 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$, 上

述各式相乘得 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n} (n \geq 2)$, 因为 $a_1 =$

1 , 所以 $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 2)$, 经检验, $a_1 = 1$ 满

足 $a_n = \frac{1}{n}$, 所以 $a_n = \frac{1}{n}$. 故选 D.

例 6 [思路点拨] 利用构造法及等比数列的定义, 结合等比数列的通项公式即可

求解.

$a_n = 2^{n+1} - 3$ [解析] 由 $a_n = 2a_{n-1} + 3 (n \geq 2)$, 得 $a_n + 3 = 2(a_{n-1} + 3)$, 即 $\frac{a_n + 3}{a_{n-1} + 3} = 2 (n \geq 2)$, 又 $a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$, $\therefore$ 数列 $\{a_n + 3\}$ 是首项为 4, 公比为 2 的等比数列, $\therefore a_n + 3 = 4 \times 2^{n-1} (n \geq 2)$, 即 $a_n = 2^{n+1} - 3 (n \geq 2)$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2^{1+1} - 3 = 1$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n+1} - 3$.

例 7 [思路点拨] 将 $a_{n+1} = 3a_n - 2^n$ 变形构造 $a_{n+1} - 2^{n+1} = 3(a_n - 2^n)$, 利用等比数列的定义结合其通项公式, 求出 $\{a_n - 2^n\}$ 的通项公式, 移项即可求解.

$a_n = 3^n + 2^n$ [解析] 由已知得 $a_{n+1} - 2^{n+1} = 3(a_n - 2^n)$, 又 $a_1 - 2 = 3 \neq 0$, 所以数列 $\{a_n - 2^n\}$ 是首项为 3, 公比 $q = 3$ 的等比数列, 所以 $a_n - 2^n = 3^n$, 即 $a_n = 3^n + 2^n$.

例 8 [思路点拨] 将 $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$ 两边取

倒数, 即可得到 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3$, 从而求出

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式, 即可得解.

C [解析] 因为 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n} = 3 + \frac{1}{a_n}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} -$

$\frac{1}{a_n} = 3$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项, 3 为公

差的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_n} = 1 + 3(n-1) =$

$3n - 2$, 则 $a_n = \frac{1}{3n-2}$, 所以 $a_{34} =$

$\frac{1}{3 \times 34 - 2} = \frac{1}{100}$. 故选 C.

【应用演练】

1. B [解析] 因为 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - n$, 所以 $a_2 - a_1 = -1, a_3 - a_2 = -2, a_4 - a_3 = -3$, 累加可得 $a_4 - a_1 = -1 - 2 - 3 = -6$, 则 $a_4 = a_1 - 6 = 1 - 6 = -5$. 故选 B.

2. C [解析] 设 $a_{n+1} + x = \frac{2}{3}(a_n + x)$, 即 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3}x$, 所以 $-\frac{1}{3}x = 4$, 解得 $x = -12$, 所以 $a_{n+1} - 12 = \frac{2}{3}(a_n - 12)$, 所以 $\{a_n - 12\}$ 是首项为 $a_1 - 12 = -11$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列, 所以 $a_n - 12 = -11 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 所以 $a_n = 12 - 11 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 故选 C.

3. $(2n-1) \cdot 2^n$ [解析] 数列 $\{a_n\}$ 中, 由

$a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+2}$, 得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 2$, 即

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 2$, 因此数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{2^1} =$

1 为首项, 2 为公差的等差数列, 则 $\frac{a_n}{2^n} =$

$1 + 2(n-1) = 2n - 1$, 所以 $a_n = (2n - 1) \cdot 2^n$.

4. $\frac{48}{5}$ [解析] 由 $a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n$ 可得

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n}{n+1}$, 累乘可得 $\frac{a_{10}}{a_6} = \frac{a_{10}}{a_9} \cdot \frac{a_9}{a_8} \cdot$

$\frac{a_8}{a_7} \cdot \frac{a_7}{a_6} = \frac{2 \times 9}{9+1} \times \frac{2 \times 8}{8+1} \times \frac{2 \times 7}{7+1} \times$

$\frac{2 \times 6}{6+1} = \frac{48}{5}$.

5. $\frac{1}{1013}$ [解析] 因为 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$, 所以

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$, 又 $a_1 = 2$, 所以 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$, 故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 以 $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列, 则 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n$, 得 $a_n = \frac{2}{n}$, 所以 $a_{2026} = \frac{2}{2026} = \frac{1}{1013}$.

第 37 讲 等差数列及其前 n 项和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

$$1. a_{n+1} - a_n = d \quad \frac{a+b}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_m + (n-m)d (n, m \in \mathbf{N}^*)$$

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \frac{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}{2}$$

$$2. (1)(n-m)d \quad (2)a_k + a_l = a_m + a_n$$

$$(3)md$$

$$3. (1)dn + a_1 - d \quad \text{一次函数} \quad \text{孤立}$$

$$(2)\frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n \quad \text{二次函数}$$

孤立

【对点演练】

1. 6 [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 7d = 20, \\ a_1 + 6d = 12, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 0, \\ d = 2, \end{cases}$

$\therefore a_4 = a_1 + 3d = 6$.

2. 1 [解析] $a_2 + a_4 = 2a_3 = 6 \Rightarrow a_3 = 3$, $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 = 45 \Rightarrow a_5 = 5$, 故

$$d = \frac{5-3}{2} = 1.$$

3. 20 [解析] 设物体经过 t 秒降落到地面. 物体在降落过程中, 每一秒降落距离依次构成首项为 4.9, 公差为 9.8 的等差数列, 所以 $4.9t + \frac{1}{2}t(t-1) \times 9.8 = 1960$, 即 $4.9t^2 = 1960$, 可得 $t = 20$.

4. 5 或 6 [解析] 由 $|a_3| = |a_9|$, 得 $|a_1 + 2d| = |a_1 + 8d|$, 解得 $a_1 = -5d$ 或 $d = 0$ (舍去), 则 $a_1 + 5d = a_6 = 0$, 又 $d < 0$, $\therefore a_5 > 0$, 故使前 n 项和 S_n 取最大值的正整数 n 的值是 5 或 6.

5. $\frac{8}{75} < d \leq \frac{3}{25}$ [解析] 由题意可得

$$\begin{cases} a_{10} > 1, \\ a_9 \leq 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{25} + 9d > 1, \\ \frac{1}{25} + 8d \leq 1, \end{cases} \text{ 所以 } \frac{8}{75} <$$

$$d \leq \frac{3}{25}.$$

6. -10 100 [解析] 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = \frac{20 \times [9 + (10-20)]}{2} = -10$. 由 $a_n = 0$ 得

$n = 10$, 所以当 $1 \leq n < 10$ 时, $a_n > 0$, 当 $n > 10$ 时, $a_n < 0$, 所以 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{20}| = (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) - (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}) = S_{10} - (S_{20} - S_{10}) = 2S_{10} - S_{20} = 2 \times \frac{10 \times (9+0)}{2} - (-10) = 100$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 由等差数列求和公式结合已知列方程即可求解. (2) 根据等差数列的性质可得 a, b, m 的等式关系, 再计算 $\frac{a}{b}$ 即可.

(1)D (2) $\frac{5}{11}$ [解析] (1) 由题意设等

差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $\frac{S_5}{5} - \frac{S_2}{2} =$

$$\frac{1}{5} \left(5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d \right) - \frac{1}{2} (2a_1 + d) =$$

$\frac{3}{2}d=6$, 所以 $d=4$, 从而 $a_7-a_4=3d=12$. 故选 D.

(2) 因为 $m, a, 4m, b$ 为等差数列连续的四项, 所以 $2a=m+4m, 8m=a+b$, 所以 $a=\frac{5m}{2}, b=\frac{11m}{2}$, 所以 $\frac{a}{b}=\frac{5}{11}$.

变式题 (1) C (2) 95 [解析] (1) 因为等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{11}=a_1+a_2+a_3=a_1+10d$, 所以 $a_2+a_3=10d$, 所以 $a_1+d+a_1+2d=10d$, 所以 $2a_1=7d$, 则 $a_1=\frac{7}{2}d$. 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 所以公差 d 为正整数, 因为 $a_2<10$, 所以 $a_1+d=\frac{7}{2}d+d=\frac{9}{2}d<10$, 所以 $0<d<\frac{20}{9}$, 因为公差 d 为正整数, 所以

$d=1$ 或 $d=2$. 当 $d=1$ 时, $a_1=\frac{7}{2}d=\frac{7}{2}\times 1=\frac{7}{2}$, 不合题意, 舍去; 当 $d=2$ 时, $a_1=7$, 符合题意, 所以 $d=2$. 故选 C.

(2) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_3+a_4=2a_1+5d=7, 3a_2+a_5=4a_1+7d=5$, 所以 $a_1=-4, d=3$, 所以 $S_{10}=10a_1+45d=95$.

例 2 [思路点拨] (1) 先令 $n=1$ 求出 $a_1=1$, 再由 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$, 得到 $S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geq 2)$, 从而得数列 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 则 $S_n=\sqrt{n}$, 进而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 假设存在 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} 满足题意, 结合 (1) 中结论得出 $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}$, 两边平方后推出等式不成立, 故假设不成立, 从而得出结论.

解: (1) 当 $n=1$ 时, $2a_1=a_1+\frac{1}{a_1}$, 又 $a_n>0$, 所以 $a_1=1$, 当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}$, 即 $2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$, 整理得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$, 又 $S_1^2=a_1^2=1$, 所以数列 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 则 $S_n^2=n$. 因为 $\{a_n\}$ 的各项都为正数, 所以 $S_n>0$, 所以 $S_n=\sqrt{n}$.
当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也满足上式, 所以 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

(2) 不存在, 理由如下: 由 (1) 可得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$.
假设存在满足题意的连续三项 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} , 使得 $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}}$ 构成等差数列, 则 $2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})+(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})$, 即 $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}$, 等式两边平方, 得 $k+1+k+2\sqrt{k+1}\sqrt{k}=k-1+k+2+2\sqrt{k-1}\sqrt{k+2}$, 即 $(k+1)k=(k-1)(k+2)$, 整理得 $k^2+k=k^2+k-2$, 显然等式不成立, 因此假设错误, 所以数列 $\{a_n\}$ 中不存在连续的三项 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} , 使得 $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}}$ 构成等差数列.

变式题 (1) C [解析] 方法一: 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$, 所以 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$, 因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则甲是乙的充分条件. 反之, 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-$

$\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$ 为常数, 设 $\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$, 则 $S_n=na_{n+1}-t\cdot n(n+1)$, 所以 $S_{n-1}=(n-1)a_n-t\cdot n(n-1)(n\geq 2)$, 两式相减得 $a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2tn(n\geq 2)$, 即 $a_{n+1}-a_n=2t(n\geq 2)$, 当 $n=1$ 时, $S_1=a_1=a_2-2t$, 满足上式, 因此 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则甲是乙的必要条件. 所以甲是乙的充要条件. 故选 C.

方法二: 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 可得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$, 则 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)}{2}d$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为首项为 a_1 , 公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列, 即甲是乙的充分条件. 反之, 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则可设 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 D ,

故 $\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$, 即 $S_n=nS_1+n(n-1)D=na_1+n(n-1)D$, 利用公式 $a_n=\begin{cases} S_1, n=1, \\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2, \end{cases}$ 可得 $a_n=a_1+2(n-1)D$, 所以 $a_{n+1}-a_n=2D$, 即 $\{a_n\}$ 为公差为 $2D$ 的等差数列, 所以甲是乙的必要条件. 综上, 甲是乙的充要条件. 故选 C.

(2) 证明: 因为 $\frac{1}{2}a_{n+1}^2=S_{n+1}+S_n$ ①, 所以以当 $n\geq 2$ 时, $\frac{1}{2}a_n^2=S_n+S_{n-1}$ ②, ①-②得 $\frac{1}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)=a_{n+1}+a_n$, 整理得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$, 显然 $a_{n+1}+a_n>0$, 则 $a_{n+1}-a_n=2(n\geq 2)$, 由 $\frac{1}{2}a_2^2=S_2+S_1=2a_1+a_2$, 整理得 $a_2^2-2a_2-8=0$, 又 $a_2>0$, 所以 $a_2=4$, 则 $a_2-a_1=2$, 满足 $a_{n+1}-a_n=2$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列.

例 3 [思路点拨] (1) 利用下标和性质计算可得. (2) 推出数列 $\{a_n-3b_n\}$ 为等差数列, 由已知求出 $\{a_n-3b_n\}$ 的公差 d , 即可作答.

(1) C (2) 2029 [解析] (1) 因为 $\frac{1}{2}a_3-a_5=2$, 所以 $a_3-2a_5=4$, 又 $2a_5=a_3+a_7$, 所以 $a_3-(a_3+a_7)=4$, 解得 $a_7=-4$, 所以 $a_5+a_{10}-a_8=a_7+a_8-a_8=a_7=-4$. 故选 C.
(2) 因为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 所以数列 $\{a_n-3b_n\}$ 也为等差数列, 设其公差为 d , 因为 $a_1-3b_1=4, a_6-3b_6=9$, 所以 $5d=a_6-3b_6-(a_1-3b_1)=9-4=5$, 解得 $d=1$, 故 $a_{2026}-3b_{2026}=a_1-3b_1+2025d=2029$.

变式题 (1) C (2) 5 或 -5 [解析] (1) 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_1+a_2+a_3=3a_2=15$, 即 $a_2=5$, 又因为 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=\frac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=5(a_2+a_9)=100$, 即 $5+a_9=20$, 所以 $a_9=15$. 故选 C.
(2) 由题知 $a_1a_3+a_2a_7+a_3a_9+a_7a_8=a_3(a_1+a_9)+a_7(a_2+a_8)=2a_5a_3+2a_5a_7=2a_5(a_3+a_7)=4a_5^2=100$, 解得 $a_5=\pm 5$.

例 4 [思路点拨] (1) 根据等差数列中 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 成等差数列求解即可. (2) 运用等差数列的等和性及等差数列前 n 项和公式求解即可.
(1) C (2) C [解析] (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_4=1, S_8=4$, 所以 $S_4=1, S_8-S_4=3$, 故 $S_4, S_8-S_4, S_{12}-S_8, S_{16}-S_{12}, S_{20}-S_{16}$ 构成公差为 2 的等差数列, 所以 $S_{20}-S_{16}=1+(5-1)\times 2=9$, 即

$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=9$. 故选 C.

(2) 由等差数列的等和性可得, $\frac{a_3}{b_4+b_8}+\frac{a_9}{b_5+b_7}=\frac{a_3}{2b_6}+\frac{a_9}{2b_6}=\frac{a_3+a_9}{2b_6}=\frac{a_1+a_{11}}{b_1+b_{11}}=\frac{\frac{11}{2}(a_1+a_{11})}{\frac{11}{2}(b_1+b_{11})}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{2\times 11-3}{4\times 11-3}=\frac{19}{41}$. 故选 C.

变式题 B [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n+1$ 项, 则 $S_{\text{奇}}=a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2n+1}, S_{\text{偶}}=a_2+a_4+a_6+\dots+a_{2n}$, 中间项为 a_{n+1} , 故 $S_{\text{奇}}-S_{\text{偶}}=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\dots+(a_{2n+1}-a_{2n})=a_1+d+d+\dots+d=a_1+nd=a_{n+1}$, 所以 $a_{n+1}=S_{\text{奇}}-S_{\text{偶}}=319-290=29$, 故选 B.

例 5 [思路点拨] (1) 由 $S_5=S_9$ 得出 $a_1=-\frac{13}{2}d$, 代入 a_n 与 S_n , 对选项依次判断即可. (2) 由题意可得 $a_{30}<0, a_{31}>0$, 列出不等式组, 即可求解.
(1) ACD (2) (24, 25)

[解析] (1) $\because S_5=S_9, \therefore 5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d, \therefore a_1=-\frac{13}{2}d>0, \therefore d<0, \therefore a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{13}{2}d+(n-1)d=\left(n-\frac{15}{2}\right)d, S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{13}{2}dn+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}(n^2-14n)$. 对于 A, $S_n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}[(n-7)^2-49]$, $\because d<0, \therefore$ 当 $n=7$ 时, S_n 取最大值, $\therefore S_7$ 是数列 $\{S_n\}$ 中的最大项, 故选项 A 正确; 对于 B, $\because a_1>0, d<0, \therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 中的最大项为 a_1 , 故选项 B 错误; 对于 C, $S_{14}=\frac{d}{2}(14^2-14\times 14)=0$, 故选项 C 正确; 对于 D, $\because d<0, \therefore S_n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}n(n-14)>0$, 解得 $0<n<14, \therefore n\in\mathbf{N}^*, \therefore$ 满足 $S_n>0$ 的 n 的最大值为 13, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

(2) 由题意可得, $a_{30}<0, a_{31}>0$, 即 $\begin{cases} -600+24d<0, \\ -600+25d>0, \end{cases}$ 解得 $24<d<25$, 故 d 的取值范围为 (24, 25).

变式题 ABD [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 依题意 $(S_7-S_5)(S_7-S_4)=(a_4+a_5+a_6+a_7)(a_5+a_6+a_7)=6(a_5+a_6)a_6<0$, 所以 $a_5+a_6<0, a_6>0$, 又 $a_1<0$, 所以 $d>0, a_5+a_6<0, a_6>0$, A 选项正确. 因为 $S_7-S_3=2(a_5+a_6)<0, S_7-S_4=3a_6>0$, 所以 $S_4<S_7<S_3$, B 选项正确. 由于 $a_5+a_6<0, a_6>0$, 则 $a_5<0$, 所以等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为负数, 从第 6 项起为正数, 所以当 $n=5$ 时, S_n 最小, 所以 C 选项错误. $S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times 10=5(a_5+a_6)<0, S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\times 11=11a_6>0$, 所以当 $S_n<0$ 时, n 的最大值为 10, 所以 D 选项正确. 故选 ABD.

第 38 讲 等比数列及其前 n 项和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- q $a_n=a_1q^{n-1}$
 $a_n=a_mq^{n-m}(n, m\in\mathbf{N}^*)$ na_1
 $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\frac{a_1-a_nq}{1-q}$
- (1) $a_m\cdot q^{n-m}$ (2) $a_p\cdot a_q=a_k^2$

【对点演练】

1. -3 或 $\frac{3}{2}$ [解析] 由 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_3(q^{-2} + q^{-1} + 1)$, 得 $q^{-2} + q^{-1} + 1 = 3$, 即 $2q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = 1$ 或 $q = -\frac{1}{2}$, $\therefore a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{3}{2}$ 或 -3 .

2. 2 -2 [解析] 依题意得 $q \neq 1$, 因为 $\begin{cases} 8a_2 + a_5 = 0, \\ S_5 = 22, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 8a_1q + a_1q^4 = 0, \\ \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 22, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = -2. \end{cases}$

3. 3 [解析] $\because a_1, a_{13}$ 是方程 $x^2 - 13x + 9 = 0$ 的两根, $\therefore a_1 + a_{13} = 13, a_1 \cdot a_{13} = 9$, $\therefore a_1 > 0, a_{13} > 0, a_1 \cdot a_{13} = a_2 \cdot a_{12} = a_7^2 = 9$, 又数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 等比数列奇数项的符号相同, $\therefore a_7 = 3, \therefore \frac{a_2 a_{12}}{a_7} = \frac{9}{3} = 3$.

4. 4 [解析] 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $\because a_5^2 = a_3 a_7 = 2 \times 8 = 16, \therefore a_5 = \pm 4$, 又 $\because a_5 = a_3 q^2 > 0, \therefore a_5 = 4$.

5. $\begin{cases} n, a=1, \\ \frac{a(1-a^n)}{1-a}, a \neq 0, a \neq 1 \end{cases}$ [解析] 因为 $a \neq 0, a_n = a^n$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 a 为首项, a 为公比的等比数列. 当 $a = 1$ 时, $S_n = n$; 当 $a \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$.

6. 28 [解析] 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 所以 $S_5, S_{10} - S_5, S_{15} - S_{10}$ 成等比数列. 因为 $S_5 = 4, S_{10} = 12$, 所以 $S_{10} - S_5 = 8, S_{15} - S_{10} = 16$, 故 $S_{15} = 12 + 16 = 28$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 思路一: 根据题意列出关于公比 q 的方程, 求出 q , 注意 $q = 1$ 时的情况, 即可求出 S_4 ; 思路二: 根据题意列出关于公比 q 的方程, 结合 $q > 0$ 求出 q , 即可求出 S_4 . (2) 根据等比数列的定义与性质求解.

(1) C (2) 2 [解析] (1) 方法一: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 当 $q = 1$ 时, $S_5 = 5, 5S_3 - 4 = 11, S_5 \neq 5S_3 - 4$, 不合题意; 当 $q \neq 1$ 时, 由 $S_5 = 5S_3 - 4$, 得 $\frac{1-q^5}{1-q} = 5 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} - 4$, 即 $1 - q^5 = 5 - 5q^3 - 4 + 4q$, 即 $q^5 - 5q^3 + 4q - 4 = 0$, 即 $q^4 - 5q^2 + 4 = 0$, 即 $(q^2 - 1)(q^2 - 4) = 0$, 解得 $q = \pm 1$ (舍去) 或 $q = -2$ (舍去) 或 $q = 2$, 因此 $S_4 = \frac{1-q^4}{1-q} = 15$. 故选 C.

方法二: 由题知 $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = 5(1 + q + q^2) - 4$, 即 $q^3 + q^4 = 4q + 4q^2$, 即 $q^3 + q^2 - 4q - 4 = 0$, 即 $(q-2)(q+1)(q+2) = 0$. 由题知 $q > 0$, 所以 $q = 2$, 所以 $S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

(2) 由等比数列的性质知 $a_3 a_6 = a_4 a_5$, 由 $\begin{cases} a_4 + a_5 = 24, \\ a_4 a_5 = 128, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_4 = 8, \\ a_5 = 16, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_4 = 16, \\ a_5 = 8, \end{cases}$ 因为 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 所以 $\begin{cases} a_4 = 8, \\ a_5 = 16, \end{cases}$ 即 $q = \frac{a_5}{a_4} = 2$.

变式题 (1) C (2) B [解析] (1) 由条件可知, 数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 由题意得 $\begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15, \\ \frac{a_1(1+q^2)}{1-q} = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2, \end{cases}$ 所以 $S_7 = \frac{1-2^7}{1-2} = 127$. 故选 C.

(2) 设“衰分比”为 a , 一等奖奖金得 b 万元, 则 $b(1-a)^2 = 64, b(1-a) + b(1-a)^3 = 131.2, b + 64 + 131.2 = m$, 解得 $b = 100, a = 20\%, m = 295.2$. 故选 B.

例 2 [思路点拨] (1) 由 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

可得 $S_{n+1} - S_n = \frac{4(n+1)}{2n-1}(S_n - 1)$, 再通过化简结合等比数列的定义即可证明; (2) 先结合 (1) 求出 $S_n = 3^n(2n-1) + 1$, 再根据 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求出 a_n , 最后验证 a_1 即可.

解: (1) 证明: $\because a_{n+1} = \frac{4(n+1)}{2n-1}(S_n - 1)$, $\therefore S_{n+1} - S_n = \frac{4(n+1)}{2n-1}(S_n - 1)$, 即 $(2n-1)S_{n+1} - (2n-1)S_n = 4(n+1)(S_n - 1)$, 即 $(2n-1)(S_{n+1} - 1) = (6n+3)S_n - (6n+3)$, 即 $(2n-1)(S_{n+1} - 1) = 3(2n+1)(S_n - 1)$, 即 $\frac{S_{n+1}-1}{2n+1} = 3 \cdot \frac{S_n-1}{2n-1}$.

又 $\because \frac{S_1-1}{2 \times 1 - 1} = a_1 - 1 = 3, \therefore$ 数列 $\left\{\frac{S_n-1}{2n-1}\right\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列.

(2) 由 (1) 知 $\frac{S_n-1}{2n-1} = 3^n$, 即 $S_n = 3^n(2n-1) + 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 3^{n-1}(2n-3) + 1$, 则 $a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n(2n-1) + 1 - [3^{n-1}(2n-3) + 1] = 4n \cdot 3^{n-1}$, 又 $a_1 = 4$ 也适合上式, $\therefore a_n = 4n \cdot 3^{n-1}, n \in \mathbf{N}^+$.

变式题 解: 因为 $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, 所以 $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2$, 则 $\ln(a_{n+1} - 1) = \ln(a_n - 1)^2 = 2\ln(a_n - 1)$, 又 $\ln(a_1 - 1) = \ln 2$, 所以数列 $\{\ln(a_n - 1)\}$ 是以 $\ln 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

则 $\ln(a_n - 1) = 2^{n-1} \cdot \ln 2 = \ln 2^{2^{n-1}}$, 所以 $a_n = 2^{2^{n-1}} + 1$.

例 3 [思路点拨] (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据题意求得 $a_5^3 = 4$, 结合对数运算性质有 $S_9 = \log_2 a_5^3$, 即可求解. (2) 根据等比数列的性质求得 $a_4 = 8$, 进而求得 $q = 2$.

(1) D (2) 2 [解析] (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $a_3 a_6^2 = \frac{a_5^3}{q^2} (a_5 q)^2 = a_5^3 = 4$, 所以 $S_9 = c_1 + c_2 + \dots + c_8 + c_9 = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_8 + \log_2 a_9 = \log_2(a_1 a_2 \dots a_8 a_9) = \log_2 a_5^9 = \log_2 4^3 = 6$. 故选 D.

(2) $a_4 a_6 a_8 a_{10} a_{12} = a_8^5 = 512$, 故 $a_8 = 8$, 所以 $a_4 = a_1 q^3 = q^3 = 8$, 所以 $q = 2$.

变式题 (1) A (2) $\frac{1}{3}$ [解析] (1) 若 $a_6 \cdot a_7 > 1$, 则有 $T_{12} = a_1 a_2 \dots a_{12} = (a_6 a_7)^6 > 1$, 故充分性成立; 若 $T_{12} > 1$, 即 $a_1 a_2 \dots a_{12} > 1$, 即 $(a_6 a_7)^6 > 1$, 则 $a_6 a_7 > 1$ 或 $a_6 a_7 < -1$, 故必要性不成立. 所以“ $a_6 \cdot a_7 > 1$ ”是“ $T_{12} > 1$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

(2) 易知 $\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_8} + \frac{1}{a_9} = \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_9}\right) + \left(\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_8}\right) + \frac{1}{a_6} = \frac{a_3 + a_9}{a_3 a_9} + \frac{a_4 + a_8}{a_4 a_8} + \frac{a_6}{a_6^2}$, 由等比数列的性质可得 $a_3 a_9 = a_4 a_8 = a_6^2, \therefore \frac{a_3 + a_9 + a_4 + a_8 + a_6}{a_6^2} = 18, \therefore a_6^2 = \frac{1}{9}$, 又 $a_6 > 0, \therefore a_6 = \frac{1}{3}$.

例 4 [思路点拨] (1) 根据等比数列的性质可知片段和成等比数列, 求出片段和等比数列的公比即可求解. (2) 根据等比数列前 n 项和的性质计算即可.

(1) A (2) C [解析] (1) 因为 $S_8 + S_{24} = 140$, 且 $S_{24} = 13S_8$, 所以 $S_8 = 10, S_{24} = 130$, 故 $q \neq \pm 1$, 所以 $\frac{S_{24}}{S_8} = \frac{1-q^{24}}{1-q^8} = (q^8)^2 + q^8 + 1 = 13$, 即 $(q^8)^2 + q^8 - 12 = 0$, 解得 $q^8 = 3$ 或 $q^8 = -4$ (舍去). 由等比数列前 n 项和的性质可知, $S_8, S_{16} - S_8, S_{24} - S_{16}$ 成等比数列, 公比为 $q^8 = 3$, 所以 $S_{16} -$

$10 = 10 \times q^8 = 30$, 解得 $S_{16} = 40$, 故选 A.

(2) 因为 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 所以 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9, S_{15} - S_{12}, S_{18} - S_{15}$ 成等比数列, 由 $\frac{S_6}{S_3} =$

3 , 得 $S_6 = 3S_3$, 则 $\frac{S_6 - S_3}{S_3} = 2$, 所以 $S_9 - S_6 = 4S_3$, 所以 $S_9 = 7S_3, S_{12} - S_9 = 8S_3$, 所以 $S_{12} = 15S_3, S_{15} - S_{12} = 16S_3$, 所以 $S_{15} = 31S_3, S_{18} - S_{15} = 32S_3$, 所以 $S_{18} = 63S_3$, 所以 $\frac{S_{18}}{S_9} = \frac{63S_3}{7S_3} = 9$. 故选 C.

变式题 (1) D (2) 13 [解析] (1) 由题知, $S_3 = 3, S_6 - S_3 = 9$, 因为数列 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 成等比数列, 所以 $S_9 - S_6 = 27, S_{12} - S_9 = 81$, 所以 $S_{12} = S_9 + 81 = S_6 + 27 + 81 = S_3 + 9 + 27 + 81 = 120$. 故选 D.

(2) 因为 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和且 $S_3 \neq 0$, 所以 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 也成等比数列, 则 $(S_6 - S_3)^2 = S_3 \times (S_9 - S_6)$. 因为 $S_3 = 30, S_6 = 120$, 所以 $(120 - 30)^2 = 30 \times (S_9 - 120)$, 解得 $S_9 = 390$, 所以 $\frac{S_9}{S_3} = \frac{390}{30} = 13$.

例 5 [思路点拨] 结合选项, 利用等比数列的增减性分析判断即可.

BC [解析] 当 $a_1 > 0, 0 < q < 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 递减, 故 $\{a_n\}$ 只有最大值 a_1 , 没有最小值; 当 $a_1 > 0, -1 < q < 0$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列, 此时 a_1 为最大值, a_2 为最小值; 当 $a_1 < 0, q = -1$ 时, 奇数项都相等且小于零, 偶数项都相等且大于零, 所以等比数列 $\{a_n\}$ 既有最大值又有最小值; 当 $a_1 < 0, q < -1$ 时, 因为 $|q| > 1$, 所以 $\{a_n\}$ 的奇数项为负无穷小值, 偶数项为正无穷大值. 故选 BC.

变式题 6 [解析] 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 62, a_2 + a_4 = 31$, 所以公比 $q = \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3} = \frac{1}{2}$, 所以 $a_1 + a_3 = a_1 + \frac{1}{4}a_1 =$

62 , 解得 $a_1 = \frac{248}{5}$, 故 $a_n = \frac{248}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 易知数列 $\{a_n\}$ 递减, 且 $a_n > 0$,

因为 $a_6 = \frac{31}{20} > 1, a_7 = \frac{31}{40} < 1$, 所以当 $1 \leq n \leq 6$ 时, $a_n > 1$, 当 $n \geq 7$ 时, $0 < a_n < 1$, 所以当 $a_1 a_2 \dots a_n$ 取得最大值时, $n = 6$.

第 39 讲 数列求和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 若干个等差或等比或可求和

2. (1) 同一个常数 (2) 并项法

3. 两项之差 4. 积

【对点演练】

1. 190 [解析] 由题意 $S_{19} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{18} + a_{19}) = 1 + 5 + 9 + \dots + 37 = \frac{10 \times (1+37)}{2} = 190$.

2. $\frac{2n}{n+1}$ [解析] 由题得 $a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 所以 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

3. $\frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$ [解析] 设 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n}$, 则 $\frac{1}{2}S_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 两式相减得 $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} +$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{2^n} - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^{n+1}}, \text{ 所以 } S_n = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$

4. 100 [解析] 数列 $\{(-1)^n(2n-1)\}$ 的前 100 项和等于 $(-1) + 3 + (-5) + 7 + (-9) + 11 + \cdots + (-197) + 199 = [(-1) + (-5) + (-9) + \cdots + (-197)] + (3 + 7 + 11 + \cdots + 199) = \frac{50 \times (-1-197)}{2} + \frac{50 \times (3+199)}{2} = 100$.

5.
$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}, a=1, \\ \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}, a \neq 1 \end{cases}$$
 [解析] 当 $a=1$ 时, $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; 当 $a \neq 1$ 时, $S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n$ ①, 则 $aS_n = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \cdots + na^{n+1}$ ②, ① - ② 得 $(1-a)S_n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n - na^{n+1}$, 整理得 $(1-a)S_n = \frac{a(1-a^n)}{1-a} - na^{n+1}$, 即 $S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}$. 综上可得, $S_n = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}, a=1, \\ \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}, a \neq 1. \end{cases}$

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 由等差数列的基本量计算可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 由 (1) 可得 $b_n = (n+1)\cos \frac{(n+1)\pi}{2}$, 进而求得 $b_{4k-3}, b_{4k-2}, b_{4k-1}, b_{4k} (k \in \mathbf{N}^*)$, 由 $b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k} = 2$ 即可求解. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 由题意可知 $\begin{cases} a_1 + 3d = 5, \\ a_3^2 = a_1 \cdot a_7, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1 + 3d = 5, \\ (a_1 + 2d)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 6d), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 1, \end{cases}$ 所以 $a_n = n + 1$.

(2) 由 (1) 可知, $b_n = a_n \cos \frac{a_n \pi}{2} = (n+1)\cos \frac{(n+1)\pi}{2}$, 对于任意的 $k \in \mathbf{N}^*$, 有 $b_{4k-3} = -4k + 2, b_{4k-2} = 0, b_{4k-1} = 4k, b_{4k} = -3$, 所以 $b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k} = 2$, 故数列 $\{b_n\}$ 的前 2024 项和为 $(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + (b_5 + b_6 + b_7 + b_8) + \cdots + (b_{2021} + b_{2022} + b_{2023} + b_{2024}) = 1012$.

变式题 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 则 $a_5^2 = 9a_4a_8 = 9a_6^2$, 即 $q^2 = \frac{1}{9}$, 所以 $q = \frac{1}{3}$, 所以 $2a_1 + 3a_2 = 3a_1 = 1$, 解得 $a_1 = \frac{1}{3}$, 所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. (2) 由 (1) 得 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$, 则 $b_n = a_n + \log_3 a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \log_3 3^{-n} = -n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots +$

$$b_n = -1 + \frac{1}{3} - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots - n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = -[1 + 2 + 3 + \cdots + n] + \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = -\frac{(1+n)n}{2} + \frac{\frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

例 2 [思路点拨] (1) 利用 S_n 与 a_n 的关系式可求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 利用错位相减法可求 T_n .

解: (1) 在 $4S_n = 3a_n + 4$ 中取 $n=1$, 得 $a_1 = 4$, 由 $\begin{cases} 4S_n = 3a_n + 4, \\ 4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4 (n \geq 2), \end{cases}$ 得 $4(S_n - S_{n-1}) = 3a_n - 3a_{n-1} (n \geq 2)$, 即 $4a_n = 3a_n - 3a_{n-1} (n \geq 2)$, $\therefore a_n = -3a_{n-1} (n \geq 2)$, $\therefore \{a_n\}$ 是以 4 为首项, -3 为公比的等比数列, $\therefore a_n = 4 \times (-3)^{n-1}$. (2) 由 (1) 知 $b_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 则 $T_n = 4 \times (1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^{n-1})$ ①, 则 $3T_n = 4 \times [1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + (n-1) \times 3^{n-1} + n \times 3^n]$ ②, ② - ① 得 $2T_n = 4n \cdot 3^n - 4(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) = 4n \cdot 3^n - 4 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} = (4n - 2) \cdot 3^n + 2$, $\therefore T_n = (2n - 1) \cdot 3^n + 1$.

变式题 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则 $\begin{cases} 6a_1 + 15d = 3(3a_1 + 3d), \\ a_1 + (3n-1)d = 3a_1 + 3(n-1)d - 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以 $a_n = \frac{n+1}{2}$.

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{3^{n-1}}$, 所以 $T_n = 1 \times \frac{1}{3^0} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{2} \times \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{n}{2} \times \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{3^{n-1}}$ ①, $\frac{1}{3} T_n = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{2} \times \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{n}{2} \times \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{3^n}$ ②, 由 ① - ② 得 $\frac{2}{3} T_n = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{3^n} = \frac{5}{4} - \frac{2n+5}{4} \times \frac{1}{3^n}$, 故 $T_n = \frac{15}{8} - \frac{2n+5}{8} \times \frac{1}{3^{n-1}}$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据题意, 由等差数列的定义得到数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为公差的等差数列, 进而求得其通项公式; (2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$, 结合裂项相消法求和, 即可求解.

解: (1) 根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 3$, 即 $a_{n+1} - a_n = 3$, 由等差数列的定义可得, 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为公差的等差数列, 因为 $a_2 = 4$, 所以 $a_1 = a_2 - 3 = 4 - 3 = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$. (2) 由 (1) 知 $a_n = 3n - 2$, 可得 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right),$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{n}{3n+1}$.

变式题 解: (1) 因为 $S_{n+1} = 2S_n + n$, 所以 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = n$. 令 $n=1$, 可得 $a_2 = S_1 + 1 = 1$, 即 $S_1 = a_1 = 0$.

由 $S_{n+1} = 2S_n + n$ 可得 $S_{n+1} + (n+1) + 1 = 2(S_n + n + 1)$, 且 $S_1 + 1 + 1 = 2 \neq 0$, 可知数列 $\{S_n + n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 则 $S_n + n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 可得 $S_n + n = 2^n - 1$, 即 $a_{n+1} = 2^n - 1$, 则 $a_n = 2^{n-1} - 1, n \geq 2$, 又 $a_1 = 0$ 符合上式, 所以 $a_n = 2^{n-1} - 1$.

(2) 由 (1) 可得 $b_n = \log_2(a_n + 1) = \log_2 2^{n-1} = n - 1$, 则 $b_{n+1} - b_n = n - (n - 1) = 1$, 可知 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 0$, 公差为 1 的等差数列, 可得 $T_n = \frac{n(0 + n - 1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{T_n} = \frac{2}{n(n-1)} = 2 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$, 所以 $\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4} + \cdots + \frac{1}{T_n} = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$.

例 4 [思路点拨] 根据数列 $\{a_n\}$ 是等方差数列, 且公方差为 3, 得到 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3$, 再利用等差数列的通项公式求得 a_n , 从而得到 $\frac{1}{a_n + a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1}}$, 进而求解.

A [解析] 因为数列 $\{a_n\}$ 是等方差数列, 且公方差为 3, 所以 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3$, 又 $a_1^2 = 1$, 所以 $a_n^2 = a_1^2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$, 又数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 所以 $a_n = \sqrt{3n-2}$, 所以 $\frac{1}{a_n + a_{n+1}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1}} = \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2}}{(\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2})} = \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2}}{3n+1 - \sqrt{3n-2}} = \frac{1}{\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{33} + a_{34}}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1}}{3} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{4}}{3} + \cdots + \frac{\sqrt{3 \times 33 + 1} - \sqrt{3 \times 33 - 2}}{3} =$$

3, 故选 A.

变式题 B [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$, $\therefore a_1 + a_6 = 4a_2$, $\therefore a_1 + a_1 + 5d = 4(a_1 + d)$, $\therefore d = 2a_1$, $\therefore a_n = a_1 + (n-1)2a_1 = a_1(2n-1)$,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2a_1} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}), \therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{1}{2a_1} (-\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{25}}) = \frac{1}{2a_1} (-\sqrt{a_1} + \sqrt{49a_1}) = \frac{3\sqrt{a_1}}{a_1} = \frac{3}{\sqrt{a_1}} = 6, \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{4}, \therefore a_5 = 9a_1 = \frac{9}{4}. \text{ 故选 B.}$$

例 5 [思路点拨] (1) 根据等比数列的基本量计算即可求解; (2) 用裂项相消法求得 T_n , 再利用数列增减性即可求解.

解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $4a_2, 2a_3, a_4$ 成等差数列, 可得 $4a_2 + a_4 = 4a_3$,

故 $4+q^2=4q$, 解得 $q=2$, 由 $S_4=8a_2-2$, 可得 $\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=16a_1-2$, 解得 $a_1=2$, 故 $a_n=2^n$, 即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 由 (1) 可得 $b_n = \frac{a_n}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)} = \frac{2^n}{(2^n+2)(2^{n+1}+2)} = \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+1}+2}$, 故 $T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{2^n+2} - \frac{1}{2^{n+1}+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}+2}$. 又 $\{T_n\}$ 为递增数列, 所以 $T_n \geq T_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, 又当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{2^{n+1}+2} \rightarrow 0$, 所以 $T_n < \frac{1}{4}$, 故 $\frac{1}{12} \leq T_n < \frac{1}{4}$.

变式题 A [解析] 由 $a_1=2, a_{n+1}=3a_n+2, n \in \mathbf{N}^*$, 可得 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$, 即数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=3$ 为首项, 公比 $q=3$ 的等比数列, 可得 $a_n+1=3 \cdot 3^{n-1}=3^n$, 即 $a_n=3^n-1$, 所以 $\frac{a_n+1}{(a_n+3)(a_{n+1}+3)} = \frac{3^n}{(3^n+2)(3^{n+1}+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n+2} - \frac{1}{3^{n+1}+2} \right)$, 因此 $T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^1+2} - \frac{1}{3^2+2} + \frac{1}{3^2+2} - \frac{1}{3^3+2} + \dots + \frac{1}{3^n+2} - \frac{1}{3^{n+1}+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3+2} - \frac{1}{3^{n+1}+2} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{2(3^{n+1}+2)} < \frac{1}{10}$, 所以实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{1}{10}, +\infty \right)$. 故选 A.

第 40 讲 数列的综合问题

● 课前基础巩固

【对点演练】

- 72 [解析] 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, a_1, a_2, a_4 成等比数列, 所以 $a_2^2 = a_1 a_4$, 则 $(a_1+2)^2 = a_1(a_1+6)$, 解得 $a_1=2$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$, 故 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = n(n+1)$, 所以 $S_8 = 8 \times 9 = 72$.
- 6 [解析] $\because \{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_2 a_4 = a_3^2, \therefore a_2^3 = a_3^3, \therefore a_2 = a_3 = 1$. 又 $q > 1, \therefore a_1 < a_2 < 1, a_n > 1 (n \geq 4, n \in \mathbf{N}^*), \therefore T_n > T_{n-1} (n \geq 4, n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $T_1 < 1, T_2 = a_1 a_2 < 1, T_3 = a_1 a_2 a_3 = a_1 a_2 = T_2 < 1, T_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 = a_1 < 1, T_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a_3^2 = 1, T_6 = T_5 \cdot a_6 = a_6 > 1$, 故所求 n 的最小值为 6.
- $10 \times 1.0035^n, n \in \mathbf{N}^*$ [解析] 由题意得, $a_1 = 10 \times (1+0.35\%) = 10 \times 1.0035, a_2 = 10 \times (1+0.35\%)^2 = 10 \times 1.0035^2, a_3 = 10 \times (1+0.35\%)^3 = 10 \times 1.0035^3$, 则易知 $a_n = 10(1+0.35\%)^n = 10 \times 1.0035^n$.
- $\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ [解析] 由题意得 $a(1+r)^n = x + x(1+r) + \dots + x(1+r)^{n-1}, \therefore a(1+r)^n = \frac{x[1-(1+r)^n]}{1-(1+r)}, \therefore x = \frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$.
- 4 [解析] 设原有污垢为 a , 清洗次数为 $n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则清洗 n 次每次存留的污垢 a_n 构成以 $\frac{1}{4}a$ 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列, 所以 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot a$. 令 $\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot a < 1\% \cdot a$, 则 $n > \log_4 100 = \log_2 10$, 得 $n \geq 4$, 所以至少要清洗 4 次才能使存留的污垢在 1% 以下.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 设出 $\{a_n\}$ 的公差, 由

基本量法求出公差, 得到 $\{a_n\}$ 的通项公式, 利用裂项相消法求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ; (2) 若存在正整数 $m, n (1 < m < n)$, 使得 T_1, T_m, T_n 成等比数列, 则 $n = \frac{3m^2}{-2m^2+4m+1} > 0$, 求出 m 的取值范围, 即得结论.

解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_1+a_2+3a_4=25$, 得 $5a_1+10d=25$, 则 $a_1+2d=a_3=5$, 又 a_3+2, a_4, a_5-2 成等比数列, $\therefore 7, 5+d, 3+2d$ 成等比数列, 得 $(5+d)^2=7(3+2d)$, 即 $(d-2)^2=0$, 得 $d=2, \therefore a_n=a_3+(n-3)d=2n-1, n \in \mathbf{N}^*, \therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$. $\therefore b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, $\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$.

(2) 若存在正整数 $m, n (1 < m < n)$, 使得 T_1, T_m, T_n 成等比数列, 则 $T_m^2 = T_1 \cdot T_n$, 即 $\left(\frac{m}{2m+1} \right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2n+1}$, 化简得 $n = \frac{3m^2}{-2m^2+4m+1} > 0$, 解得 $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. 又 $m > 1$ 且 $m \in \mathbf{N}^*, \therefore m=2, n=12$, 故存在正整数 $m=2, n=12$, 使得 T_1, T_m, T_n 成等比数列.

变式题 **解:** (1) 由题意可得 $a_n = 4 + (n-1) \times 1 = n+3$, 故 $a_n = n+3, n \in \mathbf{N}^*$. $\therefore$ 数列 $\{a_n+b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_1+b_1=4-2=2, \therefore a_n+b_n=2 \cdot 2^{n-1}=2^n, \therefore b_n=2^n-a_n=2^n-n-3, n \in \mathbf{N}^*$. (2) 由 (1) 得 $b_n=2^n-(n+3)$, 则 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = (2^1-4) + (2^2-5) + (2^3-6) + \dots + [2^n-(n+3)] = (2^1+2^2+2^3+\dots+2^n) - [4+5+6+\dots+(n+3)] = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - \frac{(n+7)n}{2} = 2^{n+1} - \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{2} - 2$.

例 2 [思路点拨] (1) 由题中条件求得 a_1 , 即得 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再由 $b_n=3^{a_n}$, 得 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 由 $\{b_n\}$ 是等比数列求得 S_n , 进而求得 $c_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^n-1} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right)$, 利用裂项相消法和放缩法即证得结论.

解: (1) 由 $a_3=2$, 得 $a_1=0, \therefore a_n=n-1, \therefore$ 点 $(a_n, b_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在函数 $f(x)=3^x$ 的图象上, $\therefore b_n=3^{a_n}=3^{n-1}$. (2) 证明: 由 (1) 知 $b_n=3^{n-1}$, 显然数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 其首项为 1, 公比为 3, 则 $S_n = \frac{3^n-1}{2}, \therefore c_n = \frac{b_n}{4S_n S_{n+1}} = \frac{3^{n-1}}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^n-1} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right), \therefore T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{26} + \frac{1}{26} - \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{3^n-1} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{6(3^{n+1}-1)} < \frac{1}{12}, \therefore T_n < \frac{1}{12}$.

变式题 **解:** (1) 由 $T_n^2 = a_n^{n+1}$, 得 $T_{n+1}^2 = a_{n+1}^{n+2}$, 所以 $\frac{T_{n+1}^2}{T_n^2} = \frac{a_{n+1}^{n+2}}{a_n^{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}^{n+2}}{a_n^{n+1}}$, 两边取常用对数得 $\lg a_{n+1}^{n+1} = \lg a_n^{n+1}$, 即 $n \lg a_{n+1} = (n+1) \lg a_n$, 所以 $\frac{\lg a_{n+1}}{n+1} = \frac{\lg a_n}{n} = \dots = \frac{\lg a_1}{1} = \lg 3$,

所以数列 $\left\{ \frac{\lg a_n}{n} \right\}$ 为常数列, 所以 $\lg a_n = n \lg 3 = \lg 3^n$, 所以 $a_n = 3^n$.

(2) 证明: 由 (1) 知 $a_n = 3^n$, 所以 $b_n = \frac{a_n-1}{a_n+1} = \frac{3^n-1}{3^n+1} = 1 - \frac{2}{3^n+1}$, 则 $S_n = \left(1 - \frac{2}{3^1+1} \right) + \left(1 - \frac{2}{3^2+1} \right) + \dots + \left(1 - \frac{2}{3^n+1} \right) = n - 2 \left(\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1} \right)$, 又因为 $\frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}$, 所以 $\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) < \frac{1}{2}$, 故 $S_n = n - 2 \left(\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1} \right) > n-1$.

例 3 [思路点拨] 先利用等比数列的求和公式求出 S_n , 再把原问题转化为 $(-1)^n \cdot t \leq S_n + \frac{14}{S_n}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 令

$g(x) = x + \frac{14}{x}, x \in (0, +\infty)$, 利用导数研究函数 $g(x)$ 的单调性, 然后根据 n 的奇偶性分别求解 t 的取值范围即可.

解: 由题知, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 由等比数列的前 n 项和公式得 $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2$.

因为不等式 $(-1)^n \cdot t S_n - 14 \leq S_n^2$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, $S_n > 0$ 且 S_n 随着 n 的增大而增大, 所以 $(-1)^n \cdot t \leq S_n + \frac{14}{S_n}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立. 令 $g(x) = x + \frac{14}{x}, x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{14}{x^2} = \frac{x^2-14}{x^2}$, 当 $x \in (0, \sqrt{14})$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\sqrt{14}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 又 $2 = S_1 < \sqrt{14} < S_2 = 6$, 且 $g(2) = 9, g(6) = \frac{25}{3}$, 所以 $g(S_2) < g(S_1)$. 当 n 为偶数时, 不等式化为 $t \leq S_n + \frac{14}{S_n}$, 所以 $t \leq \frac{25}{3}$;

当 n 为奇数时, 不等式化为 $-t \leq S_n + \frac{14}{S_n}$, 所以 $-t \leq 9$, 所以 $t \geq -9$. 综上所述, $-9 \leq t \leq \frac{25}{3}$.

变式题 **解:** (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$, 因为 $b_n = 2 \log_2 a_n + 1, b_1 = 1, b_4 = 7$, 所以 $b_1 = 1 = 2 \log_2 a_1 + 1$, 则 $a_1 = 1, b_4 = 7 = 2 \log_2 a_4 + 1$, 则 $a_4 = 8$, 所以 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8$, 则 $q = 2$, 所以 $a_n = 2^{n-1}, b_n = 2 \log_2 a_n + 1 = 2(n-1) + 1 = 2n-1$.

(2) 因为 $2\lambda a_n \geq b_n - 2$ 恒成立, $a_n > 0$, 所以 $\lambda \geq \frac{b_n-2}{2a_n} = \frac{2n-3}{2^n}$ 恒成立. 设 $f(n) = \frac{2n-3}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $f(n+1) - f(n) = \frac{2n-1}{2^{n+1}} - \frac{2n-3}{2^n} = \frac{5-2n}{2^{n+1}}$, 当 $n \leq 2$ 时, $f(n+1) > f(n)$, 当 $n \geq 3$ 时, $f(n+1) < f(n)$, 所以 $f(n)$ 在 $n=2$ 处取得最大值, 即 $f(2) = \frac{1}{2}$, 所以 $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

1) $f(n) > 0$, 则 $f(3) > f(2) > f(1)$, 当 $n \geq 3$ 时, $f(n+1) - f(n) < 0$, 则 $f(3) > f(4) > f(5) > \dots$, 所以 $f(n)_{\max} = f(3) = \frac{3}{8}$, 所以 λ 的取值范围为 $\left[\frac{3}{8}, +\infty\right)$.

例 4 [思路点拨] 该工厂每月的产量、不合格率分别用 a_n, b_n 表示, 月份用 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 表示, 求出 a_n, b_n 的表达式, 分析数列 $\{a_n, b_n\}$ 的增减性, 即可得出结论.

C [解析] 设从今年 1 月份起, 每月的产量和产品的合格率都按题中的标准增长, 该工厂每月的产量、不合格率分别用 a_n, b_n 表示, 月份用 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 表示, 则 $a_n = 1 \times (1+4\%)^n = 1.04^n, b_n = 1 - (87\% + n \cdot 0.4\%) = -0.004n + 0.13$, 其中 $n \leq 24, n \in \mathbf{N}^*$, 则从今年 1 月份起, 各月不合格产品的数量为 $a_n b_n = 1.04^n \times (-0.13 + 0.004n)$. 易知 $a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n = 1.04^{n+1} \times [0.13 - 0.004(n+1)] - 1.04^n \times (-0.13 + 0.004n) = 1.04^n [1.04 \times (-0.13 + 0.004(n+1)) - (-0.13 + 0.004n)] = 1.04^n (0.00104 - 0.00016n) = \frac{1.04^n}{10^5} (104 - 16n) = \frac{8 \times 1.04^n}{10^5} (13 - 2n)$, 当 $1 \leq n \leq 6$ 时, $a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n > 0$, 即 $a_{n+1} b_{n+1} > a_n b_n$, 此时数列 $\{a_n b_n\}$ 递增, 即 $a_1 b_1 < a_2 b_2 < \dots < a_7 b_7$; 当 $7 \leq n \leq 23$ 时, $a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n < 0$, 即 $a_{n+1} b_{n+1} < a_n b_n$, 此时数列 $\{a_n b_n\}$ 递减, 即 $a_7 b_7 > a_8 b_8 > \dots > a_{24} b_{24}$, 因此当 $n = 7$ 时, $a_n b_n$ 最大, 故该工厂的月不合格产品数量达到最大是今年的 7 月份. 故选 C.

变式题 ABC [解析] 对于 A, 利息和为 $(120\ 000 + 110\ 000 + 100\ 000 + \dots + 10\ 000) \times 0.003 = 2340$ (元), 故 A 正确; 对于 B, 倒数第二个月还款后, 剩余本金 10 000 元, 一个月利息为 30 元, 本息和应为 10 030 元, 故 B 正确; 对于 C, 设第 n 个月贷款利息为 a_n , 偿还本金为 b_n, p 为贷款总额, 则 $a_1 = 0.3\% p, a_2 = 0.3\% (p - b_1)$, 则 $b_2 = (a_1 + b_1) - a_2 = 0.3\% p + b_1 - 0.3\% (p - b_1) = b_1 (1 + 0.3\%), a_3 = 0.3\% (p - b_1 - b_2)$, 则 $b_3 = (a_2 + b_2) - a_3 = 0.3\% (p - b_1) + b_2 - 0.3\% (p - b_1 - b_2) = b_2 (1 + 0.3\%) = b_1 (1 + 0.3\%)^2$, 同理得 $b_4 = b_1 (1 + 0.3\%)^3, b_5 = b_1 (1 + 0.3\%)^4, \dots, b_{12} = b_1 (1 + 0.3\%)^{11}$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $1 + 0.3\%$ 为公比的递增等比数列, 故 C 正确; 对于 D, 由选项 C 可知, $\frac{b_1 [1 - (1 + 0.3\%)^{12}]}{1 - (1 + 0.3\%)} = \frac{120\ 000 \times 0.3\%}{(1 + 0.3\%)^{12} - 1}$, 所以每月还款的本息和为 $a_1 + b_1 = 120\ 000 \times 0.3\% + \frac{120\ 000 \times 0.3\%}{(1 + 0.3\%)^{12} - 1}$, 所以等额本息还款利息和为 $12(a_1 + b_1) - 120\ 000 = 12 \times \left[120\ 000 \times 0.3\% + \frac{120\ 000 \times 0.3\%}{(1 + 0.3\%)^{12} - 1} \right] - 120\ 000 = 12 \times 120\ 000 \times 0.3\% \times \left[1 + \frac{1}{(1 + 0.3\%)^{12} - 1} \right] - 120\ 000 \approx 2\ 352.85$, 比等额本金的利息和高, 但等额本金方案起初还款金额高, 还款压力大, 还款金额逐年递减, 等额本息每月还款金额相同, 低于等额本金方案前半段时间还款额, 高于后半段时间还款额, 还有通货膨胀等诸多经济因素影响两种方案的收益, 故不能简单认为某种贷款方案优于另一种方案, 故 D 错误. 故选 ABC.

第 41 讲 双数列问题

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 用 a_1, d 表示 S_n 及 T_n , 即可求解. (2) 思路一: 利用 (1) 的结论求出 S_n ,

b_n , 再分 n 为奇数和偶数结合分组求和法求出 T_n , 并与 S_n 作差比较大小; 思路二: 利用 (1) 的结论求出 S_n , 再分 n 为奇数和偶数借助等差数列前 n 项和公式求出 T_n , 并与 S_n 作差比较大小.

解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d, \because T_3 = b_1 + b_2 + b_3 = a_1 - 6 + 2a_2 + a_3 - 6 = 4a_2 - 12 = 16, \therefore a_2 = a_1 + d = 7$, 又 $S_4 = 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2} d = 32$, 即 $a_1 + \frac{3}{2} d = 8$,

$$\therefore a_1 = 5, d = 2,$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n + 3.$$

(2) 证明: 方法一: 由 (1) 知 $S_n = \frac{n(5+2n+3)}{2} =$

$$n^2 + 4n, b_n = \begin{cases} 2n-3, n=2k-1, \\ 4n+6, n=2k, \end{cases}$$

$k \in \mathbf{N}^*$. 当 n 为偶数时, $b_{n-1} + b_n = 2(n-1) - 3 + 4n + 6 = 6n + 1, T_n = 13 + (6n+1) \cdot \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n$, 当 $n >$

$$5 \text{ 时, } T_n - S_n = \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n \right) - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}n(n-1) > 0, \text{ 因此 } T_n > S_n; \text{ 当 } n$$

$$\text{为奇数时, } T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{7}{2}(n+1) - [4(n+1) + 6] = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5, \text{ 当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n =$$

$$\left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 \right) - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0, \text{ 因此 } T_n > S_n. \text{ 所以当 } n > 5 \text{ 时, } T_n > S_n.$$

方法二: 由 (1) 可得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2 + 4n$.

当 n 为偶数时, $T_n = (b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_n) = (a_1 - 6 + a_3 - 6 + \dots + a_{n-1} - 6) + (2a_2 + 2a_4 + \dots + 2a_n) = (5 + 9 + \dots + 2n + 1 - 3n) + 2 \times (7 + 11 + \dots +$

$$(5 + 2n + 1) \cdot \frac{n}{2} - 3n + 2 \times \frac{(7 + 2n + 3) \cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n, \text{ 当 } n > 5$$

$$\text{时, } T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1) > 0, \text{ 即 } T_n > S_n; \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = T_{n-1} + b_n =$$

$$\frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{7}{2}(n-1) + 2n + 3 - 6 = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 (n \geq 3), \text{ 当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 - (n^2 + 4n) =$$

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 5 = \frac{1}{2}(n^2 - 3n - 10) = \frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0, \text{ 即 } T_n > S_n.$$

$$\text{综上, 当 } n > 5 \text{ 时, } T_n > S_n.$$

变式题 1 2 [解析] 因为 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = (-1)^n (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, 所以 $S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 = -(\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \dots - (\sqrt{8} + \sqrt{7}) + (\sqrt{9} + \sqrt{8}) = \sqrt{9} - 1 = 2$.

变式题 2 解: (1) 由 $2S_n = a_n(a_n + 1)$ 知, 当 $n = 1$ 时, $2a_1 = a_1(a_1 + 1)$, 解得 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = 0$ (舍去), 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_{n-1}(a_{n-1} + 1)$, 两式相减得 $2a_n = a_n^2 + a_n - a_{n-1}^2 - a_{n-1} (n \geq 2)$, 即 $a_n^2 - a_{n-1}^2 - (a_n + a_{n-1}) = 0 (n \geq 2)$, 即 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0 (n \geq 2)$, 由于 $a_n + a_{n-1} > 0 (n \geq 2)$, 所以 $a_n - a_{n-1} -$

$1 = 0 (n \geq 2)$, 即 $a_n - a_{n-1} = 1 (n \geq 2)$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $a_n = n$.

(2) 由 (1) 得 $b_n =$

$$\begin{cases} n, n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = (b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_n) = [1 + 3 + \dots + (n-1)] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \frac{1+(n-1)}{2} \times \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) =$$

$$\frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{n^2+1}{4} - \frac{1}{2(n+2)}; \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{4} - \frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{n^2+2n+2}{4} - \frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+3)} = \frac{n^2+2n+2}{4} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

$$\text{综上, } T_n = \begin{cases} \frac{n^2+2n+2}{4} - \frac{1}{2(n+1)}, n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n^2+1}{4} - \frac{1}{2(n+2)}, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

例 2 [思路点拨] (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据题意求得 $a_1 = 2, a_3 = 8$, 得到 $q = 2$, 即可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 根据题意得到数列 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{a_n\}$ 的前 10 项, 含有 $\{b_n\}$ 的前 50 项, 结合等差、等比数列的求和公式, 即可求解.

解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 a_1, a_3 是方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两根, 所以 $a_1 = 2, a_3 = 8$ 或 $a_1 = 8, a_3 = 2$, 又因为 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列, 所以 $a_1 = 2, a_3 = 8$, 则 $q = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n$.

(2) 因为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45, 45+9 = 54 < 60, 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55, 55+10 = 65 > 60$, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 60 项中含有 $\{a_n\}$ 的前 10 项, 含有 $\{b_n\}$ 的前 50 项, 所以数列 $\{c_n\}$

$$\text{的前 60 项和为 } \frac{2 \times (1-2^{10})}{1-2} + 3 \times 50 + \frac{50 \times 49 \times 2}{2} = 4646.$$

变式题 $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$ [解析] 因为 $a_n = \log_3(1 \times x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n-1} \times 3)$, 所以 $a_{n+1} = \log_3[1 \times (1 \times x_1) \times x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n-1} \times (x_{n-1} \times 3) \times 3] = \log_3(1^2 \times x_1^3 \times x_2^3 \times \dots \times x_{n-1}^3 \times 3^2) = 3a_n - 1$, 所以 $a_{n+1} - \frac{1}{2} = 3 \left(a_n - \frac{1}{2} \right)$, 又 $a_1 = \log_3(1 \times 3 \times 3) = 2$, 所以 $a_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 所以 $\left\{ a_n - \frac{1}{2} \right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $a_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}$, 所以 $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据首项和公差即可写出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 利用所给关系式构造对应的等式即可证明 $\{b_n - n\}$ 为等比数列, 进而可求 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 利用通项公式找出公共项, 再分组求和即可. **解:** (1) 由题意可得, $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$. 因为 $b_1 = 4, b_{n+1} = 3b_n - 2n + 1$, 所以 $b_{n+1} - (n+1) = 3b_n - 3n + 3 - (n+1) = 3(b_n - n)$, 又 $b_1 - 1 = 3$, 故 $\{b_n - n\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 所以

$b_n - n = 3^n$, 即 $b_n = 3^n + n (n \in \mathbb{N}^*)$.

(2) 由题意可得 $3k-1 = 3^m + m, k, m \in \mathbb{N}^*$, 令 $m = 3n-1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $3k-1 = 3^{3n-1} + 3n-1 = 3(3^{3n-2} + n) - 1$, 此时满足条件, 即当 $m = 2, 5, 8, \dots, 3n-1$ 时为公共项, 所以 $c_1 + c_2 + \dots + c_n = b_2 + b_5 + \dots + b_{3n-1} = 3^2 + 3^5 + \dots + 3^{3n-1} + (2 + 5 + \dots + 3n-1) = \frac{9(27^n-1)}{26} + \frac{n(3n+1)}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

变式题 解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_2 + a_1 = 12$, 所以 $a_2 = 8$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n + a_{n-1} = 8n-4$, 所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 8$. 当 n 为偶数时, $a_n = 8 + \frac{n-2}{2} \times 8 = 4n$; 当 n 为奇数时,

$a_n = 4 + \frac{n-1}{2} \times 8 = 4n$. 综上所述, $a_n = 4n$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 H_n , 由 (1) 可知 $a_{200} = 800, b_9 = 2^9 = 512$, 当 $n \leq 200$ 时, 可知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项为 $4, 8, 16, \dots, 512$, 共 8 项, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 192 项和 $T_{192} = S_{200} - (H_9 - 2) = \frac{200 \times (4+800)}{2} - \left[\frac{2 \times (1-2^9)}{1-2} - 2 \right] = 80400 - 1020 = 79380$.

例 4 [思路点拨] (1) 把已知两关系式相加、减, 可得数列 $\{a_n + b_n\}$ 与 $\{a_n - b_n\}$ 分别为等比数列与等差数列; (2) 利用 (1) 中结论求出 $\{a_n + b_n\}$ 与 $\{a_n - b_n\}$ 的通项公式, 进而求出 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

解: (1) 证明: 由题设得 $4(a_{n+1} + b_{n+1}) = 2(a_n + b_n)$, 即 $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 又因为 $a_1 + b_1 = 1$, 所以 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列. 由题设得 $4(a_{n+1} - b_{n+1}) = 4(a_n - b_n) + 8$, 即 $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n + 2$, 又因为 $a_1 - b_1 = 1$, 所以 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列.

(2) 由 (1) 知, $a_n + b_n = \frac{1}{2^{n-1}}, a_n - b_n = 2n-1$, 所以 $a_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} + n - \frac{1}{2}, b_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)] = \frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{2}$.

变式题 解: (1) 证明: 由题知 $a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2a_n + 4$, 则 $a_{n+2} + 4 = 2(a_n + 4)$, 则 $a_{2n+1} + 4 = 2(a_{2n-1} + 4)$, 又 $a_1 + 4 = 8$, 故数列 $\{a_{2n-1} + 4\}$ 是首项为 8, 公比为 2 的等比数列.

(2) 由 (1) 知 $a_{2n-1} + 4 = 8 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_{2n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} - 4$. 同理有数列 $\{a_{2n} + 4\}$ 为等比数列, 其首项为 $a_2 + 4 = 2b_1 + 4 = 8$, 公比为 2, 则 $a_{2n} + 4 = 8 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_{2n} = 8 \cdot 2^{n-1} - 4$. 故 $b_{2n} = a_{2n-1} + 2 = 8 \cdot 2^{n-1} - 2, b_{2n-1} = \frac{1}{2}a_{2n} = 8 \cdot 2^{n-2} - 2$, 故数列 $\{b_{2n}\}$ 的前 n 项和为 $8(1+2^1+\dots+2^{n-1}) - 2n = 8(2^n-1) - 2n = 2^{n+3} - 2n - 8$, 数列 $\{b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} - 2n = 2^{n+2} - 4 - 2n$, 故 $S_{2n} = 2^{n+3} - 2n - 8 + 2^{n+2} - 4 - 2n = 3 \cdot 2^{n+2} - 4n - 12$.

培优专题 (四) 数列中的交汇与创新问题

例 1 A [解析] $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + C_{n-1}^1 + C_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$. 对于选项 A, $a_n + a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+2)(n+1)}{2} = (n+1)^2$, A 正确; 易知 B 错误; 对于选项 C, 当 $n=3$ 时, $a_1 + a_2 + a_3 = 10 \neq C_3^2 = 1$, C 错误; 对于选项 D, 当 $n=3$ 时, $a_1 + a_2 +$

$a_3 = 10 \neq C_4^2 = 6$, D 错误. 故选 A.

【自测题】

C [解析] 用 (s, t) 表示每一项, 可知第一行的数对应 $(0, 1)$; 第二行从左至右的数分别对应 $(0, 2), (1, 2)$; 第三行从左至右的数分别对应 $(0, 3), (1, 3), (2, 3)$; 依次类推, 可知第 n 行从左至右第 k 个数对应 $(k-1, n)$, 且第 n 行共有 n 个数. 对于 A, 第四行从左至右的数分别对应 $(0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4)$, 即第四行的数为 17, 18, 20, 24, A 中结论正确; 对于 B, $a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ 对应第 n 行从左至右第 n 个数, 即对应 $(n-1, n)$, 故 $a_{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n-1} + 2^n = 3 \times 2^{n-1}$, B 中结论正确; 对于 C, $a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ 对应第 n 行从左至右第 1 个数, 即对应 $(0, n)$, 故 $a_{\frac{n(n-1)}{2}+1} = 2^0 + 2^n = 2^n + 1$, C 中结论错误; 对于 D, a_{100} 对应第 14 行从左至右第 9 个数, 即对应 $(8, 14)$, 故 $a_{100} = 2^8 + 2^{14} = 16\,640$, D 中结论正确. 故选 C.

例 2 解: (1) 由题得 $x_n = -\frac{5}{2} + (n-1) \times$

$(-1) = -n - \frac{3}{2}$, 因为点 $P_n(x_n, y_n)$ 在函数 $y = 3x + \frac{13}{4}$ 的图象上, 所以 $y_n = 3 \cdot$

$x_n + \frac{13}{4} = -3n - \frac{5}{4}$,

所以 $P_n\left(-n - \frac{3}{2}, -3n - \frac{5}{4}\right)$.

(2) 因为抛物线 c_n 的对称轴垂直于 x 轴, 且顶点为 P_n , 所以设 c_n 的方程为 $y = a\left(x + \frac{2n+3}{2}\right)^2 - \frac{12n+5}{4}$, 把 $D_n(0, n^2+1)$ 的坐标代入抛物线 c_n 的方程, 得 $a = 1$, 所以抛物线 c_n 的方程为 $y = x^2 + (2n+3)x + n^2 + 1$, 则 $k_n = 2n+3$.

因为 $\frac{1}{k_{n-1}k_n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$, 所以 $\frac{1}{k_1k_2} + \frac{1}{k_2k_3} + \dots + \frac{1}{k_{n-1}k_n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{4n+6}$.

(3) 由 (1) 得 $S = \{x | x = -(2n+3), n \in \mathbb{N}^*\}, T = \{y | y = -[2(6n+1)+3], n \in \mathbb{N}^*\}$, 所以 $a_1 = -17$.

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_{10} = -17 + 9d \in (-265, -125)$, 可得 $-\frac{248}{9} < d < -12$,

又 $a_n \in T$, 所以 $d = -12m (m \in \mathbb{N}^*)$, 则 $d = -24$, 所以 $a_n = 7 - 24n (n \in \mathbb{N}^*)$.

【自测题】

解: (1) 双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 不妨令直线 $l: y = x$. 由已知可得 $y_n = x_{n-1} (n \geq 2)$, 又点 $A_n(x_n, y_n)$ 在双曲线上, 所以 $x_n^2 - y_n^2 = 1$, 即 $x_n^2 - x_{n-1}^2 = 1 (n \geq 2)$, 所以 $\{x_n^2\}$ 是以 $x_1^2 = 1$ 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $x_n^2 = n$, 即 $x_n = \sqrt{n}$.

(2) 证明: 由题知 $A_i(x_i, y_i)$, 则有 $x_i^2 - y_i^2 = 1$, 当切线斜率存在时, 设斜率为 k , 则切线方程为 $y = k(x - x_i) + y_i$, 代入双曲线 C 的方程, 得 $(1 - k^2)x^2 - 2k(y_i - kx_i)x - (y_i - kx_i)^2 - 1 = 0$, 由 $\Delta = 0$, 得 $y_i^2k^2 - 2x_iy_ik + x_i^2 = 0$, 解得

$k = \frac{x_i}{y_i}$, 即切线方程为 $x_ix - y_iy = 1$,

当切线斜率不存在时, 切点为 $A_1(1, 0)$,

切线方程为 $x=1$, 也满足上式.

由 $\begin{cases} x_ix - y_iy = 1, \\ y = x, \end{cases}$ 可得 $x = y = \frac{1}{x_i - y_i} =$

$\frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i-1}} = \sqrt{i} + \sqrt{i-1}$,

不妨取 $M_i(\sqrt{i} + \sqrt{i-1}, \sqrt{i} + \sqrt{i-1})$.

由 $\begin{cases} x_ix - y_iy = 1, \\ y = -x, \end{cases}$ 可得 $x = -y =$

$\frac{1}{x_i + y_i} = \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i-1}} = \sqrt{i} - \sqrt{i-1}$,

则 $N_i(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}, \sqrt{i-1} - \sqrt{i})$, 所以 $|M_iN_i| = \sqrt{(2\sqrt{i-1})^2 + (2\sqrt{i})^2} =$

$2\sqrt{2i-1}$, 所以 $a_i = \frac{1}{|M_iN_i|} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2i-1}}, b_i = \frac{1}{2\sqrt{2i+1}}$.

先证右边, $b_i = \frac{1}{2\sqrt{2i+1}} =$

$\frac{1}{\sqrt{2i+1} + \sqrt{2i+1}} < \frac{1}{\sqrt{2i+1} + \sqrt{2i-1}} = \frac{\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}}{2}$, 所以 $\sum_{i=1}^n b_i = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots +$

$\frac{1}{2\sqrt{2n+1}} < \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2} = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$, 右边

得证.

下面证左边: 先证 $x > \ln(1+x) (x > 0)$, 令 $f(x) = x - \ln(x+1) (x > 0)$, 则

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$, 所以 $f(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $x > \ln(1+x)$, 所

以 $b_i = \frac{1}{2\sqrt{2i+1}} > \ln\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2i+1}}\right) = \ln\left(\frac{2\sqrt{2i+1}+1}{2\sqrt{2i+1}}\right)$.

当 $i \geq 2$ 时, $2\sqrt{2i+1}+1 \geq 2\sqrt{2i+3}$,

证明如下: $(2\sqrt{2i+1}+1)^2 - (2\sqrt{2i+3})^2 = 4(2i+1) + 4\sqrt{2i+1} + 1 - 4(2i+3) = 4\sqrt{2i+1} - 7 \geq 4\sqrt{5} - 7 >$

0 , 所以 $\ln \frac{2\sqrt{2i+1}+1}{2\sqrt{2i+1}} > \ln \frac{2\sqrt{2i+3}}{2\sqrt{2i+1}} =$

$\frac{1}{2} \ln \frac{2i+3}{2i+1}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $\sum_{i=1}^n b_i =$

$\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{3}} +$

$\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5} + \dots + \frac{1}{2} \ln \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} +$

$\frac{1}{2} \ln \frac{2n+3}{5}$, 当 $n=1$ 时, $b_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, 所以

$\sum_{i=1}^n b_i \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2n+3}{5}$, 左边得证. 所以

以命题得证.

例 3 解: (1) 证明: $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore$ 设 $a_n = a_1 + (n-1)d = [a_1 - 1 + (n-1)d] + 1$, 令 $b_n = a_1 - 1 + (n-1)d, c_n = 1$, 则 $\{b_n\}$ 是等差数列, $\{c_n\}$ 是等比数列, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是“优分解”的.

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是“优分解”的, 设 $a_n = b_n + c_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 其中 $b_n = b_1 + (n-1)d, c_n = c_1q^{n-1} (c_1 \neq 0, q \neq 0)$, 则 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = d + c_1q^{n-1}(q-1)$, 则 $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = c_1q^{n-1}(q-1)^2$.

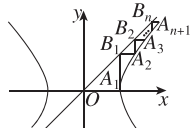
当 $q=1$ 时, $\Delta^2 a_n = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$;

当 $q \neq 1$ 时, $\{\Delta^2 a_n\}$ 是首项为 $c_1(q-1)^2$,

公比为 q 的等比数列.

(3) 一方面, 数列 $\{S_n\}$ 是“优分解”的, 设 $S_n = B_n + C_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 其中 $B_n = B_1 + (n-1)D, C_n = C_1Q^{n-1} (C_1 \neq 0, Q \neq 0)$, 由 (2) 知 $\Delta^2 S_n = C_1Q^{n-1}(Q-1)^2$.

$\therefore \Delta S_1 = S_2 - S_1 = a_2 = 4, \Delta S_2 = S_3 -$



$S_2 = a_3 = 6, \therefore \Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1 = 2, \therefore C_1(Q-1)^2 = 2, \therefore Q \neq 1, \therefore \{\Delta^2 S_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $Q(Q \neq 1)$ 的等比数列. 另一方面, 数列 $\{a_n\}$ 是“优分解”的, 设 $a_n = b_n + c_n (n \in \mathbf{N}^+)$, 其中 $b_n = b_1 + (n-1)d, c_n = c_1 q^{n-1} (c_1 \neq 0, q \neq 0)$, $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}, \Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = a_{n+2} - a_{n+1} = d + c_1 q^n (q-1), \therefore \{\Delta^2 S_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $Q(Q \neq 1)$ 的等比数列, $\therefore q \neq 0, q \neq 1$, 且 $(\Delta^2 S_2)^2 = (\Delta^2 S_1) \cdot (\Delta^2 S_3), \therefore [d + c_1 q^2 (q-1)]^2 = [d + c_1 q (q-1)] \cdot [d + c_1 q^3 (q-1)]$, 化简得 $c_1 d q (q-1)^3 = 0, \therefore c_1 \neq 0,$

$q \neq 0, q \neq 1, \therefore d = 0, \therefore \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = c_1 q^{n-1} (q-1)$, 即数列 $\{\Delta a_n\}$ 是首项为 $\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 1$, 公比为 q 的等比数列. 又 $\therefore \Delta a_2 = a_3 - a_2 = 2, \therefore q = 2, \therefore \Delta^2 S_1 = 2, \therefore d + c_1 q (q-1) = 2$, 又 $\therefore d = 0, q = 2, \therefore c_1 = 1, \therefore b_1 = a_1 - c_1 = 3 - 1 = 2$. 综上所述, $a_n = b_1 + (n-1)d + c_1 q^{n-1} = 2 + 2^{n-1}$.

【自测题】

C [解析] 对于选项 A, B, 取 $a_n = 1$, 可知 $\{a_n\}$ 既为等差数列也为等比数列, 则 $a_1 + a_2 = 2$, 不存在 $m \in \mathbf{N}^+$, 使得 $a_m = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 不为内和数列, 故 A, B 错误; 对

于选项 C, $a_n > 0$, 对任意 $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^+, n_1 < n_2$, 可知存在 $m_1, m_2 \in \mathbf{N}^+$, 使得 $a_{m_1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n_1}, a_{m_2} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n_2}$, 则 $a_{m_2} - a_{m_1} = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2} > 0$, 即 $a_{m_2} > a_{m_1}$, 又内和数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 可知 $m_2 > m_1$, 所以其伴随数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 故 C 正确; 对于选项 D, 例如数列 $\{a_n\}$ 为 2, 1, 3, 4, 5, ..., 显然 $\{a_n\}$ 是所有正整数的排列, 可知 $\{a_n\}$ 为内和数列, 且 $\{a_n\}$ 的伴随数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 但 $\{a_n\}$ 不是递增数列, 故 D 错误. 故选 C.

第七单元 立体几何

第 42 讲 空间几何体

● 课标基础巩固

【知识聚焦】

- (1) 平行 全等 平行 相似
平行且相等 一点 一点 平行四边形
三角形 梯形 (2) 垂直 一点 一点
矩形 等腰三角形 等腰梯形 圆
矩形 扇形 扇环
- (1) 斜二测画法 (2) ① 垂直
② 分别平行于坐标轴 不变 一半
- $2\pi r l$ $\pi r l$ $\pi(r+r')l$
- $S_{\text{底}} h$ $\frac{1}{3} S_{\text{底}} h$ $4\pi R^2$ $\frac{4}{3} \pi R^3$

【对点演练】

- ④ [解析] 对于①, 经过不共面的四点的球, 即为由这四个点组成的四面体的外接球, 有且仅有一个, 故①中说法正确; 对于②, 平行六面体的每个面都是平行四边形, 故②中说法正确; 对于③, 正棱柱的每条侧棱均与上下底面垂直, 故③中说法正确; 对于④, 棱台的每条侧棱延长后交于一点, 侧棱有可能与底面垂直, 故④中说法错误.

4. 16 [解析] 根据题意, 原图形 $\triangle AOB$ 的底边 OB 的长为 4, 高为 16.

- 2 [解析] 设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 由条件得 $\begin{cases} \pi r l + \pi r^2 = 12\pi, \\ \frac{2\pi r}{l} = \pi, \end{cases}$

$$\therefore 3r^2 = 12, \therefore r = 2.$$

- $\frac{28\sqrt{14}}{3}$ [解析] 由题意知, 正四棱台上底面边长为 2 cm, 侧棱和下底面边长都是 4 cm, 如图, 设正四棱台上、下底面中心分别为 O_1, O , 连接 O_1O, O_1B_1, OB , 结合正四棱台性质可知四边形 O_1OBB_1 为直角梯形, 且 $OB = 2\sqrt{2}, O_1B_1 = \sqrt{2}$, 故 $O_1O = \sqrt{(B_1B)^2 - (OB - O_1B_1)^2} = \sqrt{16 - 2} = \sqrt{14}$, 即正四棱台的高为 $\sqrt{14}$, 故正四棱台的体积为 $\frac{1}{3} \times (2^2 + 2 \times 4 + 4^2) \times \sqrt{14} = \frac{28\sqrt{14}}{3}$.

- 1:47 [解析] 设长方体的过同一顶点的三条棱的长分别为 a, b, c , 则截出的棱锥的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b \times \frac{1}{2} c = \frac{1}{48} abc$, 剩下的几何体的体积 $V_2 = abc - \frac{1}{48} abc = \frac{47}{48} abc$, 所以 $V_1 : V_2 = 1 : 47$.

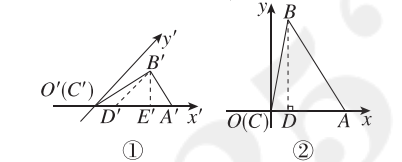
- $24\pi^2$ 或 $36\pi^2$ [解析] 设圆柱的底面半径为 r . 若圆柱的母线长是 6π , 则 $4\pi = 2\pi r$, 所以 $r = 2$, 所以圆柱的体积为 $\pi \times 2^2 \times 6\pi = 24\pi^2$. 若圆柱的母线长是 4π , 则 $6\pi = 2\pi r$, 所以 $r = 3$, 所以圆柱的体积为 $\pi \times 3^2 \times 4\pi = 36\pi^2$. 故圆柱的体积是 $24\pi^2$ 或 $36\pi^2$.

● 课堂考点探究

- 例 1 [思路点拨] 根据题意, 由三角形面积公式求出 $B'D'$ 的长, 结合斜二测画法可

得原图形中 BD 的长.

D [解析] 画出平面直角坐标系 xOy (图②), 在 x 轴上取 $OA = O'A'$, 即 $CA = C'A'$, 在图①中, 过 B' 作 $B'D' \parallel y'$ 轴, 交 x' 轴于 D' , 在 x 轴上取 $OD = O'D'$, 过点 D 作 $DB \parallel y$ 轴, 并使 $DB = 2D'B'$, 连接 AB, BC , 则 $\triangle ABC$ 即为原图形, 如图②所示. 原图形中, $BD \perp AC$ 于点 D , 则 BD 为原图形中 AC 边上的高, 且 $BD = 2B'D'$. 在图①中作 $B'E' \perp A'C'$ 于点 E' , 则 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} A'C' \times B'E' = B'E' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以在直角三角形 $B'E'D'$ 中, $B'D' = \sqrt{2} B'E' = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $BD = 2B'D' = \sqrt{6}$, 故原图形中 AC 边上的高为 $\sqrt{6}$ cm. 故选 D.



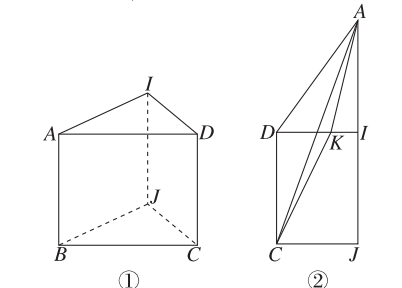
变式题 B [解析] 方法一:

由已知求得 $O'C' = \sqrt{2}$, 把直观图还原为原图形如图, 可得原图形为直角梯形, $OA \parallel CB$, $OA \perp OC$, 且 $OA = 1$, $BC = 2$, $OC = 2\sqrt{2}$, 则原四边形 $OABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

方法二: 由题意知 $A'B' = 1$, $\therefore S_{\text{直观图}} = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 = \frac{3}{2}$, $\therefore S_{\text{原图形}} = 2\sqrt{2} S_{\text{直观图}} = 3\sqrt{2}$.

- 例 2 [思路点拨] (1) 作出图形, 将原问题转化为平面上两点间的距离最短问题, 进而得解. (2) 通过圆锥侧面展开图是半圆, 求出圆锥母线长, 再用侧面积公式计算即可.

(1) B (2) 1 [解析] (1) 将展开图还原成立体图形得到三棱柱 $ADI-BCJ$, 如图①. 由已知可得, $AI = 4, DI = 3, AD = 5$, 易知 $\triangle ADI$ 为直角三角形且 $\angle AID = 90^\circ$. 将三棱柱的上底面 ADI 沿 DI 翻折至平面 $IDCJ$ 上, A, C 在 DI 两侧, 连接 AC , 如图②所示. 因为 $AJ = 8, CJ = 3$, 所以 $AC = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$, 则 $AK + CK$ 的最小值为 $\sqrt{73}$. 故选 B.



(2) 如图, 设圆锥的母线长为 l , 底面半径为 r , 则圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi r l = 2\pi$, 即 $r \cdot l = 2$. 由侧面展开图得半圆, 可知 $\frac{1}{2} \pi l^2 = 2\pi$, 可得 $l = 2$, 因此 $r = 1$.

变式题 (1) 3.6 km

(2) $2\sqrt{2}$ [解析] (1) 由题意, 半径为 2 km, 山高 8 km 为 $2\sqrt{15}$ km, 则母线长 $SA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{15})^2} = 8$ (km), 底面圆周长为 $2\pi \times 2 = 4\pi$ (km), 所以展开图的圆心角 $\alpha = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. 如图

是圆锥侧面展开图, 结合题意, $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (km), 由点 S 向 AB 引垂线, 垂足为 H , 此时 SH 为点 S 和线段 AB 上的点连线的最小值, 即点 H 为公路的最高点, HB 即为下坡路段, 则 $SB^2 = BH \cdot AB$, 即 $36 = 10 \cdot BH$, 得 $BH = 3.6$ km, 故下坡路段长为 3.6 km.

(2) 由题意可得此三棱锥的侧面展开图如图, 连接 AA' , 则 $\triangle AED$ 的周长为 $AD + DE + EA'$, 因为两点之间线段最短, 所以当 A, D, E, A' 在一条直线上时, 截面三角形 AED 的周长最小, 最小值为 AA' 的长. 因为 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA' = 30^\circ$, 所以 $\angle APA' = 90^\circ$, 因为 $PA = PA' = 2$, 所以 $AA' = \sqrt{PA^2 + PA'^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, 所以截面三角形 AED 周长的最小值为 $2\sqrt{2}$.

- 例 3 [思路点拨] (1) 根据题意画出图形, 结合图形求出圆锥的母线长和底面半径, 即可求出圆锥的侧面积. (2) 设正六边形的边长为 a , 根据正六边形的面积求出 a^2 的值, 结合题意知原正四面体的棱长为 $3a$, 即可计算出原正四面体的表面积.

(1) $\sqrt{2}\pi$ (2) 12 [解析] (1) 如图所示, 因为三棱锥 $O-PAB$ 为正三棱锥, 所以 $PA = PB = AB = \sqrt{2}, OA = OB = OP$. 因为 $PO \perp AO, PO \perp OB$, 所以由勾股定理得 $OA = OB = OP = 1$, 则圆锥的底面半径 $r = 1$, 母线长 $l = \sqrt{2}$, 则该圆锥的侧面积为 $\pi r l = \sqrt{2}\pi$.

(2) 设正六边形的边长为 a , 根据题意得 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 2$, 解得 $a^2 = \frac{8}{6\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, 由题意可知原正四面体的棱长为 $3a$, 故原正四面体的表面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3a)^2 \times 4 = 12$.

变式题 (1) D (2) 26π [解析] (1) 设圆

台的母线长为 l , 因为该圆台的侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$, 所以由圆台的侧面积公式可得 $\pi l(1+2) = 3\pi l = 3\sqrt{5}\pi$, 所以 $l = \sqrt{5}$. 设截去的小圆锥的母线长为 l' , 则由三角形相似可得 $\frac{l'}{l+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, 解得 $l' = \sqrt{5}$, 所以原

圆锥的母线长为 $l' + l = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$, 故选 D.

(2) 设上底面的半径为 r , 则下底面的半径是 $3r$, 故轴截面的周长为 $16 = 4 + 4 + 2r + 6r$, 解得 $r = 1$, 所以上、下底面的面积分别为 $\pi, 9\pi$, 圆台侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi(1+3) \times 4 = 16\pi$, 所以圆台的表面积为 $\pi + 9\pi + 16\pi = 26\pi$.

例 4 [思路点拨] (1) 设出底面半径, 通过高结合侧面积相等, 求出底面半径, 然后求解圆锥的体积. (2) 通过割补法将不规则图形转化为较为常见的图形来解决.

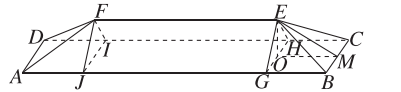
(1) B (2) C [解析] (1) 设底面半径均为 R , 圆锥的母线长为 l , 则 $l = \sqrt{3+R^2}$. 由题可知 $2\pi R \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 2\pi R l$, 解得 $l = 2\sqrt{3}$, 则 $\sqrt{3+R^2} = 2\sqrt{3}$, $\therefore R = 3$, $\therefore$ 圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$, 故选 B.

(2) 用一个完全相同的五面体 $H I J-L M N$ 与五面体 $A B C-D E F$ 组合在一起, 使得 D 与 L 重合, E 与 M 重合, F 与 N 重合, 因为 $A D \parallel B E \parallel C F$, 且两两之间的距离为 1, $A D = 1$, $B E = 2$, $C F = 3$, 所以构成的新组合体为一个三棱柱, 该三棱柱的与侧棱垂直的截面(与三条侧棱都相交)是边长为 1 的等边三角形, 侧棱长为 $1+3=2+2=3+1=4$, 则 $V_{A B C-D E F} = \frac{1}{2} V_{A B C-H I J} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

变式题 (1) D (2) C (3) 28

[解析] (1) 设半球的半径为 r , 圆锥的高为 h , 由题意知 $\frac{\pi r^2 \sqrt{r^2+h^2}}{2\pi r^2} = 2$, 解得 $h = \sqrt{15}r$. 故圆锥的体积与半球体的体积的比值为 $\frac{\frac{1}{3} \pi r^2 h}{\frac{2}{3} \pi r^3} = \frac{h}{2r} = \frac{\sqrt{15}}{2}$. 故选 D.

(2) 过 E 作 $E O \perp$ 平面 $A B C D$ 于 O , 过 O 作 $G H \parallel B C$ 分别交 $A B, C D$ 于 G, H , 连接 $E G, E H$, 记 $B C$ 的中点为 M , 连接 $E M, O M$, 同理作出 $F J, F I, I J$, 如图. 由题意可知 $\angle E M O, \angle E G O$ 分别为相应面与底面所成的角, 即 $\tan \angle E M O = \tan \angle E G O = \frac{3}{5}$, $\therefore O G = O M = 5$, $\therefore O E = 3, J G = 15$, $\therefore$ 五面体的体积 $V = V_{F-A D J} + V_{F-I J-H} + V_{E-B C H G} = S_{\triangle E H G} \cdot J G + 2 \times \frac{1}{3} S_{\text{四边形 } B C H G} \cdot O E = 225 + 100 = 325$. 故选 C.



(3) 方法一: 依题意可知, 原正四棱锥的高为 6, 故棱台的体积 $V = V_{\text{大正四棱锥}} - V_{\text{小正四棱锥}} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 - \frac{1}{3} \times 2^2 \times 3 = 28$.

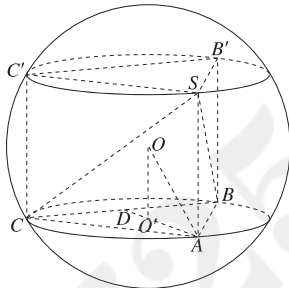
方法二: 由题可知所得棱台的高为 3, 上底面是边长为 2 的正方形, 下底面是边长为 4 的正方形, 由棱台的体积公式可得棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (4^2 + 2^2 + \sqrt{4^2 \times 2^2}) \times 3 = 28$.

增分微课 6 与球有关的切、接问题

例 1 (1) A (2) 2 [解析] (1) 由题意, 设

球的球心为 O , 半径为 R , 正三棱台的上、下底面分别为 $\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2$, $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$ 均为正三棱台的棱, 则 $\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2$ 都是等边三角形. 设 $\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2$ 的外接圆圆心分别为 O_1, O_2 , 连接 $O_1 O_2$, 则 $O_1 O_2 = 1$. 连接 $O_1 A_1, O_2 A_2$, $\therefore$ 等边三角形 $A_1 B_1 C_1$ 和等边三角形 $A_2 B_2 C_2$ 的边长分别为 $3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$, $\therefore O_1 A_1 = 3, O_2 A_2 = 4$. 连接 $O A_1, O A_2$, 若点 O 在线段 $O_1 O_2$ 上, 则 $R^2 = O_1 A_1^2 + O O_1^2 = O_2 A_2^2 + (1 - O O_1)^2$, 即 $3^2 + O O_1^2 = 4^2 + (1 - O O_1)^2$, 可得 $O O_1 = 4 > O_1 O_2$, 矛盾, 故点 O 在线段 $O_1 O_2$ 的延长线上. 由题意得 $R^2 = O_1 A_1^2 + (O O_1 + 1)^2 = O_2 A_2^2 + O O_2^2$, 可得 $O O_2 = 3, R = 5$, $\therefore$ 该球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 100\pi$.

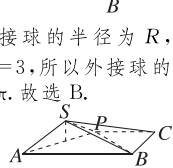
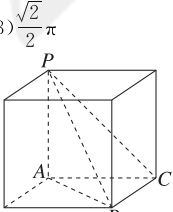
(2) 连接 $S B, S C$, 形成三棱锥 $S-A B C$, 并将三棱锥 $S-A B C$ 补成正三棱柱 $S B' C'-A B C$, 如图, 则三棱锥 $S-A B C$ 的外接球也是正三棱柱 $S B' C'-A B C$ 的外接球, 显然球心 O 到底面 $A B C$ 的距离即为三棱柱的高 $S A$ 的一半. 设 O' 为 $\triangle A B C$ 的中心, 连接 $A O, O O'$, 则 $O O' \perp$ 平面 $A B C$, 连接 $A O'$ 并延长, 使之交 $B C$ 于点 D , 则 $A D = \frac{3\sqrt{3}}{2}, A O' = \frac{2}{3} A D = \sqrt{3}$, 所以 $O O' = \sqrt{O A^2 - O' A^2} = \sqrt{4-3} = 1$, 则 $S A = 2 O O' = 2$.



变式题 (1) B (2) 4π (3) $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$

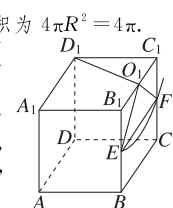
[解析] (1) 如图, 将四面体 $P-A B C$ 补成长方体, 长方体的长、宽、高分别为 2, 1, 2. 四面体 $P-A B C$ 的外接球即为长方体的外接球, 而长方体的外接球的直径等于长方体的体对角线长. 设外接球的半径为 R , 则 $2R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, 所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 9\pi$. 故选 B.

(2) 如图, 因为 $A B = 2$, $A D = 1, P$ 为 $D C$ 的中点, 所以 $A P = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, B P = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 所以 $A P^2 + B P^2 = A B^2$, 所以 $B P \perp A P$, 又平面 $S A P \perp$ 平面 $A B C P$, 平面 $S A P \cap$ 平面 $A B C P = A P, B P \subset$ 平面 $A B C P$, 所以 $B P \perp$ 平面 $S A P$. 又 $\triangle S A P$ 为等腰直角三角形, 所以其外接圆的半径 $r = \frac{1}{2} A P = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 设三棱锥 $S-A B P$ 的外接球的半径为



R , 则 $R^2 = r^2 + \left(\frac{P B}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$, 所以 $R = 1$, 所以三棱锥 $S-A B P$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi$.

(3) 如图, 取 $B_1 C_1$ 的中点 O_1 , 连接 $D_1 O_1$. $\therefore$ 四棱柱 $A B C D-A_1 B_1 C_1 D_1$ 是各棱长均为 2 的直四棱柱, 且 $\angle B A D = 60^\circ$, $\therefore D_1 O_1 \perp$ 平面 $B_1 C_1 C B$, 且 $D_1 O_1 = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.



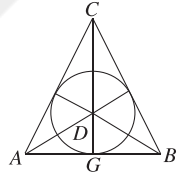
由球的截面圆的性质可得截面圆的半径为 $\sqrt{5-3} = \sqrt{2}$. 在平面 $B_1 C_1 C B$ 上作以 O_1 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆弧, 与棱 $B B_1, C C_1$ 的交点分别为 E, F , 易得 E, F 均为所在棱的中点. 连接 $O_1 F, O_1 E, E F$. $\therefore O_1 E = O_1 F = \sqrt{2}, E F = 2$, $\therefore \angle E O_1 F = \frac{\pi}{2}$, $\therefore$ 球面与侧面 $B_1 C_1 C B$ 的交线长为 $\frac{1}{4} \times 2\pi \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$.

例 2 D [解析] 设该正三棱锥为 $P-A B C$, 内切球的半径为 r , 过点 P 作 $P D \perp$ 平面 $A B C$ 于点 D , 连接 $A D$ 并延长, 交 $B C$ 于点 E , 连接 $P E$. $\therefore \triangle A B C$ 是正三角形, $\therefore E$ 是 $B C$ 的中点, D 为 $\triangle A B C$ 的中心. $\therefore A B = 2\sqrt{3}$, $\therefore S_{\triangle A B C} = 3\sqrt{3}, D E = 1, P E = \sqrt{2}$, $\therefore$ 该正三棱锥的表面积 $S_{\text{表}} = 3 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$. 该

正三棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{3} S_{\text{表}} \cdot r = V$, 即 $\frac{1}{3} \times (3\sqrt{6} + 3\sqrt{3}) \cdot r = \sqrt{3}$, 解得 $r = \sqrt{2} - 1$. 故选 D.

变式题 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

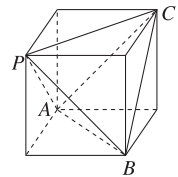
[解析] 圆锥的轴截面如图所示, 设内切球的球心为 D , 半径为 R , 则 $A B = 2, C G = 2$, 所以 $A C = B C = \sqrt{\left(\frac{A B}{2}\right)^2 + C G^2} = \sqrt{5}$, 又 $S_{\triangle A B C} = S_{\triangle A D B} + S_{\triangle A D C} + S_{\triangle B D C}$, 即 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2R + \frac{1}{2} \times \sqrt{5}R + \frac{1}{2} \times \sqrt{5}R$, 解得 $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即内切球的半径为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



例 3 $\frac{32\pi}{3}$ [解析] 如图, 由题意知三棱柱 $A B C-A_1 B_1 C_1$ 是正三棱柱, 分别取 $A C, A_1 C_1$ 的中点 D, D_1 , 连接 $D D_1, B_1 D_1, B D$, 设 M, N 分别是三棱柱下底面和上底面的中心, 连接 $M N$, 则 $M \in B D, N \in B_1 D_1$. 由对称性知 $M N$ 的中点为球 O 的球心, 取 $A B$ 的中点 E (切点), 连接 $O E, E M$, 则 $O E = M B$ ($M B$ 等于球心 O 到棱 $B B_1$ 的距离). 设球 O 的半径为 R , 由正三角形的性质知 $E M = D M = \frac{1}{2} B M = \frac{1}{2} R$, $M N$ 与底面垂直, 则必与直线 $E M$ 垂直, 因此在 $R t \triangle E O M$ 中, 可得 $R^2 - \left(\frac{1}{2} R\right)^2 = O M^2 = (\sqrt{3})^2$, 可得 $R = 2$, 所以球 O 的体积 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}$.

变式题 (1) B (2) 1 :

2 : 3 [解析] (1) 将正四面体 $P-A B C$ 补成一个正方体, 如图, 球 O 与正四面体的棱都相切, 则球 O 为正方体的内切球. 设正方体的棱长为 a , 则 $a^2 + a^2 = 16$, 得 $a = 2\sqrt{2}$, 则球 O 的半径 $r = \sqrt{2}$, 故球 O 的表面积 $S = 4\pi r^2 = 8\pi$, 故选 B. (2) 设正方体的棱长为 a . ①球 O_1 为正方体的内切球, 球心 O_1 是正方体的中心, 切点是正方体六个面的中心, 经过四个切点

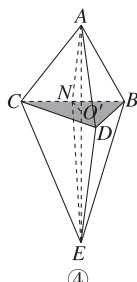
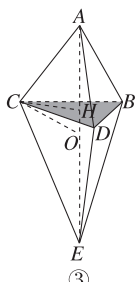
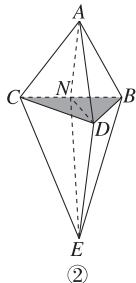
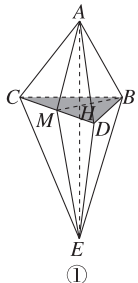


及球心作截面,如图所示,设球 O_1 的半径为 r_1 ,表面积为 S_1 ,则 $2r_1=a$,即 $r_1=\frac{a}{2}$,所以 $S_1=4\pi r_1^2=\pi a^2$.

②球 O_2 与正方体各棱的切点为各棱的中点,过正方体的两个相对面的面对角线作截面,如图所示,设球 O_2 的半径为 r_2 ,表面积为 S_2 ,则 $2r_2=\sqrt{2}a$,即 $r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,所以 $S_2=4\pi r_2^2=2\pi a^2$.

③球 O_3 过正方体的各个顶点,即正方体的各个顶点都在球面上,过正方体的体对角线作截面,如图所示,设球 O_3 的半径为 r_3 ,表面积为 S_3 ,则 $2r_3=\sqrt{3}a$,即 $r_3=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,所以 $S_3=4\pi r_3^2=3\pi a^2$.故这三个球的表面积之比为 $S_1:S_2:S_3=\pi a^2:2\pi a^2:3\pi a^2=1:2:3$.

例4 BD [解析] 对于A,如图①,连接AE交平面BCD于H,连接BH并延长交CD于M,连接EM,AM,易知A,B,E,M共面,若AB//平面DCE,平面ABEM∩平面CDE=EM,所以AB//EM,从而 $\frac{BH}{MH}=\frac{AH}{EH}=2$,这与三棱锥E-BCD的高(EH)大于三棱锥A-BCD的高(AH)矛盾,所以AB不平行于平面DCE,故A错误;对于B,如图②,取BC的中点N,连接AN,EN,易知∠ANE为二面角A-BC-E的平面角,连接DN,则AN=DN= $\frac{\sqrt{3}}{2}$,AD=1,所以 $\cos\angle AND=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$,又由于三棱锥E-BCD的高大于三棱锥A-BCD的高,所以 $\angle ANE>2\angle AND>\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\angle ANE<\cos 2\angle AND=2\cos^2\angle AND-1=-\frac{7}{9}$,故B正确;对于C,如图③,连接AE交平面BCD于H,连接CH,假设该六面体存在外接球,则球心O位于AE的中点,连接OC,设外接球的半径为R,EH=x,则 $R=\frac{AH+EH}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}+x}{2}$,OH=x-R= $x-\frac{\sqrt{6}}{3}$,结合 $OH^2+CH^2=R^2$,得 $(x-\frac{\sqrt{6}}{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=(\frac{\sqrt{6}+x}{2})^2$,解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{6}$,这与 $x>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 矛盾,故C错误;对于D,如图④,连接AE,易知AE上的点到三棱锥A-BCD各侧面的距离相等,记为 d_1 ,到三棱锥E-BCD各侧面的距离也相等,记为 d_2 ,取BC的中点N,连接AN,EN,作∠ANE的平分线交AE于O',此时 $d_1=d_2$,O'即为内切球的球心,故D正确.故选BD.

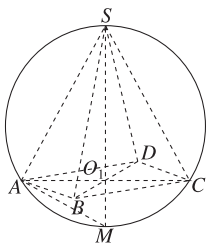


变式题 $6\sqrt{3}$ 27

[解析] 该组合体一共有24个面,每一个面都是全等的边长为1的等边三角形,则其表面积为 $24\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$.该组合体的外接球也是任意一个正四面体的外接球,可用一个正四面体来看,正四面体A-BCD如图所示,设E是△BCD的中心,F是外接球心,则 $2DE\cos\frac{\pi}{6}=DC$,则 $DE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$AE=\sqrt{2^2-(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.设外接球的半径为R,则 $AF=DF=R$,又 $AF+EF=AE$, $DF^2=EF^2+DE^2$,解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.两正四面体公共部分一共有8个面,且每一个面都是全等的边长为1的等边三角形,则其表面积为 $8\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$,大正四面体的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则每个小正四面体的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(\frac{1}{2})^3=\frac{\sqrt{2}}{12}$,则中间公共部分的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}-4\times\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.设其内切球的半径为r,则中间公共部分的体积也可表示为 $\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{2}}{3}$,解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{6}$,故外接球和内切球的体积的比值为 $(\frac{R}{r})^3=27$.

例5 (1)C (2) $4\sqrt{3}\pi$ [解析] (1)方法一(导数法):如图,连接AC,BD交于点O,连接SO.设正四棱锥S-ABCD的高 $SO_1=h$,底面边长为a,则 $AO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,设正四棱锥外接球的半径为R,则由 $\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$,得 $R=3$.延长 SO_1 ,交球面于点M,连接AM,则SM为球的直径,易知 $AO_1\perp SM$,在Rt△SAM中,由射影定理知, $l^2=6h$, $\frac{1}{2}a^2=h(6-h)$,所以 $a^2=2h(6-h)$, $h=\frac{l^2}{6}\in[\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$,所以正四棱锥S-ABCD的体积为 $\frac{1}{3}a^2h=\frac{2}{3}h^2(6-h)=\frac{2}{3}(-h^3+6h^2)$.记 $V(h)=\frac{2}{3}(-h^3+6h^2)$, $h\in[\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$,则



$V'(h)=2(-h^2+4h)$, $h\in[\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$,当 $h\in[\frac{3}{2},4]$ 时, $V'(h)>0$, $V(h)$ 单调递增,当 $h\in(4,\frac{9}{2}]$ 时, $V'(h)<0$, $V(h)$ 单调递减,所以 $V(h)_{\max}=V(4)=\frac{64}{3}$, $V(h)_{\min}=\min\{V(\frac{3}{2}),V(\frac{9}{2})\}=\min\{\frac{27}{4},\frac{81}{4}\}=\frac{27}{4}$,所以该正四棱锥体积的取值范围是 $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$.方法二(基本不等式法):同方法一得正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}(12-2h)h\times h\leq\frac{1}{3}\times[\frac{(12-2h)+h+h}{3}]^3=\frac{64}{3}$ (当且仅当 $h=4$ 时取等号).当 $l=3$ 时, $h=\frac{3}{2}$, $a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,则 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\times(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2\times\frac{3}{2}=\frac{27}{4}$.当 $l=3\sqrt{3}$ 时, $h=\frac{9}{2}$, $a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,则 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\times(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2\times\frac{9}{2}=\frac{81}{4}$.因为 $\frac{27}{4}<\frac{81}{4}<\frac{64}{3}$,所以该正四棱锥体积的取值范围是 $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$.

(2)设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为h, $AC=BC=AB=a$,则 $3a\times h=9$,所以 $h=\frac{3}{a}$.设△ABC外接圆的半径为r,则 $2r=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}$,解得 $r=\frac{\sqrt{3}a}{3}$.设球O的半径为R,则 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{a^2}{3}+\frac{9}{4a^2}\geq\sqrt{3}$,当且仅当 $a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时,等号成立,所以球O的表面积的最小值为 $4\pi\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$.

变式题 C [解析] 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp BC$,所以△ABC为直角三角形,则△ABC外接圆的圆心为斜边AC的中点.同理△A₁B₁C₁外接圆的圆心为斜边A₁C₁的中点.因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径为6,所以外接球的半径 $R=3$.由图知,上、下底面的中心分别为O₁,O,连接O₁O,则外接球的球心G为O₁O的中点,连接GC,则 $GC=3$,设 $AB=x(0<x<6)$,则 $AC=\sqrt{x^2+4}$,则 $OC=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$.在Rt△COG中, $OG=\sqrt{9-\frac{x^2+4}{4}}$,则 $OO_1=2\sqrt{9-\frac{x^2+4}{4}}=\sqrt{32-x^2}$,故该三棱柱的体积 $V=\frac{1}{2}\times 2x\times\sqrt{32-x^2}=\sqrt{x^2(32-x^2)}\leq\sqrt{(\frac{x^2+32-x^2}{2})^2}=16$,当且仅当 $x^2=32-x^2$,即 $x=4$ 时等号成立.故选C.

第43讲 空间点、直线、平面之间的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 不在一条直线上 两个点 平行

2. 这条直线外 相交 平行
3. (1)相交 平行 任何 (2)相等或互补
4. 1 0 无数 0 无数

【对点演练】

1. ④ [解析] 对于①,共线的三点不能确定一个平面,故①错误;对于②,若两个平面有一个公共点,则这两个平面有一条经过该点的公共直线,该交线上有无数个公共点,故②错误;对于③,三条平行直线可能共面,也可能有一条直线在另外两条平行直线确定的平面外,故③错误;对于④,当三条直线两两相交且三个交点不重合时,三条直线共面,当三条直线两两相交于一个点时,这三条直线可能在同一个平面内,也可能不共面,此时其中任意两条直线都可以确定一个平面,共可以确定3个平面,故④正确,故填④.
2. 直线CD [解析] 由题意知, $D \in l, l \subset \beta$,所以 $D \in \beta$,又因为 $D \in AB$,所以 $D \in$ 平面ABC,所以点D在平面ABC与平面 β 的交线上.又因为 $C \in$ 平面ABC, $C \in \beta$,所以点C在平面 β 与平面ABC的交线上,所以平面ABC $\cap$ 平面 $\beta=CD$.
3. ④ [解析] 依题意, $m \cap \alpha=A, n \subset \alpha$, $\therefore m$ 与 n 可能异面、相交(垂直是相交的特例), m 与 n 一定不平行,故填④.
4. 异面或平行 [解析] 如果两条直线 a 和 b 没有公共点,那么 a 与 b 的位置关系是异面或平行.
5. (1) $AC=BD$ (2) $AC=BD$ 且 $AC \perp BD$
[解析] (1)由题意知, $EF \parallel AC, EH \parallel BD$,且 $EF=\frac{1}{2}AC, EH=\frac{1}{2}BD$, $\therefore$ 四边形EFGH为菱形, $\therefore EF=EH, \therefore AC=BD$.
(2) $\because$ 四边形EFGH为正方形, $\therefore EF=EH$ 且 $EF \perp EH, \therefore AC=BD$ 且 $AC \perp BD$.

● 课堂考点探究

- 例1 [思路点拨] (1)连接EF,CD₁,A₁B,可证得EF $\parallel$ A₁B $\parallel$ CD₁,从而得到E,C,D₁,F四点共面;(2)设CE,D₁F交于点P,再证明直线DA经过点P即可.
证明:(1)如图,连接EF,CD₁,A₁B.由平行六面体的性质得A₁B $\parallel$ D₁C, $\therefore E,F$ 分别是AB,AA₁的中点, $\therefore EF \parallel BA_1$,又A₁B $\parallel$ D₁C, $\therefore EF \parallel CD_1$, $\therefore E,C,D_1,F$ 四点共面.
(2) $\because EF \parallel CD_1, EF < CD_1$, $\therefore CE$ 与D₁F必相交,延长CE,D₁F,设交点为P,如图所示.由P $\in CE, CE \subset$ 平面ABCD,得P $\in$ 平面ABCD.同理可得P $\in$ 平面ADD₁A₁.延长DA, $\therefore$ 平面ABCD $\cap$ 平面ADD₁A₁=DA, $\therefore P \in$ 直线DA, $\therefore CE,D_1,F,DA$ 三线共点.

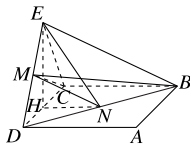
- 变式题 证明:(1)如图,连接B₁D₁.因为EF是 $\triangle C_1D_1B_1$ 的中位线,所以EF $\parallel$ B₁D₁.在正方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中,B₁D₁ $\parallel$ BD,所以EF $\parallel$ BD,所以EF,BD确定一个平面,即D,B,F,E四点共面.
(2)在正方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中,连接A₁C,设平面ACC₁A₁为 α ,平面BDEF为 β .因为Q $\in$ A₁C₁,所以Q $\in \alpha$.又Q $\in$ EF,所以Q $\in \beta$,所以Q是 α 与 β 的公共点.同理,P是 α 与 β 的公共点,所以 $\alpha \cap \beta=PQ$.又A₁C $\cap \beta=R$,所以R $\in$ A₁C,R $\in \alpha$,且R $\in \beta$,则R $\in PQ$,故P,Q,R三点共线.
(3)因为EF $\parallel$ BD且EF $<$ BD,所以DE与BF相交,设交点为M,则由M $\in$ DE,DE $\subset$ 平面D₁DCC₁,得M $\in$ 平面D₁DCC₁.同理,M $\in$ 平面B₁BCC₁.又平面D₁DCC₁ $\cap$ 平面B₁BCC₁=CC₁,所以M $\in$ CC₁,所以DE,BF,CC₁三线

交于一点.

- 例2 [思路点拨] (1)由中位线可得四边形MNBE为梯形,进而得到BM,EN相交,在直角三角形中,利用勾股定理计算可得BM $\neq$ EN.(2)借助长方体,判断直线 a,c 的位置关系.

(1)B (2)D

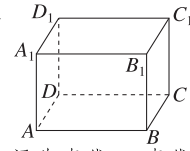
[解析] (1)连接BD,则N为BD的中点,连接MN,CM,BE,如图所示,在 $\triangle EDB$ 中,M,N分别是ED,BD的中



点,所以MN $\parallel$ BE,MN $=\frac{1}{2}BE$,则四边形MNBE是梯形,BM,EN是梯形的两条对角线,所以直线BM,EN相交.设正方形ABCD的边长为 a ,由题意可得 $\triangle BCM$ 为直角三角形,则BM $=$

$\sqrt{BC^2+CM^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.记CD的中点为H,连接EH,HN,则 $\triangle EHN$ 为直角三角形,则EN $=\sqrt{EH^2+NH^2}=a$,故BM $\neq$ EN.综上所述,BM $\neq$ EN,且直线BM,EN是相交直线.

(2)如图,在长方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中:
①若直线AA₁记为直线 a ,直线BC记为直线 b ,直线B₁A₁记为直线 c ,此时 a 和 c 相交;
②若直线AA₁记为直线 a ,直线BC记为直线 b ,直线DD₁记为直线 c ,此时 a 和 c 平行;
③若直线AA₁记为直线 a ,直线BC记为直线 b ,直线C₁D₁记为直线 c ,此时 a 和 c 异面.故选D.

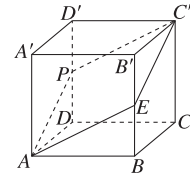


- 变式题 (1)C (2)CD [解析] (1)若 $\alpha \cap \beta=a$,因为 $m \perp$ 平面 $\alpha, a \subset \alpha$,所以 $m \perp a$,同理 $n \perp a$.过 m 上一点作直线 n 的平行线 n_1 ,则 $n_1 \perp a$.设由 m 和 n_1 确定的平面为 γ ,则 $a \perp \gamma$,而 $l \perp m, l \perp n$,同上可知 $l \perp \gamma$,故 $a \parallel l$,选项C正确;有可能 $l \subset \alpha$,所以选项A错误;由上可知 $a \parallel l$,且 $a \subset \beta$,所以 $l \parallel \beta$ 或 $l \subset \beta$,选项B错误; $\alpha \perp \beta$ 不一定成立,选项D错误.故选C.

(2)因为点A在平面CDD₁C₁外,点M在平面CDD₁C₁内,直线CC₁在平面CDD₁C₁内,CC₁不过点M,所以直线AM与CC₁是异面直线,故A错误;取DD₁的中点E,连接AE,则BN $\parallel$ AE,但AE与AM相交,所以AM与BN不平行,故B错误;因为点B₁与直线BN都在平面BCC₁B₁内,点M在平面BCC₁B₁外,BN不过点B₁,所以BN与MB₁是异面直线,故C正确;同理D正确.故选CD.

- 例3 [思路点拨] 先作出过点A,E,C'的平面截正方体所得截面,进而求得该截面的面积.

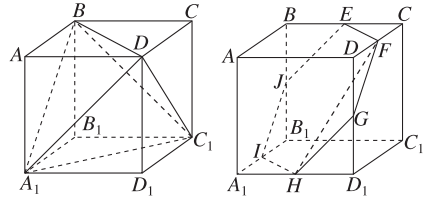
A [解析] 取DD'的中点P,连接AP,PC',由正方体的性质可知AP $\parallel$ EC',AP=EC',可得四边形APC'E为平行四边形,又AP=AE $=\sqrt{5}$,则四边形APC'E为菱形,所以截面是边长为 $\sqrt{5}$ 的菱形,两对角线长分别为 $2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$,所以该截面的面积 $S=\frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$.故选A.



- 例4 [思路点拨] 根据正方体、球体、四面体、圆柱体的结构特征逐项计算分析.

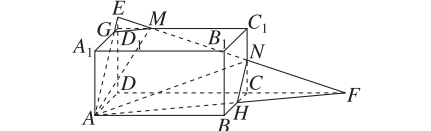
ABD [解析] 对于A,正方体内切球的直径为1m,故A正确;对于B,如图①,在正方体中作出正四面体A₁BDC₁,该正四面体的棱长为BA₁ $=\sqrt{2}$ m,而 $\sqrt{2} > 1.4$,故B正确;对于C,圆柱体的底面直径为0.01m,可以忽略不计,正方体的体对角线的长为 $\sqrt{3}$ m,而 $1.8 > \sqrt{3}$,故C不正确;对于D,圆柱体的高为0.01m,可

忽略不计,如图②,取E,F,G,H,I,J分别为所在棱的中点,并顺次连接,所得六边形EFGHIJ为正六边形,其边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m,连接FH,易知FH为正六边形EFGHIJ的内切圆直径,因为 $\angle GFH=\angle GHF=30^\circ$,所以FH $=\sqrt{3}FG=\sqrt{3}GH=\frac{\sqrt{6}}{2}$ m,而 $(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=\frac{6}{4}>1.2^2=1.44$,故D正确.故选ABD.

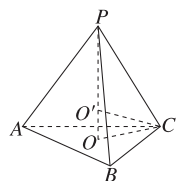


【应用演练】

1. D [解析] 如图所示,连接QP并延长,与CB的延长线交于M,且QP的反向延长线与CD的延长线交于N,连接MR,交BB₁于E,连接PE,则PQ,PE,RE为截面与正方体的交线,作RG $\parallel$ PQ,交C₁D₁于点G,连接NG,交DD₁于点F,连接QF,则RG,QF,FG为截面与正方体的交线,故截面为六边形PQFGRE.
2. D [解析] 当该平面过圆柱上、下底面中心时,截面图形为(1);当不过上、下底面的中心时,截面图形为(5).所以只有(1)(5)正确.故选D.
3. C [解析] 延长MN交DC的延长线于点F,连接AF交BC于点H,连接NH,延长NM交DD₁的延长线于点E,连接AE交A₁D₁于点G,连接GM,则五边形AHNMG为平面AMN截该长方体所得的截面图形.不妨设AB=2AD=2AA₁=4,又点M是C₁D₁上靠近D₁的四等分点,点N是CC₁的中点,所以C₁M=3,D₁M=1,C₁N=NC=1,所以CF=3,又CF $\parallel$ AB,所以 $\frac{AB}{CF}=\frac{BH}{CH}=\frac{4}{3}$,又BH+CH=2,所以CH $=\frac{6}{7}$,又 $\frac{D_1M}{DF}=\frac{ED_1}{ED}$,即 $\frac{1}{7}=\frac{ED_1}{ED_1+2}$,解得ED₁ $=\frac{1}{3}$,又 $\frac{GD_1}{AD}=\frac{ED_1}{ED}$,即 $\frac{GD_1}{2}=\frac{1}{3}$,解得GD₁ $=\frac{2}{3}$,符合题意,即五边形AHNMG为平面AMN截该长方体所得的截面图形.故选C.



4. C [解析] 根据题意,当正四面体在正方体的内切球内时,正四面体可以在正方体内任意转动,故当该正四面体内接于球时,其棱长最长.正方体的棱长为6,则其内切球的半径为3,如图,记内接于球的正四面体为P-ABC,设其棱长为 a ,O为底面ABC的中心,四面体外接球的球心为O',连接PO,OC,O'C,则O'在OP上,PO $\perp$ 底面ABC,所以CO $=\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,PO $=$



$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, $O'P = O'C = 3$, 在 $Rt\triangle O'OC$ 中, $(\frac{\sqrt{6}}{3}a - 3)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2 = 9$, 可得 $a = 2\sqrt{6}$, 故 m 的最大值为 $2\sqrt{6}$. 故选 C.

第 44 讲 直线、平面平行的判定与性质

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 此平面内 相交 2. 相交直线 相交 交线
【对点演练】

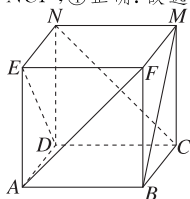
1. [解析] 过点 P 与直线 a 作平面 β , 设 $\beta \cap \alpha = b$, 则 $a \parallel b$, 由作图的过程可知满足条件的直线 b 只有 1 条.
2. ④ [解析] 因为 $a \parallel$ 平面 α , 所以直线 a 与平面 α 无交点, 因此直线 a 和平面 α 内的任意一条直线都不相交, 反之也成立.
3. $\frac{5}{2}$ [解析] 因为 $a \parallel \beta$, $\triangle PAB$ 所在的平面与 α, β 分别交于 CD, AB , 所以 $CD \parallel AB$, 所以 $\frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB}$, 又因为 $PC = 2, CA = 3, CD = 1$, 所以 $AB = \frac{5}{2}$.
4. ④ [解析] 由两个平面平行的判定定理可知, 如果一个平面内的两条相交直线分别与另一个平面平行, 那么这两个平面平行, 故①②不能判断两个平面平行; 当平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta =$ 直线 l 时, α 内有无数条与交线 l 平行的直线与 β 平行, 故③不能判断两个平面平行; 根据面面平行的定义可知④能判断两个平面平行, 故填④.
5. 平行四边形 [解析] $\because$ 平面 $ABFE \parallel$ 平面 $DCGH$, 平面 $EFGH \cap$ 平面 $ABFE = EF$, 平面 $EFGH \cap$ 平面 $DCGH = HG$, $\therefore EF \parallel HG$. 同理 $EH \parallel FG$, $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

● 课堂考点探究

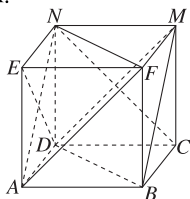
例 1 [思路点拨] (1) 根据平行的相关定理和结论逐项分析. (2) 把正方体的平面展开图还原成正方体 $ABCD-EFMN$, 根据线面、面面平行的判定和性质得到结果.

(1) D (2) A [解析] (1) 对于选项 A, 若存在一条直线 $a, a \parallel \alpha, a \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 故 A 错误; 对于选项 B, 若存在一条直线 $a, a \subset \alpha, a \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 故 B 错误; 对于选项 C, 若存在两条平行直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 故 C 错误. 故选 D.

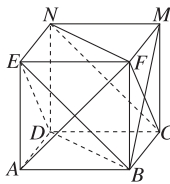
(2) 把正方体的平面展开图还原成正方体 $ABCD-EFMN$, 如图 a 所示. 对于①, 平面 $BCMF \parallel$ 平面 $ADNE$, $BM \subset$ 平面 $BCMF$, 所以 $BM \parallel$ 平面 $ADNE$, ①正确. 对于②, 平面 $DCMN \parallel$ 平面 $ABFE$, $CN \subset$ 平面 $DCMN$, 所以 $CN \parallel$ 平面 $ABFE$, ②正确. 对于③, 如图 b 所示, 易知 $DN = BF, DN \parallel BF$, 则四边形 $BDNF$ 为平行四边形, 则 $BD \parallel FN$, 又 $BD \subset$ 平面 $AFN, FN \subset$ 平面 AFN , 所以 $BD \parallel$ 平面 AFN ; 同理可得四边形 $ABMN$ 为平行四边形, 则 $BM \parallel AN$, 因为 $BM \subset$ 平面 $AFN, AN \subset$ 平面 AFN , 所以 $BM \parallel$ 平面 AFN , 又 $BD \cap BM = B, BD, BM \subset$ 平面 BDM , 所以平面 $BDM \parallel$ 平面 AFN , ③正确. 对于④, 如图 c 所示, 由③知 $BD \parallel FN$, 因为 $BD \subset$ 平面 $NCF, FN \subset$ 平面 NCF , 所以 $BD \parallel$ 平面 NCF ; 因为 $BC \parallel EN, BC = EN$, 所以四边形 $BCNE$ 为平行四边形, 所以 $BE \parallel CN$, 因为 $BE \subset$ 平面 $NCF, CN \subset$ 平面 NCF , 所以 $BE \parallel$ 平面 NCF . 又因为 $BD \cap BE = B$, 且 $BD, BE \subset$ 平面 BDE , 所以平面 $BDE \parallel$ 平面 NCF , ④正确. 故选 A.



图a



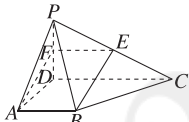
图b



图c

变式题 AB [解析] 对于 A, 过 m 作平面 γ 与平面 α 交于直线 c , 如图, 因为 l, m 是异面直线, 所以 l, c 相交, 又 $m \parallel \alpha$, 所以 $m \parallel c$, 由 $c \subset \beta, m \subset \beta$ 得 $c \parallel \beta$, 又 $l \parallel \beta, l, c$ 是 α 内的两条相交直线, 所以 $\alpha \parallel \beta$, A 正确; 对于 B, 由线面平行的性质定理, 可得 $l \parallel m$, 所以 B 正确; 对于 C, 如果 $\alpha \perp \beta, l \perp \alpha$, 那么 $l \parallel \beta$ 或 $l \subset \beta$, 所以 C 不正确; 对于 D, 如果 $l \perp m, l \perp \alpha$, 那么 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$, 所以 D 不正确. 故选 AB.

例 2 [思路点拨] 思路一: 取 PD 的中点 F , 连接 EF, AF , 通过四边形的性质证明 $BE \parallel AF$, 从而得证; 思路二: 延长 DA, CB 交于 H , 连接 PH , 利用比例相等以及三角形中位线定理得到 $BE \parallel PH$, 从而得证; 思路三: 取 CD 的中点 H , 连接 BH, EH , 利用平面 $BHE \parallel$ 平面 PAD , 得到线面平行.

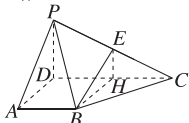


证明: 方法一: 如图, 取 PD 的中点 F , 连接 EF, FA . 由题意知 EF 为 $\triangle PDC$ 的中位线, $\therefore EF \parallel CD$, 且 $EF = \frac{1}{2}CD = 2$.

又 $\because AB \parallel CD, AB = 2, \therefore AB \parallel EF, \therefore$ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形, $\therefore BE \parallel AF$. 又 $AF \subset$ 平面 $PAD, BE \not\subset$ 平面 PAD , $\therefore BE \parallel$ 平面 PAD .

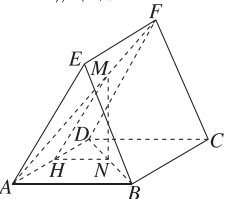
方法二: 如图, 延长 DA, CB 相交于 H , 连接 PH . $\because AB \parallel CD, AB = 2, CD = 4, \therefore \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$, 即 B 为 HC 的中点, 又 E 为 PC 的中点, $\therefore BE \parallel PH$, 又 $BE \not\subset$ 平面 $PAD, PH \subset$ 平面 $PAD, \therefore BE \parallel$ 平面 PAD .

方法三: 如图, 取 CD 的中点 H , 连接 BH, HE . $\because E$ 为 PC 的中点, $\therefore EH \parallel PD$, 又 $EH \subset$ 平面 $PAD, PD \subset$ 平面 $PAD, \therefore EH \parallel$ 平面 PAD . 由题意知 $AB \parallel DH, \therefore$ 四边形 $ABHD$ 为平行四边形, $\therefore BH \parallel AD$, 又 $AD \subset$ 平面 $PAD, BH \not\subset$ 平面 $PAD, \therefore BH \parallel$ 平面 PAD . 又 $BH \cap EH = H, BH, EH \subset$ 平面 $BHE, \therefore$ 平面 $BHE \parallel$ 平面 PAD , 又 $BE \subset$ 平面 $BHE, \therefore BE \parallel$ 平面 PAD .



变式题 证明: 在 AD 上取一点 H , 使得 $\frac{AH}{AD} = \frac{AM}{AF} = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$), 连接 HM, HN , 如图.

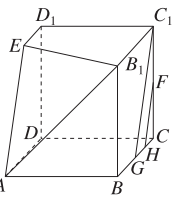
因为 $\frac{AH}{AD} = \frac{AM}{AF}$, 所以 $HM \parallel DF$. 因为 $DF \subset$ 平面 $PDF, HM \not\subset$ 平面 PDF , 所以 $HM \parallel$ 平面 PDF . 因为 $\frac{AH}{AD} = \frac{BN}{BD}$, 所以 $HN \parallel AB$, 又 $CD \parallel AB$, 所以 $HN \parallel CD$. 因为 $CD \subset$ 平面 $PDF, HN \not\subset$ 平面 PDF , 所以 $HN \parallel$ 平面 PDF . 因为 $HM \cap HN = H$, 且 $HM \subset$ 平面 $HMN, HN \subset$ 平面 HMN , 所以平面 $HMN \parallel$ 平面 PDF . 因为



$MN \subset$ 平面 HMN , 所以 $MN \parallel$ 平面 PDF .

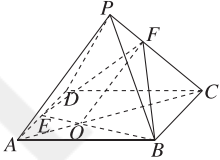
例 3 [思路点拨] 取 BC 的中点 G , 连接 GC_1 , 利用线面平行的性质定理和面面平行的性质定理推出 $GC_1 \parallel FH$, 即可得到点 F 的位置.

证明: 设平面 BCC_1B_1 与平面 AEB_1 的交线为 l . 因为 $FH \parallel$ 平面 AEB_1 , 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $AEB_1 = l, FH \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $FH \parallel l$. 因为平面 $ADD_1E \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 平面 $ADD_1E \cap$ 平面 $AEB_1 = AE$, 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $AEB_1 = l$, 所以 $AE \parallel l$, 所以 $AE \parallel FH$. 取 BC 的中点 G , 连接 C_1G , 易知 $AE \parallel GC_1$, 所以 $GC_1 \parallel FH$, 又 H 为 CG 的中点, 所以 F 为 CC_1 的中点.



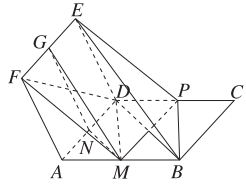
变式题 $\frac{1}{2}$

[解析] 如图, 连接 AC 交 BE 于点 O , 连接 OF . 因为 $AD \parallel BC, E$ 为 AD 的中点, 所以 $\frac{AO}{OC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}$. 又因为 $PA \parallel$ 平面 EBF , 平面 $EBF \cap$ 平面 $PAC = OF, PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $PA \parallel OF$, 所以 $\frac{PF}{FC} = \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$.



例 4 [思路点拨] (1) 先由线面平行得到面面平行, 再由面面平行推出线面平行即可; (2) 由面面平行的判定定理证明.

证明: (1) 如图, 取 DC 的中点 P , 连接 PE, PB, PM . 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, M 是 AB 的中点, 所以 $DP \parallel MB$ 且 $DP = MB$, 所以四边形 $MBPD$ 为平行四边形, 所以 $PB \parallel DM$. 又 $PB \subset$ 平面 $BPE, DM \not\subset$ 平面 BPE , 所以 $DM \parallel$ 平面 BPE . 因为 $PM \parallel AD$ 且 $PM = AD, AD \parallel FE$ 且 $AD = FE$, 所以 $PM \parallel FE$ 且 $PM = FE$, 所以四边形 $PEFM$ 为平行四边形, 所以 $FM \parallel PE$. 又 $FM \subset$ 平面 $BPE, PE \subset$ 平面 BPE , 所以 $FM \parallel$ 平面 BPE . 因为 $FM \cap DM = M, FM, DM \subset$ 平面 DMF , 所以平面 $DMF \parallel$ 平面 BPE . 因为 $BE \subset$ 平面 BPE , 所以 $BE \parallel$ 平面 DMF .



(2) 因为 M, N 分别是 AB, AD 的中点, 所以 $MN \parallel BD$, 又 $MN \not\subset$ 平面 $BDE, BD \subset$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE . 同理可证 $GN \parallel$ 平面 BDE . 又 $MN \cap GN = N, MN, GN \subset$ 平面 MNG , 所以平面 $BDE \parallel$ 平面 MNG .

变式题 解: (1) 证明: 因为 $AB \parallel DC, DC \subset$ 平面 $DCC_1D_1, AB \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 , 所以 $AB \parallel$ 平面 DCC_1D_1 . 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \parallel DD_1$, 又因为 $DD_1 \subset$ 平面 $DCC_1D_1, AA_1 \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 , 所以 $AA_1 \parallel$ 平面 DCC_1D_1 . 因为 $AB \cap AA_1 = A, AB, AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以平面 $ABB_1A_1 \parallel$ 平面 DCC_1D_1 . 因为 $A_1B \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $A_1B \parallel$ 平面 DCC_1D_1 .

(2) 设直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h , 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AA_1 \perp AB$, 同理可得 $CC_1 \perp BC$. 连接 AC , 因为 $AB \parallel DC, AB \perp AD, AB = 2, AD = 3, DC = 4$, 所以 $AC = 5, BC = \sqrt{13}$. 因为 $AA_1 = CC_1 = h$, 所以 $BA_1 = \sqrt{h^2 + 4}, BC_1 = \sqrt{h^2 + 13}$. 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \parallel CC_1, AA_1 = CC_1$, 所以四边形 ACC_1A_1 是平行

四边形,所以 $A_1C_1=AC=5$. 因为 $BA_1=\sqrt{h^2+4}<BC_1=\sqrt{h^2+13}$, $\triangle A_1BC_1$ 为直角三角形,所以 $(\sqrt{h^2+4})^2+(\sqrt{h^2+13})^2=5^2$ 或 $(\sqrt{h^2+4})^2+5^2=(\sqrt{h^2+13})^2$, 可得 $h=2$.

因为直四棱柱的底面积 $S=\frac{(2+4)\times 3}{2}=9$, 所以直四棱柱的体积为 $9\times 2=18$.

例 5 [思路点拨] (1)由面面平行的判定定理证明;(2)由面面平行的性质定理证明. 证明:(1)由题知 $BB_1\parallel DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$, 所以四边形 BB_1D_1D 是平行四边形, 所以 $BD\parallel B_1D_1$. 又 $BD\subset$ 平面 CD_1B_1 , $B_1D_1\subset$ 平面 CD_1B_1 , 所以 $BD\parallel$ 平面 CD_1B_1 . 因为 $A_1D_1\parallel B_1C_1\parallel BC$, 且 $A_1D_1=B_1C_1=BC$, 所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形, 所以 $A_1B\parallel D_1C$. 又 $A_1B\subset$ 平面 CD_1B_1 , $D_1C\subset$ 平面 CD_1B_1 , 所以 $A_1B\parallel$ 平面 CD_1B_1 . 因为 $BD\cap A_1B=B$, 所以平面 $A_1BD\parallel$ 平面 CD_1B_1 .

(2)由(1)知,平面 $A_1BD\parallel$ 平面 CD_1B_1 , 又平面 $ABCD\cap$ 平面 $B_1D_1C=l$, 平面 $ABCD\cap$ 平面 $A_1BD=BD$, 所以直线 $l\parallel$ 直线 BD . 又 $B_1D_1\parallel BD$, 所以 $B_1D_1\parallel l$.

变式题 解:点 F 为 AP 上靠近点 P 的三等分点, 证明如下: 在 AB 上取点 G , 使得 $BG=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 连接 FG, GE .

如图. 因为 $BG\parallel CE, BG=CE$, 所以四边形 $BGEC$ 为平行四边形, 所以 $BC\parallel GE$, 又 $GE\subset$ 平面 $PBC, BC\subset$ 平面 PBC , 所以 $GE\parallel$ 平面 PBC . 因为 $EF\parallel$ 平面 $PBC, EF\cap GE=E, EF, GE\subset$ 平面 EFG , 所以平面 $PBC\parallel$ 平面 EFG . 又平面 $EFG\cap$ 平面 $PAB=FG$, 平面 $PBC\cap$ 平面 $PAB=PB$, 所以 $FG\parallel PB$. 所以在 $\triangle PAB$ 中, $\frac{AF}{FP}=\frac{AG}{GB}=\frac{\sqrt{2}}{2}=2$, 所以 $FP=\frac{1}{3}AP$, 所以点 F 为 AP 上靠近点 P 的三等分点.

第 45 讲 直线、平面垂直的判定与性质

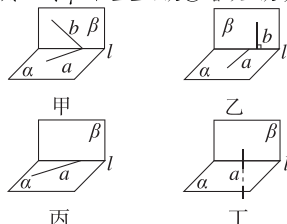
● 课标基础巩固

【知识聚焦】

- (1)任意一条直线 垂线 垂面
(2)两条相交直线 一条直线 另一条直线 任意一条直线 平面
- (1)直二面角 (2)直二面角
 $\angle AOB=90^\circ$ 垂线 二面角的平面角
 $\angle AOB=90^\circ$ 交线 垂直

【对点演练】

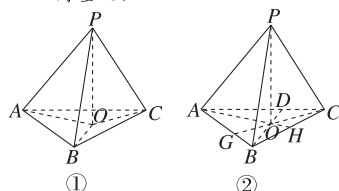
- 4 3 [解析] 由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$, 得平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $AC\perp BD, AC\perp PD, BD\cap PD=D$, 所以 $AC\perp$ 平面 PDB , 所以平面 $PAC\perp$ 平面 PDB , 故互相垂直的平面有 4 对. 与 AC 垂直的直线有 PD, BD, PB , 共 3 条.
- ② [解析] 在①中, 如图甲, $a\subset\alpha, b\subset\beta$, 且 a, b 与 l 都不垂直, 则 a, b 不一定垂直, 故①错误; 在②中, 如图乙, $a\subset\alpha, b\subset\beta, b\perp l$, 则 $b\perp\alpha$, 所以 β 内所有与 b 平行的直线都与 α 垂直, 故②正确; 在③中, 如图丙, $a\subset\alpha$, 但 a 与 l 不垂直, 则 a 与 β 不垂直, 故③错误; 在④中, 如图丁, 若 a 不在 α 内, 则 a 与 β 不垂直, 故④错误. 故填②.



- (1)外 (2)垂 [解析] (1)如图①, 连接

OA, OB, OC , 在 $Rt\triangle POA, Rt\triangle POB$ 和 $Rt\triangle POC$ 中, $PA=PB=PC$, 所以 $OA=OB=OC$, 即 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

(2)如图②, 延长 AO, BO, CO , 分别交 BC, AC, AB 于点 H, D, G . 因为 $PC\perp PA, PB\perp PC, PA\cap PB=P, PA, PB\subset$ 平面 PAB , 所以 $PC\perp$ 平面 PAB , 又 $AB\subset$ 平面 PAB , 所以 $PC\perp AB$. 因为 $AB\perp PO, PO\cap PC=P, PO, PC\subset$ 平面 POC , 所以 $AB\perp$ 平面 POC , 又 $CG\subset$ 平面 POC , 所以 $AB\perp CG$, 即 CG 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高. 同理可得 BD, AH 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AC, BC 上的高, 所以 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心.



- 必要不充分 [解析] 根据直线与平面垂直的定义知, “直线 a 与平面 α 内的无数条直线都垂直” 不能推出 “直线 a 与平面 α 垂直”, 反之则可以, 所以应填必要不充分.
- ②③ [解析] 在①中, 若 $\alpha\parallel\beta, n\subset\alpha, m\subset\beta$, 则 m 与 n 平行或异面, 故①错误; 在②中, 若 $m\perp\alpha, m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$, 又 $n\perp\alpha$, 所以 $n\perp\beta$, 故②正确; 在③中, 若 $m\perp n, m\perp\alpha$, 则 $n\parallel\alpha$ 或 $n\subset\alpha$, 又 $n\perp\beta$, 所以 $\alpha\perp\beta$, 故③正确; 在④中, 若 $m\parallel\alpha, n\parallel\beta, \alpha\perp\beta$, 则 m 与 n 平行、相交或异面, 故④错误; 在⑤中, 若 $\alpha\perp\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta$, 则 m, n 平行、相交或异面, 所以⑤错误. 故填②③.
- 5 [解析] 由底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形, $PA=a, PB=PD=\sqrt{2}a$, 得 $PA\perp AB, PA\perp AD$, 又 $AB\cap AD=A$, 所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$. 由 $PA\subset$ 平面 $PAB, PA\subset$ 平面 PAD , 可得平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. 又 $AB\perp AD, PA\cap AD=A$, 所以 $AB\perp$ 平面 PAD , 又 $AB\subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD . 由 $BC\perp AB, BC\perp PA, AB\cap PA=A$, 得 $BC\perp$ 平面 PAB , 又 $BC\subset$ 平面 PBC , 所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC . 由 $CD\parallel AB$, 得 $CD\perp$ 平面 PAD , 又 $CD\subset$ 平面 PDC , 所以平面 $PAD\perp$ 平面 PDC . 故共有 5 对互相垂直的面.
- 一定 [解析] 因为 $PA=PB=PC$, 所以点 P 在平面 ABC 内的射影 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 因为 $\angle BAC=90^\circ$, 所以 O 为 BC 的中点, 所以 PO 在平面 PBC 内, 所以平面 $PBC\perp$ 平面 ABC .

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1)由线面平行的判定定理及线面、面面垂直的性质定理、判定定理逐一判断各选项即可. (2)利用线面垂直、面面垂直的判定定理和性质定理判断即可.

- (1)C (2)B [解析] (1)若 $m\perp n, n\perp l$, 则 $m\parallel l$ 或 m, l 相交或 m, l 异面, 所以 A 为假命题; 若 $\alpha\perp\beta, \beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\gamma$ 或 α, γ 相交, 所以 B 为假命题; 若 $m\perp\alpha, m\parallel n$, 则 $n\perp\alpha$, 又 $n\parallel\beta$, 所以 $\alpha\perp\beta$, 所以 C 为真命题; 若 $m\parallel n, m\parallel\alpha$, 则 $n\subset\alpha$ 或 $n\parallel\alpha$, 所以 D 为假命题. 故选 C.
- (2) $\because PA\perp$ 平面 $ABC, PA\subset$ 平面 PAC , $\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 PAC , 故 D 中说法正确. $\because BC\subset$ 平面 $ABC, \therefore PA\perp BC$, 又 $AB\perp BC, PA\cap AB=A, \therefore BC\perp$ 平面 PAB , 又 $BC\subset$ 平面 $PBC, \therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC , 故 C 中说法正确. $\because AN\subset$ 平面 $PAB, \therefore BC\perp AN, \therefore AN\perp PB, BC\cap PB=B, \therefore AN\perp$ 平面 PBC , 又 $AN\subset$ 平面 $ANS, \therefore$ 平面 $ANS\perp$ 平面 PBC , 故 A 中说法正确. 对于 B , 假设平面 $ANS\perp$ 平面 $PAB, \therefore AN\perp$ 平面 $PBC, NS\subset$ 平面 $PBC, \therefore AN\perp NS, \therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 $ANS, \therefore NS\perp$ 平面 $PAB, \therefore NS\perp PB, \therefore AN\perp$

$PB, AN\cap NS=N, \therefore PB\perp$ 平面 ANS , 又 $AS\subset$ 平面 $ANS, \therefore PB\perp AS, \therefore AS\perp PC, PB\cap PC=P, \therefore AS\perp$ 平面 PBC , 与 $AN\perp$ 平面 PBC 矛盾, 故 B 中说法不正确. 故选 B.

变式题 (1)C (2)BC [解析] (1)对于选项 A , 若 $l\parallel\alpha$, 且 $m\parallel\alpha$, 则 l, m 可能平行、相交或异面, 不一定垂直, 故 A 错误; 对于选项 B , 若 $\alpha\perp\beta, m\parallel\alpha, n\perp\beta$, 则 m, n 可能平行、相交或异面, 不一定平行, 故 B 错误; 对于选项 C , 若 $m\parallel l$, 且 $m\perp\alpha$, 则 $l\perp\alpha$, 故 C 正确; 对于选项 D , 若 $m\perp n, m\perp\alpha, n\parallel\beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 不一定垂直, 故 D 错误. 故选 C.

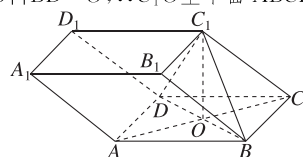
(2)折叠前后得到 $AH\perp HE, AH\perp HF$ 不变, 又 $EH\cap FH=H$, 所以根据线面垂直的判定定理, 可得 $AH\perp$ 平面 EFH , 故 B 正确; 过点 A 只有一条直线与平面 EFH 垂直, 且 $AH\perp$ 平面 EFH , 点 G 与 H 不重合, 故 A 不正确; $AG\perp EF, EF\perp HG$, 又 $AG\cap HG=G$, 所以根据线面垂直的判定定理, 可得 $EF\perp$ 平面 AGH , 故 C 正确; 因为 HG 与 AG 不垂直, 所以 HG 与平面 AEF 不垂直, 故 D 不正确. 故选 BC.

例 2 [思路点拨] 思路一: 取 AD 的中点 O , 连接 SO , 则 $SO\perp AD$, 连接 OE, OF , 则 $OE\perp AD$, 从而 $AD\perp$ 平面 SOE . 进而得到 $SE\perp AD$. 再证 $SE\perp OF$ 即可. 思路二: 要证 $SE\perp DF, SE\perp AF$, 故只需连接 AE, DE , 再证 $AE=SA, DE=SD$ 即可.

证明: 方法一: 取 AD 的中点 O , 连接 SO, OE, OF , 如图. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, O, E 分别是 AD, BC 的中点, 所以 $EO\perp AB$, 所以 $EO\perp AD$. 因为 $\triangle SAD$ 是等边三角形, 所以 $SO\perp AD$. 因为 $SO\cap OE=O$, 所以 $AD\perp$ 平面 SOE . 因为 $SE\subset$ 平面 SOE , 所以 $AD\perp SE$. 因为 $\sqrt{3}SA=2AB$, 所以 $OS=SA\sin\angle SAD=\frac{\sqrt{3}}{2}SA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}AB=AB=OE$, 所以 $\triangle SOE$ 是等腰三角形. 因为 F 是 SE 的中点, 所以 $OF\perp SE$. 因为 $OF\cap AD=O, OF, AD\subset$ 平面 ADF , 所以 $SE\perp$ 平面 ADF .

方法二: 不妨设 $AB=\sqrt{3}$, 则 $SA=AD=SD=2$. 如图, 连接 AE, DE . 因为 E 为 BC 的中点, 所以 $AE=DE=2$, 所以 $SD=DE, SA=AE$. 又 F 为 SE 的中点, 所以 $DF\perp SE, AF\perp SE$. 因为 $DF\cap AF=F, DF, AF\subset$ 平面 ADF , 所以 $SE\perp$ 平面 ADF .

变式题 证明: $\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $\therefore CO=\sqrt{2}, CD=CB$. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $C_1C=A_1A=2$. 在 $\triangle C_1OC$ 中, $\angle C_1OC=45^\circ, C_1C=2, CO=\sqrt{2}$, 由余弦定理得 $\cos\angle C_1CO=\frac{C_1C^2+CO^2-C_1O^2}{2\cdot C_1C\cdot CO}=\frac{2^2+2-C_1O^2}{2\times 2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 可得 $C_1O=\sqrt{2}, \therefore C_1O^2+CO^2=CC_1^2, \therefore C_1O\perp CO$. 如图, 连接 C_1D, C_1B , 在 $\triangle C_1CD$ 与 $\triangle C_1CB$ 中, $\because CD=CB, \angle C_1CD=\angle C_1CB, C_1C=C_1C, \therefore \triangle C_1CD\cong\triangle C_1CB, \therefore C_1D=C_1B$, 即 $\triangle BC_1D$ 为等腰三角形, 又 O 为 BD 的中点, $\therefore C_1O\perp BD$. $\because CO\perp$ 平面 $ABCD, BD\subset$ 平面 $ABCD, CO\cap BD=O, \therefore C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.



例3 [思路点拨] 利用余弦定理和勾股定理证明 $DA \perp AB$, 再由面面垂直的性质定理得到 $DA \perp$ 平面 ABC , 从而 $DA \perp BC$, $DA \perp AC$, 进而得到 $BC \perp AE$. 根据题目条件得 $BE=1$, 由勾股定理得 $AC \perp AB$, 最后利用线面垂直的判定定理得 $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 从而 $AC \perp BB_1$.

证明: 连接 DA, EA ,

如图,

$DA_1=1$,

$AA_1=2$,

$\angle DA_1A=60^\circ$,

由余弦定理可得 $DA=$

$\sqrt{1^2+2^2-2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{3}$, 满足 $DA^2+AA_1^2=AA_1^2$, 所以 $DA \perp DA_1$, 即 $DA \perp AB$. 因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC , 且交线为 AB , $DA \perp AB$, $DA \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $DA \perp$ 平面 ABC . 又 $BC, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $DA \perp BC$, $DA \perp AC$. 因为 $DE \perp BC$, $DA \cap DE=D$, 且 $DA, DE \subset$ 平面 DAE , 所以 $BC \perp$ 平面 DAE . 又 $AE \subset$ 平面 DAE , 所以 $BC \perp AE$. 设 $BE=t$, $CE=3t$, 则 $BE^2+t^2=AC^2-(3t)^2$, 可得 $t=1$, 即 $BE=1$, 所以 $BC=4$, 满足 $BA^2+AC^2=BC^2$, 即 $AC \perp AB$. 又因为 $DA \perp AC$, $DA \cap AB=A$, 且 $DA, AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 . 因为 $BB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AC \perp BB_1$.

变式题 解: (1) 证明:

取棱 A_1A 的中点 D , 连接 BD , 如图,

因为 $AB=A_1B$, 所以 $BD \perp AA_1$. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \parallel BB_1$, 所以

$BD \perp BB_1$, 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

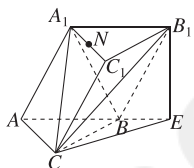
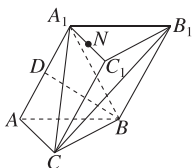
BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$

BB_1 , 所以 $BD \perp$



$AB \perp AD$, 且 $BC=2$, $AB \perp BC$, 所以 $\triangle ABD \sim \triangle BCA$, 所以 $\angle ABD = \angle BCA$, 所以 $\angle BAC + \angle ABD = \angle BAC + \angle BCA$.

因为 $AB \perp BC$, 所以 $\angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$, 所以 $\angle BAC + \angle ABD = 90^\circ$, 即 $\angle BAO + \angle ABO = 90^\circ$, 所以 $\angle AOB = 90^\circ$, 所以 $AO \perp OB$, 即 $AC \perp BD$. 因为 $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EA \perp BD$. 因为 $EA \cap AC = A$, $EA, AC \subset$ 平面 EAC , 所以 $BD \perp$ 平面 EAC , 又因为平面 $\alpha \perp BD$, 且 $B \in$ 平面 EAC , 所以平面 $\alpha \parallel$ 平面 EAC .

(2) 如图, 取 AC 的中点 M , 连接 FM , 因为 F 为棱 EC 的中点,

所以 $FM = \frac{EA}{2} = 1$, 且 $FM \parallel EA$, 又因为 $EA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $FM \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OM \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $FM \perp OM$. 因为 $AB \perp AD$, $AB \perp BC$, 所以 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6}$. 易知 $\triangle OBC \sim \triangle ODA$, 所以 $\frac{OA}{OC} = \frac{DA}{BC} = \frac{1}{2}$, 所以 $OA = \frac{OC}{2}$, 即 $OA = \frac{AC}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 又 $AM = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $OM = AM - OA = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 因为 $FM = 1$, 且 $FM \perp OM$, 所以 $OF = \sqrt{1 + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{7}{6}}$. 因为 $BD \perp$ 平面 EAC , $OF \subset$ 平面 EAC , 所以 $BD \perp OF$, 所以 $S_{\triangle FBD} = \frac{1}{2} \times BD \times OF = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$. 因为 $AD = 1$, $AB = \sqrt{2}$, 且 $AB \perp AD$, 所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 设 h 为 A 到平面 FBD 的距离, 因为 $V_{A-FBD} = V_{F-ABD}$, 所以 $\frac{1}{3} S_{\triangle FBD} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot FM$, 即 $\frac{\sqrt{14}}{4} \times h = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1$, 解得 $h = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. 记直线 AD 与平面 FBD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{h}{AD} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 所以直线 AD 与平面 FBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

变式题 证明: (1) 记 AF, CD 的中点分别为 I, J , 连接 GI, IJ, JH , 因为 $AG = GF = \sqrt{21}$, $AF = 6$, 所以 $GI \perp AF$, 且 $GI = \sqrt{21 - 9} = 2\sqrt{3}$. 因为平面 $AGF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $AGF \cap$ 平面 $ABCD = AF$, $GI \perp AF$, 所以 $GI \perp$ 平面 $ABCD$. 因为平面 $AGF \parallel$ 平面 HCD , 所以平面 $HCD \perp$ 平面 $ABCD$, 同理可得 $HJ \perp$ 平面 $ABCD$, $HJ = 2\sqrt{3}$, 所以 $GI \parallel HJ$, 且 $GI = HJ$, 所以四边形 $GIJH$ 为平行四边形, 所以 $GH \parallel IJ$. 因为 $GH \subset$ 平面 $ABCD$, $IJ \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $GH \parallel$ 平面 $ABCD$.

(2) 由正六边形的性质可知, $IJ \perp AF$, 又平面 $AGF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $AGF \cap$ 平面 $ABCD = AF$, 所以 $IJ \perp$ 平面 AGF , 因为 $GH \parallel IJ$, 所以 $GH \perp$ 平面 AGF .

第46讲 空间向量及其运算

和空间位置关系

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. 互相平行或重合 非零向量 a 平行

同一个平面 $a = \lambda b$ $xa + yb + zc = 1$

2. (1) $|a| |b| \cos \theta$ (2) $a \cdot b = 0$ (3) a^2

3. (1) $|a| \cos \langle a, b \rangle \frac{b}{|b|}$ 投影向量

(3) $\overrightarrow{A'B'}$

4. $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

【对点演练】

1. 1 [解析] $\because \lambda a + \mu b (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 与 a, b 共面, $\therefore$ ①②④不正确.

2. $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c$ [解析] $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = c + \frac{1}{2}(b - a) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c$.

3. 10 [解析] $\because l_1 \perp l_2, \therefore a \perp b, \therefore a \cdot b = -6 - 4 + m = 0$, 解得 $m = 10$.

4. ④ [解析] 若 a 与 b 共线, 则 a, b 所在的直线可能平行也可能重合, 故①为假命题; 三个向量 a, b, c 中任意两个一定共面, 但它们三个却不一定共面, 故②为假命题; 只有当 a, b, c 不共面时, 空间任意一个向量 p 才一定能表示为 $p = xa + yb + zc$, 故③为假命题; 根据向量的运算法则可知④为真命题, 故填④.

5. 17 或 -1 [解析] $\because a = (-1, \lambda, -2), b = (2, -1, 1), a$ 与 b 的夹角为 120° ,

$\therefore \cos 120^\circ = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{-2 - \lambda - 2}{\sqrt{5 + \lambda^2} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$, 解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 17$.

● **课堂考点探究**

例1 [思路点拨] 由题意得四边形 $EFGH$ 为平行四边形, 进一步结合线段比例分解向量成基底向量的线性组合即可得解.

$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ [解析] 因为

$\frac{AE}{EB} = \frac{AH}{HD} = \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GD} = \frac{1}{2}$, 所以 $EH \parallel$

BD , 且 $EH = \frac{1}{3}BD$, $FG \parallel BD$, 且 $FG = \frac{1}{3}BD$, 所以四边形 $EFGH$ 为平行四边

形, 所以 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

变式题 D [解析] $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{A_1D_1}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{b}) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b} + c$. 故选 D.

例2 [思路点拨] (1) 根据空间向量线性运算进行求解; (2) 设 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ (λ, μ 不为 0), 推导出 $\overrightarrow{EG} = \lambda \overrightarrow{EF} + \mu \overrightarrow{EH}$, 进而证明四点共面.

解: (1) 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$. 因为 $k = \frac{3}{4}$, 所以

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1F} - \overrightarrow{D_1E} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{D_1B} - \frac{3}{4}\overrightarrow{D_1A} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

(2) 证明: 连接 AC, EG , 设 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$

$\mu \overrightarrow{AD} (\lambda, \mu \text{ 不为 } 0)$, 则 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{D_1G} - \overrightarrow{D_1E} = k\overrightarrow{D_1C} - k\overrightarrow{D_1A} = k\overrightarrow{AC} = k(\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}) = k\lambda \overrightarrow{AB} + k\mu \overrightarrow{AD} = k\lambda (\overrightarrow{D_1B} - \overrightarrow{D_1A}) + k\mu (\overrightarrow{D_1D} - \overrightarrow{D_1A}) = \lambda (\overrightarrow{D_1F} - \overrightarrow{D_1E}) + \mu (\overrightarrow{D_1H} - \overrightarrow{D_1E}) = \lambda \overrightarrow{EF} + \mu \overrightarrow{EH}$, 则 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}$ 共面且有公共点 E , 则 E, F, G, H 四点共面.

变式题 (1) D (2) $\frac{2}{5}$ [解析] (1) 由题可知 O, A, B, C 四点不共面, 所以由 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \lambda = 1$, 解得 $\lambda = \frac{7}{12}$. 故选 D.

(2) $\because \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \overrightarrow{BC} = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, 又 $\because A, C, D$ 三点共线, $\therefore \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{CD}, \therefore \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 不共线, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2, \therefore \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{CD}, \therefore 2 - 5k = 0, \therefore k = \frac{2}{5}$.

例 3 [思路点拨] (1) 取线段 B_1C 的中点 P , 以 D 为原点建立空间直角坐标系, 用向量法求解线面关系即可. (2) 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 以它们为基底表示出 $\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BB_1}$, 结合已知并应用向量数量积的运算求证垂直, 即可证得结论.

解: (1) 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A_1(3, 0, 2), A(3, 0, 0), B_1(3, 4, 2), C(0, 4, 0), D_1(0, 0, 2)$. 设 P 为线段 B_1C 的中点, 则 $P(\frac{3}{2}, 4, 1)$, 设平面 ACD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{AC} = (-3, 4, 0), \overrightarrow{AD_1} = (-3, 0, 2)$, 得 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 4y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = -3x + 2z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 得 $x = \frac{4}{3}, z = 2$, 则 $\mathbf{n} = (\frac{4}{3}, 1, 2)$. $\overrightarrow{A_1P} = (-\frac{3}{2}, 4, -1)$, 因为 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1P} = \frac{4}{3} \times (-\frac{3}{2}) + 1 \times 4 + 2 \times (-1) = 0$, 所以 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{A_1P}$, 又 $A_1P \subset$ 平面 ACD_1 , 所以线段 B_1C 上存在中点 P , 使得 $A_1P \perp$ 平面 ACD_1 .

(2) 证明: 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一个基底, 则 $\overrightarrow{A_1C} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \overrightarrow{BB_1} = \mathbf{c}$. 因为 $AB = AD = AA_1 = 1, \angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2}$.

因为 $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$, $BD \cap BB_1 = B$, 所以 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的一个法向量, 所以直线 $A_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 .

变式题 解: (1) 证明: 连接 BD , 交 AC 于 N , 连接 MN , 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以点 N 为 BD 的中点. 又因为 M 为 PD 的中点, 所以 $MN \parallel BP$. 因为 $BP \subset$ 平面 $ACM, MN \subset$ 平面 ACM , 所以 $BP \parallel$ 平面 ACM .

(2) 方法一: 设底面边长为 2, E 为 AB 的中点, 连接 EC , 由于四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $BE = 1, BC = 2$, $EC = \sqrt{BE^2 + BC^2 - 2BE \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{3}$, 所以 $BC^2 = BE^2 + EC^2$, 即 $EC \perp AB$. 连接 PE , 因为三角形 PAB 为正三角形, E 为 AB 的中点, 所以 $PE \perp AB$, 又侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB, PE \subset$ 平面 PAB , 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$. 如图, 以 E 为原点, $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 1, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0), D(\sqrt{3}, 2, 0), M(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2})$. 假设存在点 G 满足题意, 设 $\frac{CG}{CD} = \lambda$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CD} = (0, 2\lambda, 0)$, 则 $G(\sqrt{3}, 2\lambda, 0), \overrightarrow{AM} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AG} = (\sqrt{3}, 2\lambda - 1, 0)$. 设平面 GAM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AG} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x + z = 0, \\ \sqrt{3}x + (2\lambda - 1)y = 0, \end{cases}$ 取 $y = 1$, 得 $x = \frac{1 - 2\lambda}{\sqrt{3}}, z = \frac{2\lambda - 1}{\sqrt{3}}$, 所以 $\mathbf{n} = (\frac{1 - 2\lambda}{\sqrt{3}}, 1, \frac{2\lambda - 1}{\sqrt{3}})$. 易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$.

由题可知 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = 0$, 即 $|\frac{2\lambda - 1}{\sqrt{3}}| = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 满足题意. 故在棱 CD 上存在点 G , 使得平面 $GAM \perp$ 平面 $ABCD$, 此时 $\frac{CG}{CD} = \frac{1}{2}$.

方法二: 设 E 为 AB 的中点, 连接 PE , 因为 $\triangle PAB$ 为正三角形, E 是 AB 的中点, 所以 $PE \perp AB$, 又侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB, PE \subset$ 平面 PAB , 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$. 连接 DE , 取 DE 的中点 H , 连接 MH , 如图, 则 $MH \parallel PE$, 又 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $MH \perp$ 平面 $ABCD$. 连接 AH 并延长, 交 CD 于 G , 连接 MG , 则平面 $AMG \perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $AE \parallel GD$, 所以 $\angle HAE = \angle HGD, \angle HEA = \angle HDG$, 又因为 $EH = HD$, 所以 $\triangle AEH \cong \triangle GDH$, 则 $AE = GD = \frac{1}{2}CD$, 故在棱 CD 上存在点 G , 使得平面 $GAM \perp$ 平面 $ABCD$, 此时 $\frac{CG}{CD} = \frac{1}{2}$.

第 47 讲 空间角

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) 角(或夹角) (2) $(0, \frac{\pi}{2}]$

2. (2) $[0, \frac{\pi}{2}]$

3. (1) 垂直于棱 l (3) ② 不大于 90°

【对点演练】

1. $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ [解析] 设直线 a 与平面 α 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$.

2. 45° [解析] $\because \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} =$

$\frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = 45^\circ$, 故这两个平面的夹角为 45° .

3. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ [解析] 以

D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $O(1, 1, 0), E(0, 2, 1), F(1, 0, 0), D_1(0, 0, 2), \therefore \overrightarrow{FD_1} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{OE} = (-1, 1, 1), \therefore \cos \langle \overrightarrow{FD_1}, \overrightarrow{OE} \rangle = \frac{\overrightarrow{FD_1} \cdot \overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{FD_1}| |\overrightarrow{OE}|} = \frac{1 + 0 + 2}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 故异面直线 OE 与 FD_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

4. 30° [解析] 设 l 与 α 所成的角为 θ , $\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{1}{2}, \therefore \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{1}{2}$, 又 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \therefore \theta = 30^\circ$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ [解析] 以 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0, -1, 0), B(0, 1, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), C(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AS} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AS}| |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 SA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ [解析] 以 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D_1(0, 0, 1), C_1(0, 2, 1), A_1(1, 0, 1), B(1, 2, 0), \therefore \overrightarrow{D_1C_1} = (0, 2, 0), \overrightarrow{A_1C_1} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{A_1B} = (0, 2, -1)$. 设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 2y - z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 得 $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$. 设 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{D_1C_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{D_1C_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{D_1C_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$, 即直线 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$. 易知平面 $A_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1), \therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$. 由图可知, 二面角 $B-A_1C_1-D_1$ 为钝角, 故二面角 $B-A_1C_1-D_1$ 的余弦值为 $-\frac{2}{3}$.

7. $\frac{1}{3}$ [解析] 以 D 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D_1(0, 0, 1), C_1(0, 2, 1), A_1(1, 0, 1), B(1, 2, 0), \therefore \overrightarrow{D_1C_1} = (0, 2, 0), \overrightarrow{A_1C_1} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{A_1B} = (0, 2, -1)$. 设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 2y - z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 得 $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$. 设 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{D_1C_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{D_1C_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{D_1C_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$, 即直线 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$. 易知平面 $A_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1), \therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$. 由图可知, 二面角 $B-A_1C_1-D_1$ 为钝角, 故二面角 $B-A_1C_1-D_1$ 的余弦值为 $-\frac{2}{3}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 思路一: 在长方体中建立空间直角坐标系, 利用向量法求异面直线所成的角; 思路二: 在长方体中, 通过补充新的长方体, 结合平行关系, 将异面直线转化在同一平面中, 利用解三角形求异面直线所成的角. (2) 思路一: 根据平行关系将异面直线所成角转化到同一三角形中求解; 思路二: 以 A 为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 利用向量法求异面直线所成的角, 进而得解.

(1)A (2) $\sqrt{5}$

[解析] (1)方法一:以A为坐标原点,以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为x, y, z轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A_1(0, 0, 4)$, $F(2, 2, 0)$, $B_1(4, 0, 4)$, $E(0, 1, 4)$, 所以 $\overrightarrow{A_1F} = (2, 2, -4)$, $\overrightarrow{B_1E} = (-4, 1, 0)$. 设异面直线 A_1F 与 B_1E 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1F} \cdot \overrightarrow{B_1E}|}{|\overrightarrow{A_1F}| |\overrightarrow{B_1E}|} = \frac{|-6|}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{102}}{34}$. 故选A.

方法二:补充长方体 $CDMN-A_1D_1M_1N_1$, 如图所示, 其中 $C_1N_1 = B_1C_1$, 取P为 B_1C_1 的中点, Q为MN的中点, 连接 D_1Q , D_1P , PQ , 则 $\angle PD_1Q$ (或其补角) 即为异面直线 A_1F 与 B_1E 所成的角. 由题知 $D_1P = B_1E = \sqrt{17}$, $D_1Q = A_1F = 2\sqrt{6}$, $PQ = \sqrt{29}$, 所以 $\cos \angle PD_1Q = \frac{D_1P^2 + D_1Q^2 - PQ^2}{2 \cdot D_1P \cdot D_1Q} = \frac{\sqrt{102}}{34}$. 故选A.

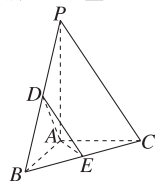
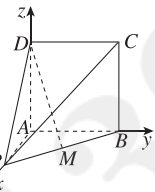
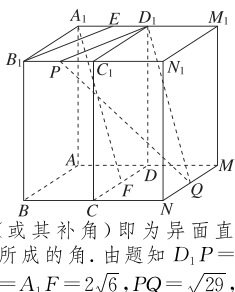
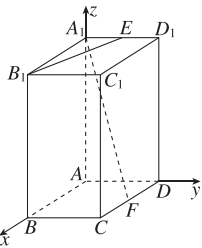
(2)方法一:过点M作 $ME \parallel PA$, 交AB于点E, 连接DE, 则E为AB的中点, $\angle DME$ (或其补角) 为异面直线DM与PA所成的角. $\because PA \perp$ 平面ABCD, $\therefore ME \perp$ 平面ABCD, $\therefore$ 四边形ABCD是正方形, 且 $PA = AB = 2$, E为AB的中点, $\therefore ME = \frac{1}{2}PA = 1$, $DE = \sqrt{DA^2 + AE^2} = \sqrt{5}$, 故

$$\tan \angle DME = \frac{DE}{ME} = \sqrt{5}.$$

方法二: $\because$ 四边形ABCD是正方形, $PA \perp$ 平面ABCD, $\therefore$ 以A为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 如图, 则 $A(0, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$, $P(2, 0, 0)$, $M(1, 1, 0)$, $\therefore \overrightarrow{DM} = (1, 1, -2)$, $\overrightarrow{AP} = (2, 0, 0)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DM} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 设异面直线DM与PA所成角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DM} \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{5}$, $\therefore$ 异面直线DM与PA所成角的正切值为 $\sqrt{5}$.

变式题 D **[解析]** 由 $AB = 2$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, 得 $AB^2 + AC^2 = BC^2$, 所以 $AB \perp AC$.

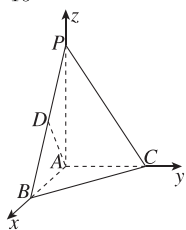
方法一: 如图, 取BC的中点E, 连接AE, DE, 则 $DE \parallel PC$, 所以 $\angle ADE$ 或其补角即为异面直线AD与PC所成的角. 易知 $AE = \sqrt{2}$, $PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, $DE = \frac{1}{2}PC = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $PB =$



$\sqrt{PA^2 + AB^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, 所以 $DA = \frac{\sqrt{13}}{2}$. 在 $\triangle ADE$ 中, 根据余弦定理可得 $\cos \angle ADE = \frac{AD^2 + DE^2 - AE^2}{2AD \times DE} = \frac{\frac{13}{4} + \frac{13}{4} - 2}{2 \times \frac{13}{4}} = \frac{9}{13}$, 所以异面直线AD与

PC所成角的余弦值为 $\frac{9}{13}$. 故选D.

方法二: 因为 $PA \perp$ 平面ABC, $AB, AC \subset$ 平面ABC, 所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AC$, 故以A为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $A(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 3)$, $D(1, 0, \frac{3}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AD} = (1, 0, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{PC} = (0, 2, -3)$. 设AD与PC所成角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{PC}|} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{13} \times \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{9}{13}$. 故选D.



例2 **[思路点拨]** (1)根据勾股定理逆定理可知 $BC \perp A_1C$, 然后利用线面垂直的判定定理即可证明结论; (2)思路一: 通过作辅助线, 找到直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成的角, 然后根据解三角形的相关知识等进行求解即可; 思路二: 通过建系, 利用向量法求得平面 ABB_1A_1 的法向量及直线 A_1D 的方向向量, 然后按公式计算即可.

解: (1)证明: 如图, 连接 A_1B . 因为 $AB = AA_1 = 4$, $\angle A_1AB = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABA_1$ 为等边三角形, 所以 $A_1B = 4$. 又因为 $A_1C = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$, 所以 $A_1B^2 = A_1C^2 + BC^2$, 所以 $BC \perp A_1C$. 又 $BC \perp AC$, $AC \cap A_1C = C$, $AC, A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

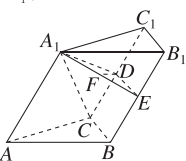
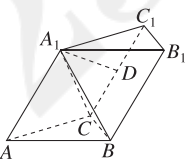
(2)方法一: 如图, 设E为 BB_1 的中点, 连接 A_1E, DE , 作 $DF \perp A_1E$ 于点F. 因为 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $DE \parallel BC$, 所以 $DE \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $DE \perp CC_1$. 在 $\triangle A_1CC_1$ 中, $A_1C = A_1C_1$, D为 CC_1 的中点, 所以 $A_1D \perp CC_1$. 又 $A_1D \cap DE = D$, 所以 $CC_1 \perp$ 平面 A_1DE .

因为 $BB_1 \parallel CC_1$, 所以 $BB_1 \perp$ 平面 A_1DE , 又 $DF \subset$ 平面 A_1DE , 所以 $BB_1 \perp DF$. 又因为 $DF \perp A_1E$, $BB_1 \cap A_1E = E$, $BB_1, A_1E \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $DF \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $\angle DA_1E$.

在 $\triangle DA_1E$ 中, $A_1D \perp DE$, $A_1D = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$, $DE = BC = 2$, 所以 $A_1E = \sqrt{A_1D^2 + DE^2} = 2\sqrt{3}$, 所以 $\sin \angle DA_1E = \frac{DE}{A_1E} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二: 如图, 以C为坐标原点, 以 $\overrightarrow{CA}$,



$\overrightarrow{CB}$ 的方向分别为x, y轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, 0)$, $A(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $A_1(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{4\sqrt{6}}{3})$, $C_1(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{4\sqrt{6}}{3})$, $D(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, 所以 $\overrightarrow{A_1D} = (-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$, $\overrightarrow{AA_1} = (-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{4\sqrt{6}}{3})$. 设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0, \\ x - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$ 取 $z = 1$, 得 $n = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, 1)$. 设直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1D}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{A_1D} \cdot n|}{|\overrightarrow{A_1D}| \cdot |n|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

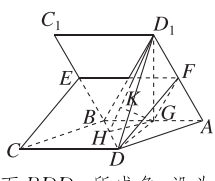
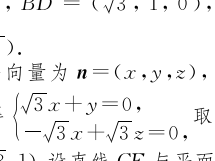
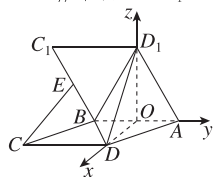
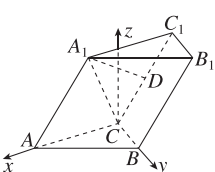
变式题 **解:** (1)证明: $\because BE \parallel AD_1$, $BE \not\subset$ 平面 ADD_1 , $AD_1 \subset$ 平面 ADD_1 , $\therefore BE \parallel$ 平面 ADD_1 . 同理可得 $BC \parallel$ 平面 ADD_1 . 又 $\because BE \cap BC = B$, $BE, BC \subset$ 平面 BCE , $\therefore$ 平面 $BCE \parallel$ 平面 ADD_1 . $\because CE \subset$ 平面 BCE , $\therefore CE \parallel$ 平面 ADD_1 .

(2)方法一: 取AB的中点O, 连接OD, OD_1 . 易知 $OD \perp AB$, $OD_1 \perp AB$. $\because$ 平面ABCD $\perp$ 平面 ABC_1D_1 , 平面ABCD $\cap$ 平面 $ABC_1D_1 = AB$, $OD_1 \subset$ 平面 ABC_1D_1 , $\therefore OD_1 \perp$ 平面ABCD. 如图, 以O为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 则 $B(0, -1, 0)$, $D(\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(\sqrt{3}, -2, 0)$, $D_1(0, 0, \sqrt{3})$, $C_1(0, -2, \sqrt{3})$, 从而 $E(0, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\therefore \overrightarrow{CE} = (-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BD} = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{DD_1} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$.

设平面 BDD_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{DD_1} \cdot n = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0, \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 取 $z = 1$, 得 $n = (1, -\sqrt{3}, 1)$. 设直线CE与平面 BDD_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CE}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CE} \cdot n|}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |n|} = \frac{|-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \times \sqrt{1 + 3 + 1}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$.

$\therefore$ 直线CE与平面 BDD_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

方法二: 如图, 取 AD_1 的中点F, 连接EF, DF, 易得四边形EFDC是平行四边形, $\therefore CE \parallel DF$, 则CE与平面 BDD_1 所成角即为DF与平面 BDD_1 所成角, 设为 θ . 过 D_1 作 $D_1G \perp AB$ 交AB于G, 过G作 $GH \perp BD$ 交BD于H, 连接 D_1H , 过G作 $GK \perp D_1H$ 交 D_1H 于K.



∵ 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABC_1D_1 , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABC_1D_1 = AB$, $D_1G \subset$ 平面 ABC_1D_1 , $D_1G \perp AB$, ∴ $D_1G \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, ∴ $D_1G \perp BD$, 又 $GH \perp BD$, $D_1G \cap GH = G$, $D_1G, GH \subset$ 平面 D_1GH , ∴ $BD \perp$ 平面 D_1GH , ∴ $GK \subset$ 平面 D_1GH , ∴ $BD \perp GK$, 又 $GK \subset$ 平面 BDD_1 , $BD \cap D_1H = H$, $BD, D_1H \subset$ 平面 BDD_1 , ∴ $GK \perp$ 平面 BDD_1 , ∴ GK 的长即为 G 到平面 BDD_1 的距离.

由 $D_1G = \sqrt{3}$, $GH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $D_1H = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 则 $GK = \frac{\sqrt{15}}{5}$. 连接 FG, DG ,

∵ $GF \parallel BD_1$, ∴ F 到平面 BDD_1 的距离即为 G 到平面 BDD_1 的距离, 设为 h , 则

$h = GK = \frac{\sqrt{15}}{5}$. 又 $D_1G = DG = \sqrt{3}$,

∴ $DD_1 = \sqrt{6}$. 在 $\triangle ADD_1$ 中, $DD_1 = \sqrt{6}$, $AD = AD_1 = 2$, ∴ $4DF^2 + AD_1^2 = 2(AD^2 + DD_1^2)$, 得 $DF = 2$, ∴ $\sin \theta = \frac{h}{DF} = \frac{\sqrt{15}}{10}$, ∴ 直线 CE 与平面 BDD_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

例 3 [思路点拨] (1) ① 易证四边形 $BCDM$ 为平行四边形, 由线面平行的判定定理即可证明. ② 取 AM 的中点 O , 连接 OF, OB , 则 OF, OB, AD 两两垂直, 以 O 为原点, 建立空间直角坐标系, 利用空间向量法求二面角即可.

(2) ① 作 $AH \perp PB$, 垂足为 H , 根据面面垂直的性质得 $AH \perp$ 平面 PBC , 再由线面垂直的性质得 $AH \perp BC$, $PA \perp BC$, 最后由线面垂直的判定及性质证得结论. ② 思路一: 建立空间直角坐标系, 应用向量法求平面与平面的夹角; 思路二: 取 AB 的中点 E , PB 的中点 D , 连接 DM, DE, ME , 由题得 $\angle DEM$ 即为两平面的夹角, 再根据已知条件求角的大小即可.

(1) 解: ① 证明: 由题意得 $BC \parallel AD$,

$DM = \frac{1}{2} AD = BC$, 所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形, 所以 $BM \parallel CD$. 又 $BM \subset$ 平面 CDE , $CD \subset$ 平面 CDE , 所以 $BM \parallel$ 平面 CDE .

② 取 AM 的中点 O , 连接 OF, OB , 则易知 $OF \perp AD, OB \perp AD, OF = 3, OB = \sqrt{3}$, 而 $FB = 2\sqrt{3}$, 所以 $OF^2 + OB^2 = FB^2$, 故 $OF \perp OB$, 故 OF, OB, AD 两两垂直. 以 O 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $F(0, 0, 3), B(\sqrt{3}, 0, 0), M(0, 1, 0), E(0, 2, 3)$, 可得 $\overrightarrow{FB} = (\sqrt{3}, 0, -3), \overrightarrow{BM} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{ME} = (0, 1, 3)$.

设平面 FBM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} \sqrt{3}x - 3z = 0, \\ -\sqrt{3}x + y = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 3, 1)$. 同理, 可得平面 BEM 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 3, -1)$.

因为 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{11}{13}$,

所以 $\sin \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{4\sqrt{3}}{13}$, 故二面角 $F-BM-E$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

(2) ① 证明: 如图, 作 $AH \perp PB$, 垂足为 H , 因为平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , 平面 $PAB \cap$ 平面 $PBC = PB$, $AH \subset$ 平面 PAB , 所以 $AH \perp$ 平面 PBC , 又 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AH \perp BC$, 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp BC$, 因为

$PA \cap AH = A, PA, AH \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB , 又 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp AB$.

② 方法一 (向量法): 如图, 以 B 为原点, BC, BA 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 B 平行于 AP 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0), A(0, \sqrt{3}, 0), C(1, 0, 0), P(0, \sqrt{3}, 1), M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{BA} = (0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BM} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. 易知平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, 设平面 MAB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{3}y = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$, 所以 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以平面

PAB 与平面 MAB 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

方法二 (几何法): 取 AB 的中点 E, PB 的中点 D , 连接 DM, DE, ME , 如图. 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp AB$, 又 $DE \parallel PA$, 所以 $DE \perp AB$. 由 ① 知, $BC \perp$ 平面 $PAB, PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PB$, 在 $Rt \triangle PBC$ 和 $Rt \triangle PAC$ 中, $PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{PA^2 + AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}$, $AM = \frac{1}{2} PC = BM = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以 $\triangle MAB$ 是等腰三角形, 所以 $ME \perp AB$, 故 $\angle DEM$ 即为平面 PAB 与平面 MAB 的夹角. 由题知 $DE = \frac{1}{2}, DM = \frac{1}{2}$, $EM = \sqrt{BM^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $DE^2 + DM^2 = EM^2$, 所以 $\triangle DEM$ 为等腰直角三角形, 故 $\angle DEM = \frac{\pi}{4}$, 所以平面 PAB 与平面 MAB 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

变式题 解: (1) 证明: ∵ $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, ∴ $PA \perp AD$.

又 ∵ $AD \perp PB, PB \cap PA = P, PB, PA \subset$ 平面 PAB , ∴ $AD \perp$ 平面 PAB . ∵ $AB \subset$ 平面 PAB , ∴ $AD \perp AB$. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ∴ $AB \perp BC$. ∴ A, B, C, D 四点共面, ∴ $AD \parallel BC$, 又 ∵ $BC \subset$ 平面 $PBC, AD \not\subset$ 平面 PBC , ∴ $AD \parallel$ 平面 PBC .

(2) 方法一: 以 D 为原点, 以 DA, DC 所在直线分别为 x, y 轴, 以过点 D 且与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AD = t (0 < t < 2)$, 则 $A(t, 0, 0), P(t, 0, 2), D(0, 0, 0), DC = \sqrt{4-t^2}, C(0, \sqrt{4-t^2}, 0), \overrightarrow{AC} = (-t, \sqrt{4-t^2}, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$, 设平面 ACP 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -tx_1 + \sqrt{4-t^2}y_1 = 0, \\ 2z_1 = 0, \end{cases}$ 不妨令 $x_1 = \sqrt{4-t^2}$, 则 $y_1 = t, z_1 = 0$, 故 $\mathbf{n}_1 =$

$(\sqrt{4-t^2}, t, 0), \overrightarrow{DP} = (t, 0, 2), \overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{4-t^2}, 0)$, 设平面 CPD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} tx_2 + 2z_2 = 0, \\ \sqrt{4-t^2}y_2 = 0, \end{cases}$ 不妨令 $z_2 = t$, 则 $x_2 = -2, y_2 = 0$, 故 $\mathbf{n}_2 = (-2, 0, t)$. ∴ 二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, ∴ 平面 ACP 与平面 CPD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$, ∴ $\frac{\sqrt{7}}{7} = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| =$

$\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2\sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{t^2+4}}$, 可得 $t = \sqrt{3}$, ∴ $AD = \sqrt{3}$.

方法二: 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于 E , 过点 E 作 $EF \perp CP$ 于 F , 连接 DF .

∵ $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \subset$ 平面 PAC , ∴ 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, 又平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC, DE \perp AC$, ∴ $DE \perp$ 平面 PAC . 又 $CP \subset$ 平面 PAC , ∴ $DE \perp CP$, 又 $EF \perp CP, DE \cap EF = E$, ∴ $CP \perp$ 平面 DEF , 得 $DF \perp CP$, 根据二面角的定义可知, $\angle DFE$ 即为二面角 $A-CP-D$ 的平面角,

即 $\sin \angle DFE = \frac{\sqrt{42}}{7}$, 又 $\angle DFE$ 为锐角, ∴ $\tan \angle DFE = \sqrt{6}$.

设 $AD = x (0 < x < 2)$, 则 $CD = \sqrt{4-x^2}$,

由等面积法可得, $DE = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$,

则 $CE = \sqrt{(4-x^2) - \frac{x^2(4-x^2)}{4}} = \frac{4-x^2}{2}$, 又 $\triangle EFC$ 为等腰直角三角形,

∴ $EF = \frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}$, 故 $\tan \angle DFE = \frac{DE}{EF} =$

$\frac{\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{6}$, 解得 $x = \sqrt{3}$, 即 $AD = \sqrt{3}$.

第 48 讲 空间距离及立体几何中的探索性问题

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- $\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2} = \sqrt{a^2 - (a \cdot u)^2}$
- $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

【对点演练】

- $2\sqrt{2}$ [解析] 以 A 为原点, 建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $M(2, 2, 2), N(2, 0, 4)$, 所以 $MN = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$.

- $\frac{6\sqrt{11}}{11}$ [解析] 以 C 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, 0), E(2, 4, 0), F(4, 2, 0), G(0, 0, 2)$, 所以 $\overrightarrow{CG} = (0, 0, 2), \overrightarrow{EG} = (-2, -4, 2), \overrightarrow{EF} = (2, -2, 0)$, 设平面 GEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x - 4y + 2z = 0, \\ 2x - 2y = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1,$

1,3), 所以点C到平面GEF的距离 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{CG}|}{|\vec{n}|} = \frac{6\sqrt{11}}{11}$.

3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析] 以D为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0)$, $A_1(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $D_1(0,0,1)$, 所以 $\vec{A_1B} = (0,1,-1)$, $\vec{A_1D} = (-1,0,-1)$, $\vec{A_1D_1} = (-1,0,0)$. 设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{A_1B} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{A_1D} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y-z=0, \\ -x-z=0, \end{cases}$ 令 $z=1$, 得 $\vec{n} = (-1,1,1)$, 所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d = \frac{|\vec{A_1D_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 易证平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 , 所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 之间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离, 所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ [解析] 以D为坐标原点, $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 则 $A_1(2,0,2)$, $O(2,1,1)$, $E(1,2,0)$, 所以 $\vec{A_1O} = (0,1,-1)$, $\vec{A_1E} = (-1,2,-2)$, 所以 $\cos \langle \vec{A_1O}, \vec{A_1E} \rangle = \frac{\vec{A_1O} \cdot \vec{A_1E}}{|\vec{A_1O}| |\vec{A_1E}|} = \frac{2+2}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为 $\langle \vec{A_1O}, \vec{A_1E} \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\sin \langle \vec{A_1O}, \vec{A_1E} \rangle = \frac{1}{3}$, 所以点O到直线 A_1E 的距离为 $|\vec{A_1O}| \sin \langle \vec{A_1O}, \vec{A_1E} \rangle = \sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. -1 或 -11 [解析] 由题可知 $\vec{PA} = (x+2, 2, -4)$, $\frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{10}{3}$, 则 $\frac{|-2(x+2)-4-4|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{10}{3}$, 解得 $x = -1$ 或 $x = -11$.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1) 建立空间直角坐标系, 利用投影向量及勾股定理求解点到直线的距离. (2) 思路一: 过点P作 $PD \perp AC$, 垂足为D, 作 $PE \perp BC$, 垂足为E, 作 $PO \perp$ 平面ABC, 垂足为O, 连接OD, OC, OE, 则 $PE = \sqrt{3}$, 所以 $EC = EO = 1$, 所以 $CO = \sqrt{2}$, 进而根据勾股定理求出点P到平面ABC的距离; 思路二: 建系, 利用向量法求点P到平面ABC的距离.

(1) A (2) $\sqrt{2}$ [解析] (1) 四面体OABC满足 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$, 即OA, OB, OC两两垂直, 以点O为原点, 以 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图. 因为 $OA = 1, OB = 2, OC = 3, OC = 3OD$, 所以 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3), D(0,0,1)$, 则 $G(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, 所以 $\vec{AG} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, $\vec{AD} = (-1,0,1)$, 则 $|\vec{AG}| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}$, $\vec{AG} \cdot \vec{AD} = -\frac{2}{3} \times (-1) + 1 = \frac{5}{3}$, 所以点G到直线AD的距离 $d = \sqrt{|\vec{AG}|^2 - (\frac{\vec{AG} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AD}|})^2} = \sqrt{\frac{17}{9} - (\frac{5}{3\sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选A.

(2) 方法一: 过点P作 $PD \perp AC$, 垂足为D, 作 $PE \perp BC$, 垂足为E, 由题意知 $PD = PE = \sqrt{3}$. 过点P作 $PO \perp$ 平面ABC, 垂足为O, 则点O在 $\angle ACB$ 的平分线上, 连接OD, OC, OE, 则 $OD \perp CD$, $OE \perp CE$. 在 $Rt\triangle PCE$ 中, $PC = 2, PE = \sqrt{3}$, 则 $EC = 1$. 在 $Rt\triangle ECO$ 中, $\angle ECO = 45^\circ$, 则 $Rt\triangle ECO$ 为等腰直角三角形, 所以 $EO = EC = 1$, 所以 $CO = \sqrt{2}$. 在 $Rt\triangle PCO$ 中, $PO = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$, 即点P到平面ABC的距离为 $\sqrt{2}$.

方法二: 过点P作 $PD \perp AC$, 垂足为D, 作 $PE \perp BC$, 垂足为E, 由题意知 $PD = PE = \sqrt{3}$, 所以 $CD = CE = 1$. 以C为坐标原点, 以 $\vec{CE}, \vec{CD}$ 的方向分别为 x, y 轴的正方向建立空间直角坐标系, 则 $C(0,0,0), E(1,0,0), D(0,1,0)$, 设 $P(x,y,z)$, 则 $|\vec{CP}| = 2, |\vec{EP}| = |\vec{DP}| = \sqrt{3}$, 得 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ z=-\sqrt{2} \end{cases}$, 所以点P到平面ABC的距离为 $\sqrt{2}$.

变式题1 (1) B (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[解析] (1) 方法一: 设M为直线AC上任意一点, 过M作 $MN \perp BC_1$, 垂足为N, 连接AN, 如图. 设 $\vec{AM} = \lambda \vec{AC} = \lambda \vec{AB} + \lambda \vec{AD}$, $\vec{BN} = \mu \vec{BC_1} = \mu \vec{AD} + \mu \vec{AA_1}$, 则 $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BN} - \vec{AM} = (1-\lambda)\vec{AB} + (\mu-\lambda)\vec{AD} + \mu\vec{AA_1}$. $\because MN \perp BC_1, \therefore \vec{MN} \cdot \vec{BC_1} = 0$, 即 $[(1-\lambda)\vec{AB} + (\mu-\lambda)\vec{AD} + \mu\vec{AA_1}] \cdot (\vec{AD} + \vec{AA_1}) = 0$, $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD} \cdot \vec{AD} + (\mu-\lambda)\vec{AD}^2 + \mu\vec{AA_1}^2 = 0$, 即 $\mu - \lambda + \mu = 0, \therefore \lambda = 2\mu, \therefore \vec{MN} = (1-2\mu)\vec{AB} - \mu\vec{AD} + \mu\vec{AA_1}$, $\therefore |\vec{MN}| = \sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2 + \mu^2} = \sqrt{6\mu^2 - 4\mu + 1} = \sqrt{6(\mu - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}}, \therefore \mu \in \mathbb{R}, \therefore$ 当 $\mu = \frac{1}{3}$ 时, $|\vec{MN}|$ 取得最小值 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故异面直线AC与 BC_1 之间的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选B.

方法二: 如图, 取BC的中点E, 连接 B_1E, DE , 设 B_1E 交 BC_1 于点G, DE 交AC于点F, 则 $\frac{B_1G}{GE} = \frac{B_1C_1}{BE} = 2, \frac{DF}{FE} = \frac{DA}{EC} = 2$. 连接 B_1D, FG , 在 $\triangle B_1DE$ 中, $\frac{B_1G}{GE} = \frac{DF}{FE} = 2, \therefore FG \parallel DB_1, FG = \frac{1}{3} DB_1$. 在正方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中, 易证 $B_1D \perp AC, B_1D \perp BC_1, \therefore FG \perp AC, FG \perp BC_1, \therefore FG$ 为异面直线AC与 BC_1 的公垂线

段. $\because B_1D = \sqrt{3}, \therefore FG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即异面直线

AC与 BC_1 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

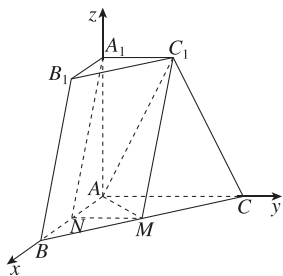
方法三: 如图, 以D为坐标原点, 以 $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), B_1(1,1,1), C_1(0,1,1), C(0,1,0)$, 连接 $DB_1, \therefore \vec{AC} = (-1,1,0), \vec{BC_1} = (-1,0,1), \vec{AB} = (0,1,0), \vec{DB_1} = (1,1,1)$, 则 $\vec{DB_1} \cdot \vec{AC} = 0, \vec{DB_1} \cdot \vec{BC_1} = 0, \therefore DB_1 \perp AC, DB_1 \perp BC_1, \therefore$ 异面直线AC与 BC_1 之间的距离为 $|\frac{\vec{AB} \cdot \vec{DB_1}}{|\vec{DB_1}|}| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 如图, 连接 A_1C , 易知 $V_{A_1-BCD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times A_1A = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$.

在 $\triangle A_1DB$ 中, $A_1D = A_1B = BD = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle A_1DB$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形, 则 $S_{\triangle A_1DB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 设点C到平面 A_1DB 的距离为 h , 则 $V_{C-A_1DB} = V_{A_1-BCD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1DB} \times h = \frac{1}{6}$, 即 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = \frac{1}{6}$, 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以点C到平面 A_1DB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

变式题2 解: (1) 证明: 连接MN. 因为N为AB的中点, M为BC的中点, 所以线段MN是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $MN \parallel AC$, 且 $MN = \frac{1}{2} AC$. 在三棱台ABC-A₁B₁C₁中, $AC = 2, A_1C_1 = 1, A_1C_1 \parallel AC$, 且 $A_1C_1 = \frac{1}{2} AC$, 所以 $MN = A_1C_1$, 且 $MN \parallel A_1C_1$, 所以四边形 A_1C_1MN 是平行四边形, 所以 $A_1N \parallel C_1M$. 又 $A_1N \subset$ 平面 $C_1MA, C_1M \subset$ 平面 C_1MA , 所以 $A_1N \parallel$ 平面 C_1MA .

(2) 因为 $A_1A \perp$ 平面ABC, 且 $AB, AC \subset$ 平面ABC, 所以 $A_1A \perp AB, A_1A \perp AC$. 又 $AB \perp AC$, 所以 $\vec{A_1A}, \vec{AB}, \vec{AC}$ 两两垂直. 如图, 以A为原点, $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AA_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系. 因为 $AB = AC = AA_1 = 2, A_1C_1 = 1$, 所以 $A(0,0,0), C_1(0,1,2), B(2,0,0), C(0,2,0)$. 由M是BC的中点, 可得 $M(1,1,0)$, 所以 $\vec{AC_1} = (0,1,2), \vec{AM} = (1,1,0)$. 设平面 C_1MA 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$, 则 $\vec{AC_1} \perp \vec{m}, \vec{AM} \perp \vec{m}$, 即 $\vec{AC_1} \cdot \vec{m} = 0, \vec{AM} \cdot \vec{m} = 0$, 由此可得 $\begin{cases} y+z=0, \\ x+y=0, \end{cases}$ 令 $y=2$, 则 $x=-2, z=-1$, 即 $\vec{m} = (-2,2,-1)$. 易知平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$. 设平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2}{3}$. 故平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.



(3) 由(2)知, $\vec{AC} = (0, 2, 0)$, 平面 C_1MA 的一个法向量为 $\vec{m} = (-2, 2, -1)$, 设点 C 到平面 C_1MA 的距离为 d , 则 $d = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{|(0, 2, 0) \cdot (-2, 2, -1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}$, 所以点 C 到平面 C_1MA 的距离为 $\frac{4}{3}$.

例2 [思路点拨] (1) 根据等体积法和锥体的体积公式即可求出 V_{P-ABCD} , 延长 BC , AD 交于点 M , 连接 PM , 则 l 为直线 PM ; (2) 建立空间直角坐标系, 设 $\vec{PN} = \lambda \vec{PM}$, 利用空间向量法求解面面夹角, 建立关于 λ 的方程即可求解.

解: (1) 设四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 h , 则 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\therefore AB = 2CD$.

$\therefore S_{\triangle ADB} = 2S_{\triangle BCD}$, $\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 3S_{\triangle BCD}$, $\therefore V_{P-ABCD} = 3V_{P-BCD} = 2\sqrt{2}$. 如图, 延长 BC , AD 交于点 M , 连接 PM , 则平面 PAD 与平面 PBC 的交线 l 为直线 PM .

(2) 取 AD 的中点 E , 连接 PE , $\because PA = PD$, E 是 AD 的中点, $\therefore PE \perp AD$. $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PE \subset$ 平面 PAD , $PE \perp AD$, $\therefore PE \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore V_{P-BCD} = \frac{1}{3} \cdot PE \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

又 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD = 2$, $\therefore PE = \sqrt{2}$.

以点 B 为坐标原点, BM, BA 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 B 作平面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $P(1, 3, \sqrt{2})$, $C(2, 0, 0)$, $D(2, 2, 0)$, $M(4, 0, 0)$, $\therefore \vec{CD} = (0, 2, 0)$, $\vec{PD} = (1, -1, -\sqrt{2})$, $\vec{PM} = (3, -3, -\sqrt{2})$, 设 $\vec{PN} = \lambda \vec{PM} = (3\lambda, -3\lambda, -\sqrt{2}\lambda)$, 则 $\vec{DN} = \vec{PN} - \vec{PD} = (3\lambda - 1, 1 - 3\lambda, \sqrt{2}(1 - \lambda))$, 设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CD} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{PD} = 0, \end{cases}$

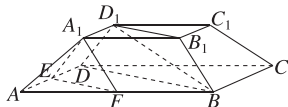
即 $\begin{cases} 2y_1 = 0, \\ x_1 - y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $z_1 = 1$, 得 $\vec{m} = (\sqrt{2}, 0, 1)$. 设平面 CDN 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CD} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{DN} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2y_2 = 0, \\ (3\lambda - 1)x_2 + (1 - 3\lambda)y_2 + \sqrt{2}(1 - \lambda)z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = \sqrt{2}(1 - \lambda)$, 可得 $\vec{n} = (\sqrt{2}(1 - \lambda), 0, 1 - 3\lambda)$. $\therefore$ 平面 PDC 与平面 DCN 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2(1 - \lambda) + 1 - 3\lambda}{\sqrt{3} \times \sqrt{2(1 - \lambda)^2 + (1 - 3\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

整理得 $3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = 3$, 即在直线 l 上存在点 N , 使平面 PDC 与平面 DCN 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 此时 $\vec{PN} = (1, -1, -\frac{\sqrt{2}}{3})$ 或 $\vec{PN} = (9, -9, -3\sqrt{2})$, 则 $PN = \sqrt{1 + 1 + \frac{2}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ 或 $PN = \sqrt{81 + 81 + 18} = 6\sqrt{5}$.

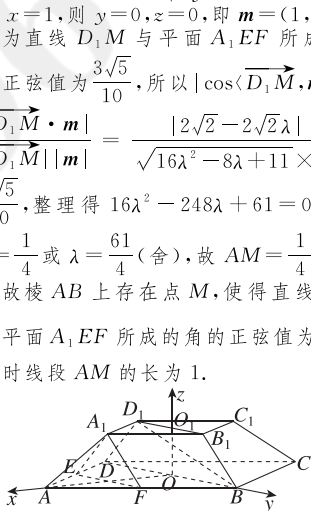
变式题 解: (1) 证明: 如图, 连接 BD , B_1D_1 , 由 E, F 分别为 AD, AB 的中点, 得 $EF \parallel BD$, 又 $EF \subset$ 平面 BB_1D_1D , $BD \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $EF \parallel$ 平面 BB_1D_1D . 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中, $A_1B_1 \parallel AB$ 且 $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB = BF$, 则四边形 A_1FBB_1 为平行四边形, 故 $A_1F \parallel BB_1$, 又 $A_1F \subset$ 平面 BB_1D_1D , $BB_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $A_1F \parallel$ 平面 BB_1D_1D , 又 $A_1F \cap EF = F$, 且 $A_1F \subset$ 平面 A_1EF , $EF \subset$ 平面 A_1EF , 所以平面 $A_1EF \parallel$ 平面 BB_1D_1D , 又 $BD_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $BD_1 \parallel$ 平面 A_1EF .



(2) 取正方形 $ABCD$ 的中心 O , 正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心 O_1 , 连接 OO_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 连接 AO , 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AO \perp BO$, 以 O 为原点, OA, OB, OO_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 由 $AB = 2A_1B_1 = 4$, 二面角 C_1-BC-D 的大小为 45° , 得 $OO_1 = \frac{AB - A_1B_1}{2} \times \tan 45^\circ = 1$, 则 $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $A_1(\sqrt{2}, 0, 1)$, $F(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $E(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, $D_1(0, -\sqrt{2}, 1)$, 假设在棱 AB 上存在点 $M(m, n, 0)$ 满足题意, 则 $\vec{AM} = (m - 2\sqrt{2}, n, 0)$, $\vec{AB} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, 设 $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $M(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\lambda, 2\sqrt{2}\lambda, 0)$, $\vec{D_1M} = (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\lambda, 2\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}, -1)$.

设平面 A_1EF 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 因为 $\vec{A_1E} = (0, -\sqrt{2}, -1)$, $\vec{EF} = (0, 2\sqrt{2}, 0)$, 所以 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{A_1E} = -\sqrt{2}y - z = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{EF} = 2\sqrt{2}y = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 则 $y = 0, z = 0$, 即 $\vec{m} = (1, 0, 0)$. 因为直线 D_1M 与平面 A_1EF 所成的角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$, 所以 $|\cos \langle \vec{D_1M}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{D_1M} \cdot \vec{m}|}{|\vec{D_1M}| |\vec{m}|} = \frac{|2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{16\lambda^2 - 8\lambda + 11} \times \sqrt{1}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, 整理得 $16\lambda^2 - 248\lambda + 61 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$ 或 $\lambda = \frac{61}{4}$ (舍), 故 $AM = \frac{1}{4} AB = 1$, 故棱 AB 上存在点 M , 使得直线 D_1M 与平面 A_1EF 所成的角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$, 此时线段 AM 的长为 1.



例3 [思路点拨] (1) 在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理得到 EF , 结合勾股定理得到垂直, 由折叠的性质得到 $PE \perp EF$, 利用线面垂直的判定定理得到 $EF \perp$ 平面 PDE , 即可证得结论; (2) 由勾股定理以及线面垂直的性质得到 EF, ED, EP 两两垂直, 建立空间直角坐标系, 求出两平面的法向量, 即可得二面角的正弦值.

解: (1) 证明: 在 $\triangle AEF$ 中, $AE = \frac{2}{5} AD = 2\sqrt{3}$, $AF = \frac{1}{2} AB = 4$, $\angle EAF = 30^\circ$,

$\therefore \cos \angle EAF = \frac{AE^2 + AF^2 - EF^2}{2AE \cdot AF} = \frac{12 + 16 - EF^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore EF = 2$. $\therefore EF^2 + AE^2 = AF^2$, $\therefore AE \perp EF$, 得 $PE \perp EF$, $DE \perp EF$, 又 $PE \cap DE = E$, $PE, DE \subset$ 平面 PDE , $\therefore EF \perp$ 平面 PDE , 又 $\because PD \subset$ 平面 PDE , $\therefore EF \perp PD$.

(2) 连接 CE , $\because DE = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, $CD = 3$, $\angle CDE = 90^\circ$, $\therefore CE^2 = 36$, 得 $CE = 6$.

又 $PE = AE = 2\sqrt{3}$, $PC = 4\sqrt{3}$, $\therefore PE^2 + CE^2 = PC^2$, $\therefore PE \perp CE$. 又 $PE \perp EF$, $EF \cap CE = E$, $EF, CE \subset$ 平面 DEC , $\therefore PE \perp$ 平面 DEC , $\therefore PE \perp ED$, 即 EF, ED, EP 两两垂直. 以 E 为原点, EF, ED, EP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, 2\sqrt{3})$, $D(0, 3\sqrt{3}, 0)$, $F(2, 0, 0)$, $A(0, -2\sqrt{3}, 0)$, $C(3, 3\sqrt{3}, 0)$, 由 F 为 AB 的中点, 得 $B(4, 2\sqrt{3}, 0)$, 得 $\vec{PD} = (0, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $\vec{CD} = (-3, 0, 0)$, $\vec{PB} = (4, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $\vec{BF} = (-2, -2\sqrt{3}, 0)$. 设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{PD} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0, \\ -3x_1 = 0, \end{cases}$ 令 $y_1 = 2$, 则 $\vec{n}_1 = (0, 2, 3)$.

设平面 PBF 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{PB} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BF} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 4x_2 + 2\sqrt{3}y_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0, \\ -2x_2 - 2\sqrt{3}y_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = \sqrt{3}$, 则 $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, -1, 1)$. 设平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角为 α , $\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{65}}{65}$, $\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$.

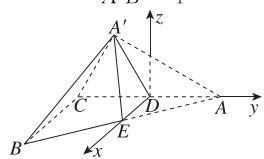
变式题 解: (1) 证明: 方法一: 如图, 取 $A'C$ 的中点 G , 连接 DG , 因为 D, E 分别为 AC, AB 的中点, 所以 $DE \parallel BC$.

因为 $\angle C = \frac{\pi}{2}$, 所以 $DE \perp AC$. 在立体图形中, $DE \perp CD$, $DE \perp A'D$, $A'D \cap CD = D$, $A'D, CD \subset$ 平面 $A'CD$, 所以 $DE \perp$ 平面 $A'CD$, 所以 $BC \perp$ 平面 $A'CD$. 因为 $BC \subset$ 平面 $A'BC$, 所以平面 $A'BC \perp$ 平面 $A'CD$, 平面 $A'BC \cap$ 平面 $A'CD = A'C$. 因为 G 为 $A'C$ 的中点, 且 $CD = A'D$, 所以 $DG \perp A'C$, 因为 $DG \subset$ 平面 $A'CD$, 所以 $DG \perp$ 平面 $A'BC$. 又因为 $DG \parallel A'A$, 所以 $A'A \perp$ 平面 $A'BC$. 因为 $BA' \subset$ 平面 $A'BC$, 所以 $AA' \perp BA'$. 方法二: 因为 $BE = EA' = EA$, 所以 $\angle EA'A = \angle EAA'$ 且 $\angle EA'B = \angle EBA'$, 故 $\angle BA'A = \angle EA'B + \angle EA'A = \angle EBA' + \angle EAA'$, 所以 $\angle BA'A = 90^\circ$, 即 $AA' \perp BA'$.

(2) 方法一: 因为 $DE \parallel BC$, 且 $DE \subset$ 平面 $A'BC$, $BC \subset$ 平面 $A'BC$, 所以 $DE \parallel$ 平面 $A'BC$. 又 $DE \subset$ 平面 $A'ED$, 若平面 $A'BC \cap$ 平面 $A'ED = l$, 则 $l \parallel DE$, 又 $DE \parallel BC$, 所以 $l \parallel BC$. 由(1)可知, $BC \perp A'C$, $DE \perp A'D$, 所以 $l \perp A'C$, $l \perp A'D$, 所以平面 $A'BC$ 与平面 $A'ED$ 的夹角为 $\angle CA'D$. 因为 $\angle CA'D = \frac{\pi}{3}$, 且 $CD = A'D$, 所以 $\triangle A'CD$ 为正三角形. 过点 B 作 $BH \perp$ 平面 $A'ED$, 垂足为 H , 连接 HA' , 则 $\angle BA'H$ 为直线 $A'B$ 与平面

$A'ED$ 所成的角. 过点 C 作 $CF \perp A'D$ 于点 F , 因为 $BC \parallel$ 平面 $A'ED$, 所以 $BH = CF = \sqrt{3}$, 又因为 $A'B = \sqrt{BC^2 + CA'^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $\sin \angle BA'H = \frac{BH}{A'B} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

方法二: 以 D 为原点, DE 所在直线为 x 轴, DA 所在直线为 y 轴, 建立如图示的空间直角坐标系.



设 $\angle A'DA = \theta$, 则 $D(0,0,0), E(1,0,0), B(2,-2,0), C(0,-2,0), A'(0,2\cos\theta, 2\sin\theta)$, 则 $\overrightarrow{CB} = (2,0,0), \overrightarrow{CA'} = (0, 2\cos\theta + 2, 2\sin\theta), \overrightarrow{DE} = (1,0,0), \overrightarrow{DA'} = (0, 2\cos\theta, 2\sin\theta)$. 设平面 $A'BC$ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CB} = 2x_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CA'} = (2\cos\theta + 2)y_1 + 2\sin\theta \cdot z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $y_1 = -\sin\theta$, 则 $\mathbf{m} = (0, -\sin\theta, \cos\theta + 1)$. 设平面 $A'ED$ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = x_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA'} = 2\cos\theta \cdot y_2 + 2\sin\theta \cdot z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $y_2 = \sin\theta$, 则 $\mathbf{n} = (0, \sin\theta, -\cos\theta)$.

由题得 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|1 + \cos\theta|}{\sqrt{2+2\cos\theta}} = \frac{1}{2}$, 可得 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, 所以 $A'(0, -1, \sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{BA'} = (-2, 1, \sqrt{3})$, 所以 $\mathbf{n} = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. 设直线 $A'B$ 与平面 $A'ED$ 所成角

为 α , 则 $\sin \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{BA'}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 故直线 $A'B$ 与平面 $A'ED$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

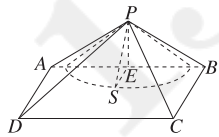
增分微课 7 空间中的动态问题

例 1 A [解析] 设二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 θ , 点 P 到平面 BCD 的距离为 PH , 点 P 到定直线 CB 的距离为 d , 则 $PH = d \sin \theta$. $\because$ 点 P 到平面 BCD 的距离与点 P 到点 A 的距离相等, $\therefore d \sin \theta = PA$, $\therefore \frac{PA}{d} = \sin \theta$, 由四面体 $ABCD$ 为正四面体, 得 $\sin \theta$ 为小于 1 的定值, 即在平面 ABC 中, 点 P 到点 A 的距离与到定直线 BC 的距离的比值是一个小于 1 的定值, $\therefore$ 点 P 的轨迹为椭圆在 $\triangle ABC$ 内的一部分. 故选 A.

变式题 B

[解析] 取 AB 的中点 E , 连接 PE, SE , 如图. 因为 $PA = PB = 4\sqrt{3}$, E 为 AB 的中点, 所以 $PE \perp AB$. 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $PE \subset$ 平面 PAB , 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $SE \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE \perp SE$. 因为四边形 $ABCD$ 是边长为 12 的正方形, 所以 $AE = 6$, 所以 $PE = \sqrt{PA^2 - AE^2} = \sqrt{48 - 36} = 2\sqrt{3}$, $SE = \sqrt{PS^2 - PE^2} \leq \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$, 所以点 S 所在区域是以点 E 为圆心, $2\sqrt{6}$ 为半径的圆在四边形 $ABCD$ 内的部分, 所以动点 S 所在区域的面积为 $\frac{1}{2} \pi \times (2\sqrt{6})^2 = 12\pi$. 故选 B.

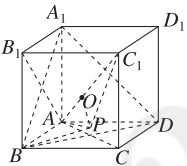
例 2 ACD [解析] 对于 A, 由题可知, $A_1D \perp A_1E$, 若存在某个位置使得 $DA_1 \perp EC$, 则由 $A_1E \cap EC = E, A_1E, EC \subset$ 平面 A_1EC , 得 $A_1D \perp$ 平面 A_1EC , 又 $A_1C \subset$ 平面 A_1EC , 所以 $A_1D \perp A_1C$,



又因为 $AB = 2AD = 2$, 所以 $A_1C = \sqrt{3}$, 由于在折叠过程中, $A_1C \in (1, \sqrt{5})$, 所以存在某个位置, 使得 $A_1C = \sqrt{3}$, 故存在某个位置, 使得 $DA_1 \perp EC$, 故 A 正确. 对于 B, 若存在某个位置, 使得 $A_1C \perp$ 平面 A_1DE , 则由 $A_1D, A_1E \subset$ 平面 A_1DE , 得 $A_1C \perp A_1D, A_1C \perp A_1E$, 因为 $DE = CE = \sqrt{2}, A_1D = A_1E = 1, CD = 2$, 所以由 $A_1C \perp A_1E$ 可得 $A_1C = 1$, 由 $A_1C \perp A_1D$ 可得 $A_1C = \sqrt{3}, A_1C = 1$ 与 $A_1C = \sqrt{3}$ 不能同时成立, 所以 $A_1C \perp$ 平面 A_1DE 不成立, 故 B 错误. 对于 C, 当四棱锥 A_1-DCBE 的体积最大时, 平面 $A_1DE \perp$ 平面 $DCBE$, 因为 $\triangle A_1DE$ 是等腰直角三角形, 所以点 A_1 到平面 $DCBE$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以四棱锥 A_1-DCBE 的体积的最大

值为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2+1) \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 故 C 正确. 对于 D, 取 DC 的中点 O , 连接 OM , 因为 M 为 A_1C 的中点, 所以 $OM \parallel A_1D$, 且 $OM = \frac{1}{2} A_1D = \frac{1}{2}$, 为定值, 所以 M 在以点 O 为球心的球面上, 故 D 正确. 故选 ACD.

例 3 $2\sqrt{6}$ [解析] 如图, 连接 AC_1 , 与平面 A_1BD 交于点 O , 连接 AC, AB_1, OP , 易知 $BD \perp AC, BD \perp AA_1$, 又 $AC \cap AA_1 = A, AC, AA_1 \subset$ 平面 ACC_1 , 所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1 , 又 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1 , 所以 $BD \perp AC_1$. 因为 $A_1B \perp AB_1, A_1B \perp B_1C_1, AB_1 \cap B_1C_1 = B_1, AB_1, B_1C_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , 所以 $A_1B \perp$ 平面 AB_1C_1 , 又 $AC_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , 所以 $A_1B \perp AC_1$. 因为 $BD \cap A_1B = B, BD, A_1B \subset$ 平面 A_1BD , 所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD , 易知 $AO = \frac{1}{3} AC_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 因为



$AP = \sqrt{2}$, 所以 $OP = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. $\triangle A_1BD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正三角形,

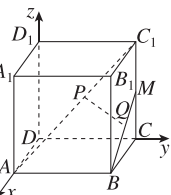
其内切圆的半径 $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以点 P 在 $\triangle A_1BD$ 的内切圆上, 因为 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD , 且点 C_1 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{2}{3} AC_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

所以 $C_1P = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{3})^2 + (\frac{4\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{6}$, 当点 P 为 A_1D 的中点时 BP 最大, 最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2} A_1B = \sqrt{6}$, 所以 $BP + C_1P$ 的最大值为 $2\sqrt{6}$.

例 4 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ [解析] 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$, 所以 D_1P 与 A_1C_1 所成的角可以转化为 D_1P 与 AC 所成的角, 根据动点变化的连续性, 可知当 P 从点 A 向点 C 移动时, D_1P 与 AC 所成角的整体变化趋势为先逐渐变大, 再逐渐变小. 当 P 在点 A 或 C 处时, D_1P 与 AC 所成的角最小, 为 $\frac{\pi}{3}$; 当点 P 在 AC 的中点处时, D_1P 与 AC 所成的角最大, 为 $\frac{\pi}{2}$. 故 D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

变式题 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ [解析] 以 D 为原点, 建立如图示的空间直角坐标系, 所以 $A(2,0,$

$0), C_1(0,2,2), B(2,2,0), M(0,2,1)$, 则 $\overrightarrow{AC_1} = (-2,2,2), \overrightarrow{BM} = (-2,0,1)$, 设 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC_1} = (-2x, 2x, 2x), \overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BM} = (-2y, 0, y)$, 则 $P(2-2x, 2x, 2x), Q(2-2y, 2y, y)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = (2x-2y, 2-2x, y-2x)$. 直线 AC_1 与 BM 为异面直线, 要使 PQ 最小, 则 PQ 是 AC_1, BM 的公垂线段, 故 $\begin{cases} \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2(2x-2y) + 2(2-2x) + 2(y-2x) = 0, \\ -2(2x-2y) + (y-2x) = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{5}{6}, \\ y = 1, \end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, 故 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



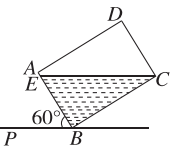
培优专题 (五) 立体几何中的创新交汇问题

例 1 解: (1) 椭圆的离心率为 $\sin \alpha$.

证明: 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. 由题意得圆柱母线与桌面所成的角为 $90^\circ - \alpha$, 水面与地面平行, 则椭圆的长轴与圆柱母线所成的角是 $90^\circ - \alpha$, 所以 $2a = \frac{20}{\cos \alpha}$, 即 $a = \frac{10}{\cos \alpha}$, 易知 $b = 10$, 则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{100}{\cos^2 \alpha} - 100} = 10 \tan \alpha$, 所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{10 \tan \alpha}{\frac{10}{\cos \alpha}} = \sin \alpha$.

(2) 根据题意, 画出截面图形, 如图所示. 过 C 作 $CF \parallel BP$, 交 AD 于点 F , 在 $Rt \triangle CDF$ 中, $\angle FCD = \alpha, CD = 20$ cm, 所以 $DF = 20 \tan \alpha$ cm, 则 $AF = (30 - 20 \tan \alpha)$ cm. 此时容器内能容纳的溶液体积为 $\pi \times 10^2 \times 30 - \frac{1}{2} \pi \times 10^2 \times 20 \tan \alpha = 100\pi(30 - 10 \tan \alpha)$ cm³, 而容器内原有溶液的体积为 $\pi \times 10^2 \times 20 = 100\pi \times 20$ (cm³), 令 $100\pi(30 - 10 \tan \alpha) \geq 100\pi \times 20$, 解得 $\tan \alpha \leq 1$, 所以 $\alpha \leq 45^\circ$, 故要使倾斜后容器内的液体不会溢出, 角 α 的最大值为 45° .

(3) 将该圆柱形容器放大为底面边长为 20 cm, 高为 30 cm 的正四棱柱, 画出截面图形, 如图所示. 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 过 C 作 $CE \parallel BP$, 交 AB 于点 E , 在 $Rt \triangle CBE$ 中, $BC = 30$ cm, $\angle BCE = 30^\circ$, 则 $BE = 10\sqrt{3}$ cm, 则 $S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} \times BC \times BE = 150\sqrt{3}$ (cm²), 所以容器内溶液的体积为 $150\sqrt{3} \times 20 = 3000\sqrt{3}$ (cm³), 则倒出的溶液体积为 $(20^3 - 3000\sqrt{3})$ cm³, 因为 $20^3 - 3000\sqrt{3} < 3000$, 所以放大后的正四棱柱形状容器不能满足要求, 则圆柱形状容器也不能满足要求.



例 2 解: (1) 坐标平面 xOz 的方程为 $y = 0$.

已知曲面 C 的方程为 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1$, 当 $y = 0$ 时, 平面 xOz 截曲面 C 所得交线上的点 $M(x, 0, z)$ 满足 $x^2 - \frac{z^2}{4} = 1$,

从而平面 xOz 截曲面 C 所得交线是平面 xOz 上以原点 O 为对称中心, 焦点在 x 轴上, 实轴长为 2, 虚轴长为 4 的双曲线. (2) 证明: 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 l 上任

意一点,由 $d=(1,0,2), \overrightarrow{QP}=(x_0+1, y_0+1, z_0+2)$ 均为直线 l 的方向向量,得 $\overrightarrow{QP} \parallel d$,从而存在实数 λ ,使得 $\overrightarrow{QP}=\lambda d$,即 $(x_0+1, y_0+1, z_0+2)=\lambda(1,0,2)$,

$$\begin{cases} x_0+1=\lambda, \\ y_0+1=0, \\ z_0+2=2\lambda, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_0=\lambda-1, \\ y_0=-1, \\ z_0=2\lambda-2, \end{cases}$$

所以点 P 的坐标为 $(\lambda-1, -1, 2\lambda-2)$, 于是 $\frac{(\lambda-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} - \frac{(2\lambda-2)^2}{4} =$

$\lambda^2-2\lambda+1+1-(\lambda^2-2\lambda+1)=1$, 因此点 P 的坐标总是满足曲面 C 的方程,从而直线 l 在曲面 C 上.

(3) 直线 l' 在曲面 C 上,且过点 $T(1,0,0)$, 设 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是直线 l' 上任意一点,直线 l' 的方向向量为 $d'=(a,b,c)$,由 $d', \overrightarrow{TM}$ 均为直线 l' 的方向向量,得 $\overrightarrow{TM} \parallel d'$,从而存在实数 t ,使得 $\overrightarrow{TM}=td'$,即 $(x_1-1, y_1, z_1)=t(a,b,c)$,

$$\begin{cases} x_1-1=at, \\ y_1=bt, \\ z_1=ct, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_1=1+at, \\ y_1=bt, \\ z_1=ct, \end{cases} \text{所以点}$$

M 的坐标为 $(1+at, bt, ct)$. 因为 $M(x_1, y_1, z_1)$ 在曲面 C 上,所以 $\frac{(1+at)^2}{1} + \frac{(bt)^2}{1} - \frac{(ct)^2}{4} = 1$, 整理得

$$\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{4}\right)t^2+2at=0, \text{由题意,对任意的 } t, \text{ 有 } \left(a^2+b^2-\frac{c^2}{4}\right)t^2+2at=0 \text{ 成立,}$$

所以 $a^2+b^2-\frac{c^2}{4}=0$, 且 $2a=0$, 所以 $c=2b$ 或 $c=-2b$, 不妨取 $b=1$, 则 $c=2$ 或 $c=-2$, 所以 $d'=(0,1,2)$ 或 $d'=(0,1,-2)$, 又直线 l 的方向向量为 $d=(1,0,2)$, 所以异面直线 l 与 l' 所成角的余弦值

$$\text{为 } \frac{|d \cdot d'|}{|d||d'|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

【自测题】

解:(1)如图,设单位球的球心为 O , 球面三角形的三个顶点分别为 A, B, C , 因为单位球面有一个球面三角形,三条边长均为

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 所以每个大圆弧}$$

长均为 $\frac{\pi}{2}$, 又单位球的半径 $R=1$, 所以

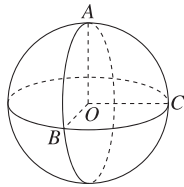
球面三角形每条边所对的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$,

所以在三棱锥 $A-OBC$ 中, OA, OB, OC 两两垂直. 易得 $OA \perp$ 平面 OBC , 又 $OA \subset$ 平面 OAB , 所以平面 $OAB \perp$ 平面 OBC , 同理平面 $OAB \perp$ 平面 OCA , 平面 $OCA \perp$ 平面 OBC , 所以球面三角形任意两条边所在的半平面构成的二面角均为 $\frac{\pi}{2}$, 所以球面三角形的三个角均为 $\frac{\pi}{2}$, 从而此

球面三角形的内角和为 $\frac{3\pi}{2}$.

(2) 若将地球看作一个球体, 在地球上 0° 经线和 90° 经线所在大圆与赤道所在大圆将球面平均分成 8 个全等的球面三角形, 且每个球面三角形的 3 个角均为 $\frac{\pi}{2}$, 内角和为 $\frac{3\pi}{2}$, 从而每个球面三角形的面积

$$S = \frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}, \text{ 则每个球面三角形的总曲率 } x = \frac{S}{R^2} = \frac{\pi}{2}, \text{ 又球面三角形总曲率}$$



x 与球面三角形内角和 θ 满足: $\theta = \pi + \alpha x$, 其中 α 为常数, 设 $\theta = f(x)$, 则

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{2}\alpha = \frac{3\pi}{2}, \text{ 从而 } \alpha = 1.$$

(3) 将多面体的每个面视作可以自由伸缩的橡皮膜, 使其膨胀为一个半径为 R 的球, 每个顶点均在球面上, 每条边变为球面上的边, 每个多边形变为球面上的多边形, 且膨胀前后 $\chi(\Omega) = V - E + F$ 不变. 不妨记球面仍为单位球面, 半径 $R=1$, 对于任意一个球面 k 边形, 可用球面上的边分割成 $(k-2)$ 个球面三角形, 由(2)可知, $\alpha=1$, 则每个球面三角形的内角和 $\theta =$

$$\pi + x = \pi + \frac{S}{R^2} = \pi + S, \text{ 即每个内角和为 } \theta$$

的球面三角形的面积为 $\theta - \pi$. 记 $\varphi =$

$\sum_{j=1}^F \theta_j$ 为分割成 $(k-2)$ 个球面三角形的

球面 k 边形的内角和, 则球面 k 边形的面积

为 $\varphi - (k-2)\pi$. 记球面上多边形为 α_i ,

$i=1, 2, \dots, F$, 对每一个球面多边形 α_i ,

设其边数为 l_i , 内角和为 φ_i , 面积为 S_i , 则由球面三角形的定义可知, 每个顶点

处所有球面多边形的角之和为 2π , 顶点数为 V , 从而所有球面多边形内角和为

$$\sum_{i=1}^F \varphi_i = 2\pi V, \text{ 又球面多边形每条边被重}$$

复计算 2 次, 棱数为 E , 所以 $\sum_{i=1}^F l_i \pi =$

$$2\pi E, \text{ 则 } \sum_{i=1}^F (\varphi_i - l_i \pi + 2\pi) = 2\pi V -$$

$$2\pi E + 2\pi F, \text{ 又所有球面多边形面积之和}$$

$$\sum_{i=1}^F S_i = 4\pi R^2 = 4\pi, \text{ 故 } 2\pi V - 2\pi E +$$

$$2\pi F = 4\pi, \text{ 故 } \chi(\Omega) = V - E + F = 2.$$

第八单元 解析几何

第 49 讲 直线的倾斜角与斜率、直线的方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) 0° (2) $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ (3) 正切值

$$\tan \alpha \quad (4) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. (1) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (1, k)

$$(2) \textcircled{1} 90^\circ \quad \textcircled{2} \frac{v}{u} \quad \frac{v}{u}$$

3. $y - y_0 = k(x - x_0) \quad y = kx + b$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \frac{a}{x} + \frac{y}{b} = 1$$

$$Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$$

【对点演练】

1. $-\sqrt{3} \quad 120^\circ$ (1, $-\sqrt{3}$) (答案不唯一) [解析] 由题意知直线 l 的斜率 $k = \frac{3\sqrt{3}-0}{-5-(-2)} = -\sqrt{3}$, 即 $\tan \theta = -\sqrt{3}$, 则倾斜角 $\theta = 120^\circ$, 直线 l 的一个方向向量为 $(1, -\sqrt{3})$.

2. 5 [解析] 因为 $k_{AB} = \frac{3-1}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$, $k_{BC} = \frac{m-1}{4-(-2)} = \frac{m-1}{6}$, 所以 $\frac{m-1}{6} = \frac{2}{3}$, 解得 $m=5$.

3. $(-1, -2)$ [解析] 因为 $y+2=k(x+1)$, 即 $y-(-2)=k[x-(-1)]$, 所以该直线恒过点 $(-1, -2)$.

4. $3x-2y=0$ 或 $x+y-5=0$ [解析] 当在两坐标轴上的截距为零时, 直线方程为 $3x-2y=0$; 当在两坐标轴上的截距不为零时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$, 解得 $a=5$, 所以直线方程为 $x+y-5=0$.

5. ②④ [解析] 坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角, ①中说法正确; 若一条直线的斜率为 1, 则此直线的倾斜角为 45° , ②中说法错误; 直线的倾斜角的取值范围是 $[0, \pi)$, ③中说法正确; 当直线的倾斜角为 90° 时, 直线的斜率不存在, ④中说法错误, 故填②④.

6. $[-\sqrt{3}, 0) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ [解析] 当 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $k = \tan \alpha \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$; 当 $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $k = \tan \alpha \in [-\sqrt{3}, 0)$. 综上可得 $k \in [-\sqrt{3}, 0) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 根据题图可知 $\frac{\pi}{2} > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, α_1 为钝角, 即得 $k_2 > k_3 > 0$, $k_1 < 0$, 进而得解.

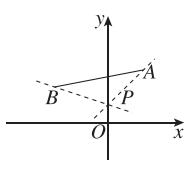
AD [解析] 由题图知, $\frac{\pi}{2} > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, α_1 为钝角, 故 $k_2 > k_3 > 0$, $k_1 < 0$. 故选 AD.

变式题 (1) $(-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$$(2) \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$$

[解析] (1) 由题得直线 $ax+y-1=0$ 的斜率为 $-a$, 且过点 $P(0, 1)$, 由图可得, 要使直线与线段 AB 总有公共点, 需满足 $-a \geq k_{PA}$ 或 $-a \leq$

$$k_{PB}. \because k_{PA}=1, k_{PB}=-\frac{1}{3}, \therefore -a \geq 1 \text{ 或}$$



$-a \leq -\frac{1}{3}, \therefore a \leq -1$ 或 $a \geq \frac{1}{3}$. 故 a 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

(2) 直线 $x+(a^2+1)y+1=0 (a \in \mathbf{R})$ 的斜率为 $-\frac{1}{a^2+1}$, 易得 $-1 \leq -\frac{1}{a^2+1} < 0$, 设直线的倾斜角为 α , $0 \leq \alpha < \pi$, 则 $-1 \leq \tan \alpha < 0$, 所以 $\frac{3\pi}{4} \leq \alpha < \pi$.

例 2 [思路点拨] (1) 分直线经过原点和直线不经过原点两种情况, 由截距式求得直线方程. (2) 先由中点坐标公式求出点 M, N 的坐标, 再由两点式求得直线 MN 的方程.

(1) C (2) C [解析] (1) 由题意, 当直线经过原点时, 直线的方程为 $x+y=0$; 当直线不经过原点时, 设直线的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 则 $\frac{-10}{4a} + \frac{10}{a} = 1$, 解得 $a = \frac{15}{2}$, 此时直线的方程为 $\frac{x}{30} + \frac{2y}{15} = 1$, 即 $x+4y-30=0$. 故选 C.

(2) 由题知 $M(2, 4), N(3, 2)$, 则中点 MN 所在直线的方程为 $\frac{y-4}{2-4} = \frac{x-2}{3-2}$, 整理得 $2x+y-8=0$. 故选 C.

变式题 (1) B (2) $3x+y-6=0$ (3) -1

或 $-\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ [解析] (1) $\because$ 直线 l 的一个方向向量为 $(1, -2)$, $\therefore$ 直线 l

的斜率 $k = \frac{-2}{1} = -2$, 又 $\because$ 直线 l 过点 $(-3, -2)$, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $y+2 = -2(x+3)$, 即 $2x+y+8=0$. 故选 B.

(2) 因为 $|OA| = |AB|$, 所以 $\angle AOB = \angle ABO$, 即 $k_{AB} = -k_{OA} = -3$, 所以直线 AB 的方程为 $y-3 = -3(x-1)$, 即 $3x+y-6=0$.

(3) 当 $k=0$ 时, $y=1$, 不符合直线 l 在两

坐标轴上的截距相等. 当 $k \neq 0$ 时, 令 $x = 0$, 得 $y = 2k + 1$, 令 $y = 0$, 得 $x = -2 - \frac{1}{k}$, 由题意可得 $-2 - \frac{1}{k} = 2k + 1$, 解得 $k = -1$ 或 $k = -\frac{1}{2}$. $\therefore$ 直线 l 的方程为 $kx - y + 1 + 2k = 0$, 即 $y = kx + 1 + 2k$, 直线 l 不经过第三象限, $\therefore k \leq 0$ 且 $1 + 2k \geq 0$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq k \leq 0$, 故实数 k 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

例 3 [思路点拨] 利用待定系数法, 设出直线的截距式方程, 根据题中的条件结合基本不等式, 求得直线方程.

解: (1) 设直线 $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$, 因为直线 l 经过点 $P(4, 1)$, 所以 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$. 因为 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}}$, 所以 $ab \geq 16$, 当且仅当 $a = 8, b = 2$ 时等号成立, 所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ab \geq 8$.

所以当 $a = 8, b = 2$ 时, $\triangle AOB$ 的面积最小, 此时直线 l 的方程为 $\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1$, 即 $x + 4y - 8 = 0$.

(2) 因为 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1, a > 0, b > 0$, 所以 $|OA| + |OB| = a + b = (a + b) \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right) = 5 + \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 9$, 当且仅当 $a = 6, b = 3$ 时等号成立, 所以当 $|OA| + |OB|$ 取最小值时, 直线 l 的方程为 $x + 2y - 6 = 0$.

变式题 BCD [解析] 对于 A, 因为直线 l 的方程可化为 $a(x - 2) = y - 2$, 所以直线 l 过定点 $A(2, 2)$, 故 A 错误. 对于 B, 因为直线 l 过定点 $A(2, 2)$, 且 $k_{PA} = 2, k_{QA} = 0$, 所以 $a \in [0, 2]$, 故 B 正确. 对于 C, 当直线 $l \perp PA$ 时, 点 P 到直线 l 的距离最大, 最大距离为 $|PA| = \sqrt{5}$, 故 C 正确. 对于 D, 当 $a = -1$ 时, 直线 l 的方程为 $x + y - 4 = 0$, 设点 P 关于直线 l 的对称点为 $P'(m, n)$, 则 $\begin{cases} \frac{n-4}{m-3} = 1, \\ \frac{m+3}{2} + \frac{n+4}{2} - 4 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 0, \\ n = 1, \end{cases}$ 所以 $P'(0, 1)$, 所以 $(|PM| + |QM|)_{\min} = |P'Q| = \sqrt{26}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

第 50 讲 两直线的位置关系

● 课前基础巩固

[知识聚焦]

1. $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$ $k_1 \cdot k_2 = -1$ $k_1 \neq k_2$

2. 交点坐标 (1) 相交 交点的坐标 (2) 无公共点 平行

3. $\frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

[对点演练]

- 直角 [解析] 因为边 AB 所在直线的斜率 $k_1 = -\frac{1}{2}$, 边 BC 所在直线的斜率 $k_2 = 2$, 且 $k_1 k_2 = -1$, 所以 $AB \perp BC$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.
- 15 或 5 [解析] 点 $P(-1, 2)$ 到直线 $l: 4x - 3y + C = 0$ 的距离为 1, 即 $\frac{|-4 - 6 + C|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 1$, 即 $25 = (C - 10)^2$, 故 $C = 15$ 或 $C = 5$.
- $4x - 3y - 6 = 0$ [解析] 由 $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases}$ 所以两条直线的交点坐标为 $(3, 2)$, 又直线 $4x - 3y - 7 = 0$ 的斜率为 $\frac{4}{3}$, 故所求直线方程为 $y - 2 = \frac{4}{3}(x - 3)$, 即 $4x - 3y - 6 = 0$.

4. $\frac{1}{6}$ [解析] 方法一: 因为直线 $l_1: x + 2my - 1 = 0$ 与 $l_2: (3m - 1)x - my + 1 = 0$ 平行, 所以两直线的斜率相等或斜率均不存在, 所以 $-\frac{1}{2m} = \frac{3m - 1}{m}$ 或 $m = 0$, 即 $m = \frac{1}{6}$ 或 $m = 0$. 当 $m = 0$ 时, l_1 与 l_2 重合, 不符合题意, 所以 $m = \frac{1}{6}$.

方法二: 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $\begin{cases} 1 \times (-m) - (3m - 1) \times 2m = 0, \\ 1 \times 1 - (3m - 1) \times (-1) \neq 0, \end{cases}$ 解得 $m = \frac{1}{6}$.

5. 0 或 1 [解析] 当 $1 - 4a = 0$ 或 $a + 4 = 0$ 时, 两直线不垂直, 不符合题意; 当 $1 - 4a \neq 0$ 且 $a + 4 \neq 0$ 时, 由 $\left(-\frac{3a + 2}{1 - 4a}\right) \times \left(-\frac{5a - 2}{a + 4}\right) = -1$, 得 $a = 0$ 或 $a = 1$.

6. $\frac{7}{2}$ [解析] 依题意得 $a = 6, 3x + 4y - 12 = 0$ 可变形为 $6x + 8y - 24 = 0$, 所以两条平行直线之间的距离为 $\frac{|11 + 24|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{7}{2}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 判断两直线的位置关系, 关键是判断两直线斜率之间的关系.

解: (1) 当 $m = -6$ 时, 直线 l_1 的方程为 $-3x + 5y = 23$, l_2 的方程为 $x = 4$, 显然两直线相交; 当 $m \neq -6$ 时, 由 $\frac{m + 3}{2} \neq \frac{5}{m + 6}$, 解得 $m \neq -1, m \neq -8$. 综上, 当 $m \neq -1$ 且 $m \neq -8$ 时, 直线 l_1 与 l_2 相交.

(2) 由 (1) 知, 当 $m = -6$ 时, 直线 l_1 与 l_2 相交. 当 $m \neq -6$ 时, 由 $\frac{m + 3}{2} = \frac{5}{m + 6} \neq \frac{5 - 3m}{8}$, 解得 $m = -1$ (舍去) 或 $m = -8$, 所以当 $m = -8$ 时, 直线 l_1 与 l_2 平行.

(3) 由 $\frac{m + 3}{2} = \frac{5}{m + 6} = \frac{5 - 3m}{8}$, 得 $m = -1$, 所以当 $m = -1$ 时, 直线 l_1 与 l_2 重合.

(4) 由 $2(m + 3) + 5(m + 6) = 0$, 得 $m = -\frac{36}{7}$, 所以当 $m = -\frac{36}{7}$ 时, 直线 l_1 与 l_2 垂直.

变式题 (1) A (2) C (3) $x - 2y + 4 = 0$

[解析] (1) 若直线 $x + my - 1 = 0$ 与直线 $nx + y + 1 = 0$ 平行, 则 $m \neq 0, n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{n} = \frac{m}{1} \neq \frac{-1}{1}$, 所以 $mn = 1$, 且 $m \neq -1, n \neq -1$, 充分性成立. 当 $m = -1, n = -1$ 时, $mn = 1$, 但直线 $x - y - 1 = 0$ 与 $-x + y + 1 = 0$ 重合, 必要性不成立. 故选 A.

(2) 当三条直线交于一点时, 可将平面分为六个部分, 由 $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0, \\ x - 2 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \end{cases}$ 将 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases}$ 代入 $l_3: x + ky = 0$ 中, 得 $2k + 2 = 0$, 解得 $k = -1$. 当 $l_3: x + ky = 0$ 与 $l_1: x - 2y + 2 = 0$ 平行时, 三条直线可将平面分为六个部分, 此时 $k = -2$; 当 $l_3: x + ky = 0$ 与 $l_2: x - 2 = 0$ 平行时, 三条直线可将平面分为六个部分, 此时 $k = 0$. 综上, 满足条件的 k 的值共有 3 个. 故选 C.

(3) 直线 $x - 2y + 4 = 0$ 与 y 轴的交点为 $C(0, 2)$, 点 $A(2, 3), B(3, 1)$, 则直线 AB 的斜率 $k = \frac{3 - 1}{2 - 3} = -2$, 所以 AB 边上的

高 CE 所在直线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以高 CE 所在直线的方程为 $x - 2y + 4 = 0$.

例 2 [思路点拨] (1) 直线 $3x + my - 3 = 0$ 过定点 $(1, 0)$, 计算定点到直线 $6x + 4y + 1 = 0$ 的距离即可. (2) 求出过原点且与已知直线垂直的直线方程, 与已知方程联立求解即可.

(1) D (2) (1, 2) [解析] (1) 直线 $3x + my - 3 = 0$ 过定点 $(1, 0)$, 则直线 $3x + my - 3 = 0$ 到直线 $6x + 4y + 1 = 0$ 的距离即为点 $(1, 0)$ 到直线 $6x + 4y + 1 = 0$ 的距离, 故所求距离 $d = \frac{|6 \times 1 + 4 \times 0 + 1|}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{52}} = \frac{7\sqrt{13}}{26}$. 故选 D.

(2) 当 OP 垂直于直线 $x + 2y - 5 = 0$ 时, $|OP|$ 取得最小值, 此时 $k_{OP} = 2$, 则 OP 所在直线的方程为 $y = 2x$. 由 $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ y = 2x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ 即 $P(1, 2)$.

变式题 (1) B (2) $y = 2$ 或 $4x - 3y + 2 = 0$ [解析] (1) 由 $y = k(x + 1)$, 可得直线过定点 $(-1, 0)$, 易知当点 $(-1, 0)$ 与 $(0, -1)$ 的连线与直线 $y = k(x + 1)$ 垂直时, 所求距离最大, 所以点 $(0, -1)$ 到直线 $y = k(x + 1)$ 的距离的最大值为 $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. 故选 B.

(2) 由 $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 2x + 3y - 8 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ $\therefore l_1$ 与 l_2 的交点为 $(1, 2)$. 当所求直线的斜率不存在时, 其方程为 $x = 1$, 点 $P(0, 4)$ 到该直线的距离为 1, 不满足题意, $\therefore$ 所求直线的斜率存在. 设所求直线的方程为 $y - 2 = k(x - 1)$, 即 $kx - y + 2 - k = 0$, $\therefore$ 点 $P(0, 4)$ 到所求直线的距离为 2, $\therefore 2 = \frac{|-2 - k|}{\sqrt{1 + k^2}}$, 解得 $k = 0$ 或 $k = \frac{4}{3}$, $\therefore$ 所求直线的方程为 $y = 2$ 或 $4x - 3y + 2 = 0$.

例 3 [思路点拨] (1) 设出直线关于点对称的直线上的点, 再根据点关于点对称的关系求解. (2) 设出 A 点的坐标, 根据中点坐标公式求出 B 点坐标, 代入直线 l_2 的方程中, 解方程求得 A 点坐标, 利用截距式求出直线 l 的方程.

(1) $2x - 3y - 9 = 0$ (2) $x + 4y - 4 = 0$ [解析] (1) 设直线 l 关于点 $A(-1, -2)$ 对称的直线 m 上的任意一点为 $N(x, y)$, 则 $N(x, y)$ 关于点 $A(-1, -2)$ 的对称点为 $N'(-2 - x, -4 - y)$, $\therefore N'(-2 - x, -4 - y)$ 在直线 $l: 2x - 3y + 1 = 0$ 上, 则 $2(-2 - x) - 3(-4 - y) + 1 = 0$, 可得直线 m 的方程为 $2x - 3y - 9 = 0$.

(2) 设 $A(a, 8 - 2a)$, 由题意知, 点 A 关于点 P 的对称点 $B(-a, 2a - 6)$ 在直线 l_2 上, 则 $-a - 3(2a - 6) + 10 = 0$, 解得 $a = 4$, 即点 $A(4, 0)$ 在直线 l 上, 由截距式得直线 l 的方程为 $\frac{x}{4} + y = 1$, 即 $x + 4y - 4 = 0$.

例 4 [思路点拨] (1) 易知点 $A(-3, 5), B(2, 8)$ 在直线 $x - y + 1 = 0$ 的同侧, 求出点 A 关于直线 $x - y + 1 = 0$ 的对称点为 $C(4, -2)$, 则 $|PA| + |PB|$ 的最小值为 $|BC|$, 即得结果. (2) 首先建立平面直角坐标系, 设点 P 的坐标为 $(t, 0)$, 分别求出点 P 关于直线 BC 与 y 轴的对称点 P_1, P_2 的坐标, 进而求出直线 P_1P_2 的方程, 再由 A, B, C 的坐标求出 $\triangle ABC$ 的重心的坐标, 进而求出 t 的值, 最后得到线段 AP 的长度.

(1) D (2) $\frac{4}{3}$ [解析] (1) 易知点 $A(-3, 5), B(2, 8)$ 在直线 $x - y + 1 = 0$ 的同侧, 设点 A 关于直线 $x - y + 1 = 0$ 的对称点为 $C(a, b)$, 则 $\begin{cases} \frac{a - 3}{2} - \frac{5 + b}{2} + 1 = 0, \\ \frac{b - 5}{a + 3} = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 4, \\ b = -2, \end{cases}$ $\therefore C(4, -2)$. 连接 BC , 则

$|PA| + |PB|$ 的最小值为 $|BC| = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-8)^2} = 2\sqrt{26}$. 故选 D.

(2) 以 A 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴, AC 所在直线为 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 由题意可知 $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $A(0, 0)$.

则直线 BC 的方程为 $x + y - 4 = 0$. 设 $P(t, 0)$ ($0 < t < 4$), 可得点 P 关于直线 BC 的对称点 P_1 的坐标为 $(4, 4-t)$, 点 P 关于 y 轴的对称点 P_2 的坐标为 $(-t, 0)$. 根据反射定律可知 P_1, P_2 连线所在直线就是光线 RQ 所在的直线. 由 P_1, P_2 两点的坐标可得直线 P_1P_2 的方程为 $y = \frac{4-t}{4+t} \cdot (x+t)$. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G, 易知 $G(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. 因为重心 $G(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ 在光线 RQ 上, 所以 $\frac{4}{3} = \frac{4-t}{4+t} \cdot (\frac{4}{3} + t)$. 可得 $t = \frac{4}{3}$, 即 $|AP| = \frac{4}{3}$.

变式题 (1) D (2) $9x - 46y + 102 = 0$

[解析] (1) 由题意得 $k = \tan 135^\circ = -1$. 设点 $(2, 4)$ 关于直线 $l: y = -x + 1$ 的对称点为 (m, n) , 则

$$\begin{cases} \frac{n-4}{m-2} = 1, \\ \frac{n+4}{2} = -\frac{m+2}{2} + 1, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m = -3, \\ n = -1. \end{cases}$ 所以反射光线所在直线的

方程为 $y = \frac{0-(-1)}{5-(-3)} \cdot (x-5) = \frac{1}{8}(x-5)$. 当 $x = 13$ 时, $y = 1$; 当 $x = 14$ 时, $y = \frac{9}{8}$. 所以反射光线还经过点 $(13, 1)$ 和 $(14, \frac{9}{8})$. 故选 D.

(2) 在直线 m 上取一点 $M(2, 0)$, 则点 $M(2, 0)$ 关于直线 l 的对称点 M' 必在直线 m' 上. 设 $M'(a, b)$,

$$\begin{cases} 2 \times \frac{a+2}{2} - 3 \times \frac{b+0}{2} + 1 = 0, \\ \frac{b-0}{a-2} \times \frac{2}{3} = -1, \end{cases} \text{ 可得 } M'(\frac{6}{13}, \frac{30}{13}).$$

设直线 m 与直线 l 的交点为 N, 由 $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 6 = 0, \end{cases}$ 得 $N(4, 3)$. 因为直线 m' 经过点 $N(4, 3)$, 所以由两点式得直线 m' 的方程为 $9x - 46y + 102 = 0$.

例 5 **[思路点拨]** (1) 思路一: 由所求的直线与直线 $3x + 2y - 5 = 0$ 垂直, 设出直线的方程, 再将点 $P(1, -2)$ 的坐标代入直线方程, 求出参数可得答案; 思路二: 先结合垂直关系求出直线斜率, 然后根据点斜式即可得答案. (2) 思路一: 求出两直线的交点, 根据平行关系设出直线方程, 将交点坐标代入即可; 思路二: 设出过两直线的交点的直线系方程, 根据所求直线与 l_3 的位置关系结合斜率列方程求解即可.

(1) $2x - 3y - 8 = 0$ (2) $x - y + 4 = 0$

[解析] (1) 方法一: 由题意, 所求的直线与直线 $3x + 2y - 5 = 0$ 垂直, 可设所求直线的方程为 $2x - 3y + m = 0$, 又直线过点 $P(1, -2)$, 则 $2 \times 1 + 3 \times (-2) + m = 0$, 解得 $m = -8$, 所以过点 $P(1, -2)$ 且与直线 $3x + 2y - 5 = 0$ 垂直的直线方程是 $2x - 3y - 8 = 0$.

方法二: 因为直线 $3x + 2y - 5 = 0$ 的斜率 $k = -\frac{3}{2}$, 所以过点 $P(1, -2)$ 且与直线 $3x + 2y - 5 = 0$ 垂直的直线方程为 $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$, 化简得 $2x - 3y - 8 = 0$.

(2) 方法一: 由 $\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0, \\ 2x + y + 2 = 0, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x = -2, \\ y = 2, \end{cases}$ 由平行关系可设直线 l_4 的方程为 $x - y + c = 0$, 其中 $c \neq -1$, 将 $(-2, 2)$ 代入 l_4 的方程可得 $c = 4$, $\therefore$ 直线 l_4 的方程为 $x - y + 4 = 0$.

方法二: 由题意可设直线 l_4 的方程为 $(3x + 4y - 2) + \lambda(2x + y + 2) = 0$, 即 $(2\lambda + 3)x + (4 + \lambda)y - 2 + 2\lambda = 0$ ①, 因为直线 l_4 与直线 $l_3: x - y - 1 = 0$ 平行, 所以

$$\frac{-(2\lambda + 3)}{4 + \lambda} = \frac{-1}{-1}, \text{ 解得 } \lambda = -\frac{7}{3}, \text{ 代入 ① 式得直线 } l_4 \text{ 的方程为 } -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y - \frac{20}{3} = 0, \text{ 化简得 } x - y + 4 = 0.$$

变式题 1 $4x - 3y + 9 = 0$ **[解析]** 方法一:

$$\text{由 } \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ x - 3y + 4 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -\frac{5}{3}, \\ y = \frac{7}{9}, \end{cases} \text{ 即直}$$

线 $2x + 3y + 1 = 0$ 与 $x - 3y + 4 = 0$ 的交点坐标为 $(-\frac{5}{3}, \frac{7}{9})$. 因为直线 l 与直线 $3x + 4y - 7 = 0$ 垂直, 所以直线 l 的斜率 $k = \frac{4}{3}$, 由点斜式得直线 l 的方程为 $y - \frac{7}{9} = \frac{4}{3}(x + \frac{5}{3})$, 即 $4x - 3y + 9 = 0$.

方法二: 由题可设直线 l 的方程为 $4x - 3y + m = 0$, 由 $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ x - 3y + 4 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{5}{3}, \\ y = \frac{7}{9}, \end{cases}$ 代入 $4x - 3y + m = 0$, 可得

$$m = 9, \text{ 故直线 } l \text{ 的方程为 } 4x - 3y + 9 = 0.$$

方法三: 由题意可设直线 l 的方程为 $(2x + 3y + 1) + \lambda(x - 3y + 4) = 0$, 即 $(2 + \lambda)x + (3 - 3\lambda)y + 1 + 4\lambda = 0$ ①, 因为直线 l 与直线 $3x + 4y - 7 = 0$ 垂直, 所以 $3(2 + \lambda) + 4(3 - 3\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 2$, 代入 ① 式得直线 l 的方程为 $4x - 3y + 9 = 0$.

变式题 2 C **[解析]** 由图可知, 原点到直线

的距离为定值. 对于 A, 原点到直线

$$x + y \sin \theta - 3 = 0 \text{ 的距离为 } \frac{|-3|}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}},$$

不是定值, 故 A 错误; 对于 B, 原点到直线 $x \cos \theta + y + 3 \sin \theta = 0$ 的距离为 $\frac{|3 \sin \theta|}{\sqrt{\cos^2 \theta + 1}}$, 不是定值, 故 B 错误; 对于

C, 原点到直线 $x \cos \theta + y \sin \theta - 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|-2|}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = 2$, 是定值, 故 C

正确; 对于 D, 原点到直线 $x \cos \theta + y - 3 = 0$ 的距离为 $\frac{|-3|}{\sqrt{\cos^2 \theta + 1}}$, 不是定值, 故

D 错误. 故选 C.

第 51 讲 圆的方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

$$1. (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (a, b) \quad r$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$2. (1) (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$$

$$(2) (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

$$(3) (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$$

【对点演练】

1. (1, 2) 1 **[解析]** 由 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, 得 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 所以圆心坐标为 $(1, 2)$, 半径为 1.

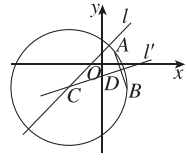
2. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ **[解析]** $\because P(1, 1)$ 为圆心, 且圆 P 经过原点, $\therefore$ 半径 $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\therefore$ 所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 化为一般方程, 可得 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

3. $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ **[解析]** 方法一: 设圆心 C 的坐标为 (a, b) . 因为圆心 C 在直线 $l: x - y + 1 = 0$ 上, 所以 $a - b +$

$1 = 0$ ①. 因为 A, B 是圆上两点, 所以 $|CA| = |CB|$, 根据两点间的距离公式, 有 $\sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} =$

$\sqrt{(a-2)^2 + (b+2)^2}$, 即 $a - 3b - 3 = 0$ ②. 由 ①② 可得 $a = -3, b = -2$, 所以圆心 C 的坐标是 $(-3, -2)$, 圆的半径 $r = |AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = 5$, 所以所求圆的标准方程是 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

方法二: 如图, 设线段 AB 的中点为 D. 由 A, B 两点的坐标分别为 $(1, 1), (2, -2)$, 可得点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, 直线



AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{-2-1}{2-1} = -3$, 因此线段

AB 的垂直平分线 l' 的方程是 $y + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})$, 即 $x - 3y - 3 = 0$. 由垂径定理可知, 圆心 C 也在线段 AB 的垂直平分线上, 由 $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -3, \\ y = -2, \end{cases}$ 所以圆心 C 的坐标是 $(-3, -2)$, 圆的半径 $r = |AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = 5$, 所以所求圆的标准方程是 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

4. $(-3, -2) \cup (2, +\infty)$ **[解析]** 由题意

得 $\begin{cases} m^2 + (-2)^2 - 8 > 0, \\ 1^2 + 2^2 + m - 2 \times 2 + 2 > 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < m < -2$ 或 $m > 2$, 故实数 m 的取值范围为 $(-3, -2) \cup (2, +\infty)$.

5. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ 或 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ **[解析]** 由题意知圆心的坐标为 $(2, -2)$ 或 $(-2, 2)$, 所以圆的方程为 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ 或 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

6. -4 **[解析]** 因为点 $P(x, y)$ 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 所以 $x^2 + 4y = 1 - y^2 + 4y = -(y-2)^2 + 5$. 因为 $y \in [-1, 1]$, 所以当 $y = -1$ 时, $x^2 + 4y$ 取得最小值 -4 .

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1) 思路一: 根据圆心 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上, 设出圆心 M 的坐标, 利用圆上的点到圆心的距离相等构造关于点 M 的坐标的方程求解; 思路二: 利用圆心在弦的垂直平分线上求解. (2) 选其中的三点, 利用待定系数法即可求出圆的方程.

$$(1) (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5 \quad (2) x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \quad (\text{或 } x^2 + y^2 - 4x - 2y =$$

$$0 \text{ 或 } x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}y = 0 \text{ 或 } x^2 +$$

$$y^2 - \frac{16}{5}x - 2y - \frac{16}{5} = 0) \quad \text{[解析]} (1) \text{ 方}$$

法一: $\because$ 点 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上, $\therefore$ 可设点 M 为 $(a, 1-2a)$, 又点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在 $\odot M$ 上, $\therefore$ 点 M 到点 $(3, 0), (0, 1)$ 的距离相等, $\therefore \sqrt{(a-3)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{a^2 + (-2a)^2}$, 即 $a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 = 5a^2$, 解得 $a = 1$, $\therefore M(1, -1)$, $\odot M$ 的半径 $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, $\therefore \odot M$ 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$.

方法二: 由题意可知, M 是以 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 为端点的线段的垂直平分线 $y = 3x - 4$ 与直线 $2x + y - 1 = 0$ 的交点, 即 $M(1, -1)$, 则 $\odot M$ 的半径 $R = \sqrt{5}$, 故 $\odot M$ 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$.

(2) 若选 $(0, 0), (4, 0), (-1, 1)$ 三点, 设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 把这三点的坐标分别代入可得 $\begin{cases} F = 0, \\ 4^2 + 4D + F = 0, \\ (-1)^2 + 1^2 - D + E + F = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} F = 0, \\ D = -4, \\ E = -6, \end{cases}$ 所以圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$.

同理,若选 $(0,0), (4,0), (4,2)$ 三点,则圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$.若选 $(0,0), (-1,1), (4,2)$ 三点,则圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$.若选 $(4,0), (-1,1), (4,2)$ 三点,则圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$.所以满足条件的圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6y=0$ (或 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 或 $x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$ 或 $x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$).

变式题 (1) $x^2+y^2-2x-4y=0$

(2) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

[解析] (1)方法一:设圆C的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 (D^2+E^2-4F>0)$,因为圆C过点 $O(0,0), A(2,0), B(0,4)$,所以

$$\begin{cases} F=0, \\ 4+2D+F=0, \\ 16+4E+F=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D=-2, \\ E=-4, \end{cases} \text{所以圆C的一般方程为 } x^2+y^2-2x-4y=0.$$

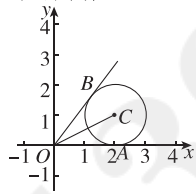
方法二:已知圆C过点 $O(0,0), A(2,0), B(0,4)$,则AB为圆C的直径,故圆心C的坐标为 $(1,2)$,圆C的半径 $r=\sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$,故圆C的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$,即 $x^2+y^2-2x-4y=0$.

(2) $\because$ 点 $A(2,-1)$ 在直线 $x+y=1$ 上, $\therefore$ 圆与直线 $x+y=1$ 相切于点A,设圆心为S,则 $k_{SA}=1$, $\therefore$ 直线SA的方程为 $y+1=x-2$,即 $y=x-3$,与 $y=-2x$ 联立,解得 $x=1, y=-2$,即圆心为 $S(1,-2)$, $\therefore$ 半径 $r=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{2}$,故所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

例2 **[思路点拨]** 根据 $\frac{y}{x}$ 的几何意义,结合

图形可求得 $\frac{y}{x}$ 的最值,由此判断A,B;根据 x^2+y^2 的几何意义求其最值,即可判断C;利用三角换元,结合正弦函数的性质求 $x+y$ 的最大值,即可判断D.

ABD **[解析]** 由实数 x, y 满足方程 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$,可得点 (x, y) 在圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上,设圆心为C,作出圆C如图所示. $\frac{y}{x}$ 表示点 (x, y)



与坐标原点O连线的斜率,设过坐标原点的圆的切线方程为 $y=kx$,则 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{y}{x} \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

所以 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{4}{3}, \left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=0$,故A,B

正确; x^2+y^2 表示圆上的点 (x, y) 到坐标原点的距离的平方,圆上的点 (x, y) 到坐标原点的距离的最大值为 $|OC|+1$,所以 x^2+y^2 的最大值为 $(|OC|+1)^2$,又 $|OC|=\sqrt{2^2+1^2}$,所以 x^2+y^2 的最大值为 $6+2\sqrt{5}$,故C错误;因为 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$,所以可设 $x=2+\cos\theta, y=1+\sin\theta$,则 $x+y=2+\cos\theta+1+\sin\theta=3+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $x+y$ 的最大值为

$3+\sqrt{2}$,故D正确.故选ABD.

变式题 解:将方程 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 变形可得 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$,则点 (x, y) 是以点 $C(4,3)$ 为圆心,2为半

径的圆上任意一点.

(1)根据题意,当 $x \neq 3$ 时, $p=\frac{y+1}{x-3}$ 的几何意义为圆上任意一点与点 $(3,-1)$ 连线的斜率.设 $Q(3,-1)$,过点Q的圆C的切线斜率为 k ,则切线方程为 $y+1=k(x-3)$,即 $kx-y-3k-1=0$,则点C到切线的距离 $d=\frac{|4k-3-3k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,

解得 $k=\frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{3}$,故 p 的取值范围为

$$\left(-\infty, \frac{-4-2\sqrt{13}}{3}\right] \cup \left[\frac{-4+2\sqrt{13}}{3}, +\infty\right).$$

(2)由 $s=2x-y$,得 $2x-y-s=0$,该方程表示一条直线,易知当直线与圆相切时, s 取得最大值和最小值.当直线与圆相切时, $\frac{|5-s|}{\sqrt{1+4}}=2$,解得 $s=5-2\sqrt{5}$ 或 $s=5+2\sqrt{5}$,则 s 的最小值为 $5-2\sqrt{5}$,最大值为 $5+2\sqrt{5}$.

(3) $w=x^2+y^2-10x+2y+26=(x-5)^2+(y+1)^2$,设 $t=\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$,则 t 的几何意义为圆C上任意一点与点 $(5,-1)$ 间的距离,设 $N(5,-1)$,则 $|CN|=\sqrt{17}$,则有 $\sqrt{17}-2 \leq t \leq \sqrt{17}+2$,所以 $21-4\sqrt{17} \leq w \leq 21+4\sqrt{17}$,故 w 的取值范围为 $[21-4\sqrt{17}, 21+4\sqrt{17}]$.

例3 **[思路点拨]** (1)思路一:设 $P(3+\cos\theta, 4+\sin\theta)$,根据题中条件及辅助角公式可得 m 的最大值;思路二:根据圆心C到原点O $(0,0)$ 的距离为5,可得圆C上的点到原点O的距离的最大值为6,再由 $\angle APB=90^\circ$,可得 $|OP|=m$,可得 $m \leq 6$,从而得到答案.(2)先求出向量的坐标表示,再利用向量数量积的坐标公式及圆的方程求解.

(1)B (2)12 **[解析]** (1)方法一:设点P的坐标为 (x_0, y_0) , $\because$ 点P在圆C: $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上, $\therefore$ 可设 $\begin{cases} x_0=3+\cos\theta, \\ y_0=4+\sin\theta. \end{cases} \therefore \angle APB=90^\circ, \therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=0$,可得 $(x_0+m)(x_0-m)+y_0^2=0$, $\therefore m^2=x_0^2+y_0^2=26+6\cos\theta+8\sin\theta=26+10\sin(\theta+\varphi)$ ($\tan\varphi=\frac{3}{4}$), $\therefore 4 \leq$

$m \leq 6, \therefore m$ 的最大值为6.故选B.方法二:设O为坐标原点,连接OP,OC,在Rt△APB中,原点O为斜边AB的中点, $|AB|=2m (m>0), \therefore m=|OP| \leq |OC|+r$ (r为圆C的半径),又 $C(3,4), r=1, \therefore |OP| \leq 6$,即 $m \leq 6$.故选B.

(2)由题意知 $\overrightarrow{PA}=(2-x, -y), \overrightarrow{PB}=(-2-x, -y)$,所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=x^2+y^2-4$,又点P (x, y) 是圆上的点,故其坐标满足方程 $x^2+(y-3)^2=1$,故 $x^2=-(y-3)^2+1$,所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=-(y-3)^2+1+y^2-4=6y-12$.由圆的方程 $x^2+(y-3)^2=1$,易知 $2 \leq y \leq 4$,故当 $y=4$ 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 取得最大值,最大值为 $6 \times 4 - 12 = 12$.

变式题 B **[解析]** 方法一:易得 $|PA|^2+|PB|^2=4$,可得 $\left(\frac{|PA|+|PB|}{2}\right)^2 \leq$

$$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=2, \text{当且仅当 } |PA|=|PB|=\sqrt{2} \text{ 时取等号,所以 } |PA|+|PB| \leq 2\sqrt{2}. \text{ 故选B.}$$

方法二:当P与A或B重合时, $|PA|+|PB|=2$;当P不与A和B重合时,易得 $|PA|^2+|PB|^2=4$,设 $\angle PAB=\theta (0<$

$$\theta < \frac{\pi}{2}), |PA|=2\cos\theta, |PB|=2\sin\theta,$$

$$\text{则 } |PA|+|PB|=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以 } (|PA|+|PB|)_{\max}=2\sqrt{2}.$$

$|PB|)_{\max}=2\sqrt{2}$. 故选B.

例4 **[思路点拨]** (1)设动点P的坐标为 (x_1, y_1) ,根据已知条件建立方程,化简求解;(2)利用相关点法求解.

解: (1)设动点P的坐标为 (x_1, y_1) ,因为 $M(1,0), N(2,0)$,且 $|PN|=\sqrt{2}|PM|$,所以 $\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$,整理得 $x_1^2+y_1^2=2$,所以动点P的轨迹C的方程为 $x^2+y^2=2$.

(2)设点Q的坐标为 (x, y) ,点A的坐标为 (x_0, y_0) ,因为Q是线段AB上靠近点B的三等分点,所以 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QB}$,即 $(x-x_0, y-y_0)=2(6-x, -y)$,解得 $\begin{cases} x_0=3x-12, \\ y_0=3y, \end{cases}$ 又点A在轨迹C上运动,所以 $(3x-12)^2+(3y)^2=2$,化简得 $y^2+(x-4)^2=\frac{2}{9}$,所以点Q的轨迹方程为 $y^2+(x-4)^2=\frac{2}{9}$.

变式题 (1)BCD **[解析]** 设 $P(x, y)$,由条件可得 $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,即 $x^2+y^2-8x=0$,所以C的方程为 $(x-4)^2+y^2=16$,故A错误;由对称性可知存在 $D(12,0), E(6,0)$ 满足条件,故B正确;

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO}=(-4-x, -y) \cdot (-x, -y)=x^2+4x+y^2=12x, \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PO}=(2-x, -y) \cdot (-x, -y)=x^2-2x+y^2=6x, |\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(-4-x)^2+(-y)^2}=4\sqrt{x+1}, |\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(2-x)^2+(-y)^2}=2\sqrt{x+1}$,所以 $\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PO}|}=\frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PO}|}$,

即 $\cos\angle APO=\cos\angle BPO$,所以 $\angle APO=\angle BPO$,故C正确;连接BQ,则 $k_{BQ}=-\frac{1}{3}$,所以线段BQ的垂直平分线l的斜率 $k=\frac{1}{3}$,BQ的中点坐标为 $(1,3)$,则线段BQ的垂直平分线l的方程为 $y-3=\frac{1}{3}(x-1)$,即 $x-3y+8=0$,圆C的圆心

$(4,0)$ 到直线l的距离 $d=\frac{12}{\sqrt{10}}<4$,所以

直线l与圆C相交,故在C上存在点M,使得 $|MQ|=|MB|$,故D正确.故选BCD.

(2)解:①设线段AP的中点为 $M(x, y)$,由中点坐标公式可知,P点坐标为 $(2x-2, 2y)$.因为P点在圆 $x^2+y^2=4$ 上,所以 $(2x-2)^2+(2y)^2=4$,故线段AP中点的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.

②设线段PQ的中点为 $N(x, y)$,连接BN,在Rt△PBQ中, $|PN|=|BN|$,设O为坐标原点,连接ON,OP,则 $ON \perp PQ$,所以 $|OP|^2=|ON|^2+|PN|^2=|ON|^2+|BN|^2$,所以 $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$,故线段PQ中点的轨迹方程为 $x^2+y^2-x-y-1=0$.

第52讲 直线与圆、圆与圆的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- $< > > = <$
- $d>R+r \quad d=R+r \quad R-r< d < R+r$
 $d=R-r \quad d < R-r$

【点对演练】

- 相交 **[解析]** 圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=x+1$,即直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,所以直线与圆相交.
- $\sqrt{10}$ **[解析]** 方法一:由 $\begin{cases} 3x+y-6=0, \\ x^2+y^2-2y-4=0, \end{cases}$ 消去y,得 $x^2-3x+2=0$,解得 $x_1=1, x_2=2$,所以直线l与圆C相交,有两个公共点.设两个公共点分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,把 $x_1=1, x_2=2$ 分别代入

$3x+y-6=0$, 得 $y_1=3, y_2=0$, 所以直线 l 与圆 C 的两个公共点分别为 $A(1,3), B(2,0)$, 则 $|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$.
方法二: 圆 $C: x^2+y^2-2y-4=0$ 的圆心为 $C(0,1)$, 半径 $r=\sqrt{5}$, 因为圆心 C 到直线 $l: 3x+y-6=0$ 的距离 $d=\frac{|1-6|}{\sqrt{9+1}}=$

$\frac{5}{\sqrt{10}}$, 所以直线 l 被圆 C 截得的弦长为

$$2 \times \sqrt{5 - \frac{25}{10}} = \sqrt{10}.$$

3. $x+\sqrt{2}y-3\sqrt{3}=0$ [解析] $\because$ 点 $A(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的一点, $\therefore (\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2=r^2$, 即 $r^2=9$. 圆 $x^2+y^2=9$ 的圆心为 $O(0,0)$, 直线 OA 的斜率 $k_{OA}=\frac{\sqrt{6}-0}{\sqrt{3}-0}=\sqrt{2}$, $\therefore$ 直线 OA 与过点 A 的圆的切线垂直, $\therefore$ 过点 A 的圆的切线的斜率是 $-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore$ 过点 A 的圆的切线方程是 $y-\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{3})$, 即

$$x+\sqrt{2}y-3\sqrt{3}=0.$$

4. $x-y+2=0$ [解析] 由 $x^2+y^2-4=0, x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 两式相减得 $4x-4y+8=0$, 即 $x-y+2=0$, 故公共弦所在直线的方程为 $x-y+2=0$.

5. $\pm 4\sqrt{2}$ 或 $\pm 2\sqrt{3}$ [解析] 两圆的圆心距 $d=\sqrt{2^2+a^2}$, 由两圆相切(外切或内切), 得 $\sqrt{2^2+a^2}=5+1$ 或 $\sqrt{2^2+a^2}=5-1$, 解得 $a=\pm 4\sqrt{2}$ 或 $a=\pm 2\sqrt{3}$.

6. $x=3$ 或 $5x+12y-39=0$ [解析] 由题意知 P 在圆外, 当切线的斜率不存在时, 切线方程为 $x=3$, 满足题意; 当切线的斜率存在时, 设斜率为 k , 则切线方程为 $y-2=k(x-3)$, 即 $kx-y+2-3k=0$, 所以 $\frac{|k \times 0 - 0 + 2 - 3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3$, 解得 $k=-\frac{5}{12}$, 所以切线方程为 $5x+12y-39=0$. 综上, 切线方程为 $x=3$ 或 $5x+12y-39=0$.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1)由圆心到直线的距离即可得直线 l 与圆 C 的位置关系. 先找出到直线 l 的距离为 1 的点的轨迹, 再判断圆 C 上到直线 l 的距离为 1 的点的个数. (2)首先求出点 A 关于直线 $y=a$ 的对称点 A' 的坐标, 即可得到直线 l 的方程, 根据圆心到直线 l 的距离小于或等于半径得到不等式, 从而得解.

(1)BD (2) $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$ [解析] (1)圆 C 的圆心为 $C(1,-1)$, 半径 $r=2$, 则圆心 $C(1,-1)$ 到直线 $l: x+y-\sqrt{2}=0$ 的距离 $d=\frac{|1-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=1<2$, 所以直线 l 与圆

C 相交, 故选项 A 错误, 选项 B 正确. 到直线 l 的距离为 1 的点的轨迹是与直线 l 平行且与直线 l 的距离为 1 的两条平行直线, 设到直线 l 的距离为 1 的直线的方程为 $x+y+c=0$, 则 $\frac{|c-(-\sqrt{2})|}{\sqrt{2}}=1$,

解得 $c=0$ 或 $c=-2\sqrt{2}$. 当 $c=0$ 时, 到直线 l 的距离为 1 的直线的方程为 $x+y=0$, 此直线过圆心 $C(1,-1)$, 所以此直线与圆 C 有两个交点; 当 $c=-2\sqrt{2}$ 时, 到直线 l 的距离为 1 的直线的方程为 $x+y-2\sqrt{2}=0$, 圆心 $C(1,-1)$ 到此直线的距离 $d_1=\frac{|1-1-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2=r$, 所以此

直线与圆 C 相切, 则此直线与圆 C 有一个交点. 综上, 圆 C 上到直线 l 的距离为 1 的点共有 3 个, 故选项 C 错误, 选项 D 正确. 故选 BD.

(2)由题意知直线 l 过点 B , 点 $A(-2,3)$

关于直线 $y=a$ 的对称点为 $A'(-2, 2a-3)$, 所以直线 l 的方程为 $y=\frac{(2a-3)-a}{-2-0}x+a$, 即 $(a-3)x+2y-2a=0$. 由题意知, 圆心 $C(-3,-2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-3(a-3)+2 \times (-2)-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+4}} \leq 1$, 整理

得 $6a^2-11a+3 \leq 0$, 解得 $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$, 故

a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

变式题 (1)B (2)ABD [解析] (1)根据题意可知, 圆 M 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$, $\therefore$ 圆心为 $M(1,0)$, 半径为 1. $\therefore$ 对直线 l 上任意一点 P , 在圆 M 上存在点 Q , 使得 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MQ}=0$, $\therefore$ 直线 l 与圆 M 相切或相离, $\therefore \frac{|k-k+2|}{\sqrt{1+k^2}} \geq 1$, 解得 $-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$. 故选 B.

(2)对于 A, $\because$ 点 A 在圆 C 上, $\therefore a^2+b^2=r^2$, $\therefore$ 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相切,

A 正确; 对于 B, $\because$ 点 A 在圆 C 内, $\therefore a^2+b^2 < r^2$, $\therefore$ 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} > r$, $\therefore$ 直线 l 与圆

C 相离, B 正确; 对于 C, $\because$ 点 A 在圆 C 外, $\therefore a^2+b^2 > r^2$, $\therefore$ 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} < r$, $\therefore$ 直线 l 与圆

C 相交, C 错误; 对于 D, $\because$ 点 A 在直线 l 上, $\therefore a^2+b^2=r^2$, $\therefore$ 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$, $\therefore$ 直线 l 与圆

C 相切, D 正确. 故选 ABD.

例2 [思路点拨] (1)求出直线 l 所过定点 P 的坐标, 并判断点 P 与圆 C 的位置关系, 进而确定 $|AB|$ 最小时直线 AB 与直线 CP 的位置关系, 即可得结果. (2)计算出圆心到直线的距离, 利用勾股定理可得出关于 m 的方程, 即可解得 m 的值.

(1)A (2)2 [解析] (1) $mx-y-3m+1=0$ 可化为 $m(x-3)-y+1=0$, $\therefore$ 直线 l 恒过点 $P(3,1)$. $\because (3-1)^2+(1-2)^2=5<25$, $\therefore$ 点 P 在圆 C 内部. 当圆心 $C(1,2)$ 与点 P 的连线与直线 AB 垂直时, 所得弦长最短, 即 $|AB|$ 最小. 由 $|CP|=\sqrt{5}$, 圆 C 的半径为 5, 得 $|AB|$ 的最小值为 $2 \times \sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$. 故选 A.

(2)圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 的圆心坐标为 $(1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$, 则圆心到直线 $x-y+m=0(m>0)$ 的距离为 $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}}=$

$\frac{m}{\sqrt{2}} < \sqrt{3}$. 由勾股定理可得 $\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = 3$, 因为 $m>0$, 所以 $m=2$, 符合题意.

变式题 (1)0 或 $\frac{4}{3}$ (2) $2\sqrt{6}$

[解析] (1)由 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 可知圆心为 $C(1,1)$, 半径为 2. 设直线与圆交于 A, B 两点, 连接 AC, BC , $\because$ 直线 $y=k(x+1)$ 截圆 $C: (x-1)^2+(y-1)^2=4$ 所得两段圆弧的弧长之比为 1:2, $\therefore \angle ACB=120^\circ$, $\therefore$ 圆心到直线的距离为半径的一半, $\therefore \frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 解得 $k=$

0 或 $k=\frac{4}{3}$.

(2)因为点 $M(3,1)$ 在圆 $C: (x-1)^2+(y+1)^2=r^2$ 内, 所以 $(3-1)^2+(1+1)^2 < r^2$, 又 $r>0$, 可得 $r>2\sqrt{2}$. 当过点 M 的直线被圆 C 截得的弦长最短时, 该

直线垂直于点 M 与圆心 C 的连线, 即圆心到直线的距离为 $|CM|$. 因为 $C(1,-1)$, $M(3,1)$, 所以 $|CM|=2\sqrt{2}$, 由 $8=2\sqrt{r^2-|CM|^2}=2\sqrt{r^2-8}$, 可得 $r=2\sqrt{6}$.

例3 [思路点拨] (1)分切线的斜率存在与不存在两种情况讨论, 利用圆心到切线的距离等于半径, 求解即可. (2)思路一: 设圆心为 C , 切点分别为 A, B , 求出 $|PC|$, 在 $Rt\triangle PAC$ 中, 求出 $|PA|$, 进而得到 $\sin \angle APC$ 与 $\cos \angle APC$, 结合 $\angle APB=2\angle APC$ 得到 $\sin \angle APB, \cos \angle APB$, 得出 α 与 $\angle APB$ 的关系, 即可求得 $\sin \alpha$; 思路二: 设圆心为 C , 切点分别为 A, B , 求出 $|PC|$, 进而得到 $|PA|, |PB|$, 在 $\triangle APB$ 与 $\triangle ACB$ 中, 根据余弦定理及 $\angle ACB=\pi-\angle APB$ 得到 $\cos \angle APB$, 从而得到 α 与 $\angle APB$ 的关系, 即可求得 $\sin \alpha$; 思路三: 判断切线的斜率存在, 设切线方程为 $y=kx-2$, 根据直线与圆相切得到关于 k 的方程, 设两切线的斜率分别为 k_1, k_2 , 根据根与系数的关系及 $\tan \alpha$ 与 k_1, k_2 的关系, 结合 $\alpha \in (0, \pi)$, 即可求得 $\sin \alpha$.

(1) $x=0$ 或 $3x+4y=0$ (2)B

[解析] (1)圆 $C: (x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径 $r=2$. 当切线的斜率不存在时, 易知切线方程是 $x=0$, 满足题意; 当切线的斜率存在时, 设斜率为 k , 则切线的方程为 $y=kx$, 所以 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=$

2, 解得 $k=-\frac{3}{4}$, 所以切线方程为 $3x+4y=0$. 故所求直线的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$.

(2)方法一: 由 $x^2+y^2-4x-1=0$, 即 $(x-2)^2+y^2=5$, 可得圆心为 $C(2,0)$, 半径 $r=\sqrt{5}$, 过点 $P(0,-2)$ 作圆 C 的切线, 设切点分别为 A, B , 连接 PC, AC . 因为 $|PC|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, 所以 $|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$, 可得 $\sin \angle APC=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\cos \angle APC=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$, 则 $\sin \angle APB=\sin 2\angle APC=$

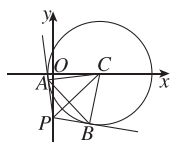
$2\sin \angle APC \cos \angle APC=2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \angle APB=\cos 2\angle APC=$

$\cos^2 \angle APC - \sin^2 \angle APC = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0$, 即 $\angle APB$ 为钝角, 所以 $\sin \alpha = \sin(\pi - \angle APB) = \sin \angle APB = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

方法二: 圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心为 $C(2,0)$, 半径 $r=\sqrt{5}$, 过点 $P(0,-2)$ 作圆 C 的切线, 设切点分别为 A, B , 如图, 连接 AB , PC, AC, BC , 可得 $|PC|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, 则 $|PA|=|PB|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$. 因为 $|PA|^2+|PB|^2-2|PA| \cdot |PB| \cos \angle APB = |CA|^2+|CB|^2-2|CA| \cdot |CB| \cos \angle ACB$ 且 $\angle ACB=\pi-\angle APB$, 所以 $3+3-6\cos \angle APB=5+5-10\cos(\pi-\angle APB)$, 即 $3-3\cos \angle APB=5+5\cos \angle APB$, 解得

$\cos \angle APB=-\frac{1}{4} < 0$, 即 $\angle APB$ 为钝角, 则 $\cos \alpha = \cos(\pi - \angle APB) = -\cos \angle APB = \frac{1}{4}$, 且 α 为锐角, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

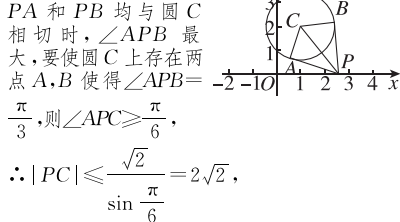
方法三: 圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心为 $C(2,0)$, 半径 $r=\sqrt{5}$. 若切线斜率不存在, 则切线方程为 $x=0$, 此时切点为 $A(0,2), B(0,-2)$, 连接 AB , 则 $\angle APB=90^\circ$, 即 $\alpha=90^\circ$, $\sin \alpha=1$. 若切线斜率存在, 设切线方程为 $y=kx-2$, 则切点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 连接 AB , 则 $\angle APB=2\angle APC$, 由 (1) 可知 $\sin \angle APC=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\cos \angle APC=\frac{\sqrt{6}}{4}$, 则 $\sin \angle APB=2\sin \angle APC \cos \angle APC=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \angle APB=2\cos \angle APC \cos \angle APC-\sin^2 \angle APC=-\frac{1}{4}$, 即 $\angle APB$ 为钝角, 所以 $\sin \alpha = \sin(\pi - \angle APB) = \sin \angle APB = \frac{\sqrt{15}}{4}$.



则切线方程为 $x=0$, 则圆心到切线的距离 $d=2 < r$, 不合题意, 故切线的斜率存在. 设切线方程为 $y=kx-2$, 即 $kx-y-2=0$, 则 $\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$, 整理得 $k^2+8k+1=0$, 且 $\Delta=64-4=60>0$. 设两切线的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1+k_2=-8, k_1k_2=1$, 可得 $|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=\sqrt{64-4}=\sqrt{60}$, 所以 $\tan \alpha=\frac{|k_1-k_2|}{1+k_1k_2}=\frac{\sqrt{60}}{2}$, 即 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=\frac{\sqrt{15}}{2}$, 可得 $\cos \alpha=\frac{2}{\sqrt{15}}$, 则 $\sin^2 \alpha+\cos^2 \alpha=\sin^2 \alpha+\frac{4}{15}=1$, 因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha > 0$, 故 $\sin \alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 故选 B.

变式题 (1)B (2)C

解析 (1)如图, 当 PA 和 PB 均与圆 C 相切时, $\angle APB$ 最大, 要使圆 C 上存在两点 A, B 使得 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$, 则 $\angle APC \geq \frac{\pi}{6}$.



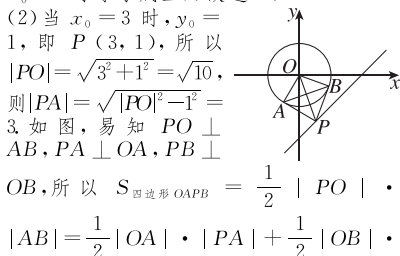
$\therefore |PC| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}$, 即 $\sqrt{(x_0-1)^2+(0-2)^2} \leq 2\sqrt{2}$, 解得 $-1 \leq x_0 \leq 3$. 故选 B.

(2)方法一: 由题意知圆 $C: x^2+(y-2)^2=16$ 的圆心 $C(0, 2)$ 在直线 $ax+by-12=0$ 上, 所以 $2b-12=0$, 解得 $b=6$. 设点 $P(t, -6)$, 则 $|PC|^2=t^2+(-6-2)^2=t^2+64$, 故以 PC 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{t}{2})^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}(t^2+64)$, 与方程 $x^2+(y-2)^2=16$ 相减可得直线 MN 的方程为 $-tx+8y=0$, 故直线 MN 恒过定点 $Q(0, 0)$. 故选 C.

方法二: 由题意知圆 $C: x^2+(y-2)^2=16$ 的圆心 $C(0, 2)$ 在直线 $ax+by-12=0$ 上, 所以 $2b-12=0$, 解得 $b=6$. 设点 $P(t, -6)$, 因为圆 $C: x^2+y^2-4y-12=0$, 所以直线 MN 的方程为 $tx-6y-4 \times \frac{y-6}{2}-12=0$, 即 $tx-8y=0$, 故直线 MN 恒过定点 $Q(0, 0)$. 故选 C.

例 4 **思路点拨** (1)设 $P(x_0, y_0)$, 用 x_0 表示 y_0 , 确定切线长 $|PM|$ 的表达式, 再根据二次函数求最值的方法求解即可. (2)当 $x_0=3$ 时, 可确定 y_0 , 进而在 $Rt\triangle PAO$ 中求 $|PA|$; 根据四边形 $OAPB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|PO| \cdot |AB|=\frac{1}{2}|OA| \cdot |PA|+\frac{1}{2}|OB| \cdot |PB|$, 得到 $|PO| \cdot |AB|=2\sqrt{|PO|^2-1}$, 则要使 $|PO| \cdot |AB|$ 最小, 只需 $|PO|$ 最小, 此时 PO 与直线 $x-y-2=0$ 垂直, 进而得解.

(1)A (2)3 **解析** (1)圆 $O: x^2+y^2=4$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r=2$. 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $2x_0+y_0=10$, 即 $y_0=10-2x_0$, 则 $|PM|=\sqrt{|PO|^2-2^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-4}=\sqrt{5x_0^2-40x_0+96}=\sqrt{5(x_0-4)^2+16} \geq \sqrt{16}=4$ (当且仅当 $x_0=4$ 时等号成立). 故选 A.



(2)当 $x_0=3$ 时, $y_0=1$, 即 $P(3, 1)$, 所以 $|PO|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, 则 $|PA|=\sqrt{|PO|^2-1^2}=3$. 如图, 易知 $PO \perp AB$, $PA \perp OA$, $PB \perp OB$, 所以 $S_{\text{四边形} OAPB}=\frac{1}{2}|PO| \cdot |AB|=\frac{1}{2}|OA| \cdot |PA|+\frac{1}{2}|OB| \cdot |PB|$.

$|PB|=|OA| \cdot |PA|=|PA|$, 所以 $|PO| \cdot |AB|=2|PA|=\frac{2\sqrt{|PO|^2-1}}{1}$, 当 OP 垂直于直线 $x-y-2=0$ 时, $|PO|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 此时 $|PO| \cdot |AB|$ 取得最小值 2, 且点 P 的坐标为 $(1, -1)$, 即 $x_0=1$.

变式题 (1)BD (2)D **解析** (1)圆 $M: (x+\cos \theta)^2+(y-\sin \theta)^2=1$ 恒过定点 $O(0, 0)$, 直线 $l: y=kx$ 也恒过定点 $O(0, 0)$, 故 B 正确; 圆心 $M(-\cos \theta, \sin \theta)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|k \cos \theta+\sin \theta|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|\sqrt{1+k^2} \sin(\theta+\alpha)|}{\sqrt{1+k^2}} \leq 1$ (α 为辅助角), 则直线与圆相切或相交, 故对任意实数 k , 必存在实数 θ , 使得直线与圆相交, 对任意实数 k , 必存在实数 θ , 使得直线与圆相切, 故 D 正确, A, C 错误. 故选 BD.

(2)设 $P(x_0, y_0)$, 则 $y_0^2=2x_0$, 圆 C 的圆心为 $C(4, 0)$, 半径 $r=1$. 连接 AC, BC , 由 PA, PB 分别与圆 C 相切于点 A, B , 得 $PC \perp AB, PA \perp AC$, 则 $|AB| \cdot |PC|=2S_{\text{四边形} PACB}=4S_{\triangle PAC}=2|PA| \cdot |AC|=2\sqrt{|PC|^2-1}=2\sqrt{(x_0-4)^2+y_0^2-1}=2\sqrt{x_0^2-6x_0+15}=2\sqrt{(x_0-3)^2+6} \geq 2\sqrt{6}$, 当且仅当 $x_0=3$ 时取等号, 所以 $|AB| \cdot |PC|$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$. 故选 D.

例 5 **思路点拨** 根据两点间的距离公式, 得出两圆的圆心距, 从而判断 A 选项; 分圆 O 与圆 C 内切和外切两种情况计算 a 的值, 从而判断 B 选项; 根据圆 O 与圆 C 恰有两条公切线得到两圆相交, 列式计算 a 的取值范围, 从而判断 C 选项; 当圆 O 的圆心在两圆的公共弦上时, 公共弦长有最大值, 从而判断 D 选项.

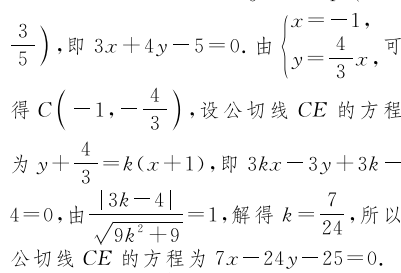
AD **解析** 根据题意, 可得圆 $O: x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r=1$, 圆 $C: (x-a)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(a, 1)$, 半径 $R=2$. 对于 A, 两圆的圆心距 $|OC|=\sqrt{a^2+1} \geq 1$, 故 A 正确. 对于 B, 当两圆内切时, 圆心距 $|OC|=R-r=1$, 即 $\sqrt{a^2+1}=1$, 解得 $a=0$; 当两圆外切时, 圆心距 $|OC|=R+r=3$, 即 $\sqrt{a^2+1}=3$, 解得 $a=\pm 2\sqrt{2}$. 综上所述, 若圆 O 与圆 C 相切, 则 $a=0$ 或 $a=\pm 2\sqrt{2}$, 故 B 不正确. 对于 C, 若圆 O 与圆 C 恰有两条公切线, 则两圆相交, 故圆心距 $|OC| \in (R-r, R+r)$, 即 $\sqrt{a^2+1} \in (1, 3)$, 即 $1 < \sqrt{a^2+1} < 3$, 解得 $-2\sqrt{2} < a < 0$ 或 $0 < a < 2\sqrt{2}$, 故 C 不正确. 对于 D, 若圆 O 与圆 C 相交, 则当圆 $O: x^2+y^2=1$ 的圆心 O 在公共弦上时, 公共弦长取到最大值, 此时公共弦长为 $2r=2$, 故 D 正确. 故选 AD.

变式题 (1)BD (2) $3x+4y-5=0$ (或 $x=-1$ 或 $7x-24y-25=0$)

解析 (1)由已知得圆 C_1 的圆心为 $C_1(0, 0)$, 半径 $r_1=3$, 圆 C_2 的圆心为 $C_2(3, 4)$, 半径 $r_2=4$, $|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$, 则 $r_2-r_1 < |C_1C_2| < r_1+r_2$, 故两圆相交, 所以 C_1 与 C_2 的公切线恰有 2 条, 故 A 错误. 两圆的方程相减得 C_1 与 C_2 公共弦所在直线的方程为 $3x+4y-9=0$, 故 B 正确. 点 C_1 到直线 $3x+4y-9=0$ 的距离为 $\frac{|-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$, 故公共弦的弦长为 $2 \times \sqrt{9-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$, 故 C 错误. 若 P, Q 分别是圆 C_1, C_2 上的动点, 则 $|PQ|_{\max}=|C_1C_2|+r_1+r_2=12$, 故 D 正确. 故选 BD.

(2)方法一: 如图, 由图易知 $x=-1$ 为公切线 CD 的方程. 设切点 $B(\cos \theta, \sin \theta)$,

则由 $A(3, 4)$ 可知 $\cos \theta=\frac{3}{5}, \sin \theta=\frac{4}{5}$, 所以 $B\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, 又 $k_{OA}=\frac{4}{3}$, 所以过点 B 的公切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$, 所以过点 B 的公切线的方程为 $y-\frac{4}{5}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{5}\right)$, 即 $3x+4y-5=0$. 由 $\begin{cases} x=-1, \\ y=\frac{4}{3}x, \end{cases}$ 可得 $C\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$, 设公切线 CE 的方程为 $y+\frac{4}{3}=k(x+1)$, 即 $3kx-3y+3k-4=0$, 由 $\frac{|3k-4|}{\sqrt{9k^2+9}}=1$, 解得 $k=\frac{7}{24}$, 所以公切线 CE 的方程为 $7x-24y-25=0$.



方法二: 显然公切线的斜率不为 0, 设公切线的方程为 $x+by+c=0$, 则 $\frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}=1$, $\frac{|3+4b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=4$, 故 $c^2=1+b^2$ ①, $|3+4b+c|=4|c|$, 所以 $3+4b+c=4c$ 或 $3+4b+c=-4c$, 再结合 ① 可得 $\begin{cases} b=0, \\ c=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=-\frac{24}{7}, \\ c=-\frac{25}{7} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=\frac{4}{3}, \\ c=-\frac{5}{3} \end{cases}$, 所以公切线有三条, 其方程分别为 $x+1=0, 7x-24y-25=0, 3x+4y-5=0$ (填一个即可).

第 53 讲 椭圆

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- 椭圆 焦点 焦距 (1) $a>c$ (2) $a=c$ (3) $a<c$
- $-a \leq x \leq a$ $-b \leq y \leq b$ $-a \leq x \leq b$ $-a \leq y \leq a$ 坐标轴 $(0, 0)$ $(-a, 0)$ $(a, 0)$ $(0, -b)$ $(0, b)$ $(0, -a)$ $(0, a)$ $(-b, 0)$ $(b, 0)$ $2a$ $2b$ $2c$ $(0, 1)$ a^2-b^2
- (1)没有 (2)一个 (3)两个
- $|y_1-y_2|$ $|x_1-x_2|$

【对点演练】

- 14 36 **解析** 根据椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$, 由 $a^2=100$, 得 $a=10$, 所以 $6+|PF_2|=20$, 故 $|PF_2|=14$. 由 $c^2=a^2-b^2=100-36=64$, 得 $c=8$, 所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=20+16=36$.
- $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ **解析** 因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, 所以 e 越大, $\frac{b}{a}$ 越小, 椭圆越扁; e 越小, $\frac{b}{a}$ 越大, 椭圆越圆. 椭圆 $9x^2+y^2=36$ 即椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$, 其离心率 $e_1=\sqrt{1-\frac{4}{36}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的离心率 $e_2=\sqrt{1-\frac{12}{16}}=\frac{1}{2}$, 因为 $e_2 < e_1$, 所以椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 更接近于圆.

3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ [解析] 设 d 是点 M 到直线 $l: x = \frac{25}{4}$ 的距离, 则由题意知 $\frac{|MF|}{d} = \frac{4}{5}$, 即 $\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\left| \frac{25}{4} - x \right|} = \frac{4}{5}$, 整理得 $9x^2 + 25y^2 = 225$, 故动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4. $\frac{4\sqrt{38}}{5}$ [解析] 由 $\begin{cases} y = x+1, \\ x^2 + 4y^2 = 16, \end{cases}$ 得 $5x^2 + 8x - 12 = 0$, 设此方程的两实根为 x_1, x_2 , 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8}{5}, \\ x_1 x_2 = -\frac{12}{5}, \end{cases}$ 故所得弦长为 $\sqrt{1+1^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{48}{5}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{304}{25}} = \frac{4\sqrt{38}}{5}$.

5. 线段 [解析] 由题意知 $|MF_1| + |MF_2| = 12$, $|F_1F_2| = 12$, 即 $|MF_1| + |MF_2| = |F_1F_2|$, 所以点 M 的轨迹是线段.

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 或 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ [解析] $\because$ 椭圆 C 的中心在原点, 其长轴长为 4, 焦距为 2, $\therefore a = 2, c = 1, \therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$. 当椭圆的焦点在 x 轴上时, C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 当椭圆的焦点在 y 轴上时, C 的方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$.

7. 1 [解析] 设 $P(x, y)$, 依题意得 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-2-x)(2-x) + y^2 = x^2 + y^2 - 4 = \frac{4}{9}x^2 + 1$, 因为 $0 \leq x^2 \leq 9$, 所以 $1 \leq \frac{4}{9}x^2 + 1 \leq 5$, 所以 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最小值是 1.

第 1 课时 椭圆及其性质

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 根据圆与圆的位置关系, 得到圆心距之间的关系, 由定义可知动点轨迹为椭圆, 求出方程即可. (2) 思路一: 根据焦点三角形的面积公式求出 $\triangle PF_1F_2$ 的面积, 进而可得点 P 的横、纵坐标的平方, 从而得出 $|OP|$ 的值; 思路二: 利用椭圆的定义以及余弦定理求出 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的值, 然后根据三角形中线定理即可得出 $|OP|$ 的值.

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ (2) B [解析] (1) 圆 $F_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $F_1(-1, 0)$, 半径 $r_1 = 1$, 圆 $F_2: (x-1)^2 + y^2 = 25$ 的圆心为 $F_2(1, 0)$, 半径 $r_2 = 5$. 设动圆 C 的圆心为 $C(x, y)$, 半径为 R , 由题得 $|F_1C| = R+1, |F_2C| = 5-R, \therefore |F_1C| + |F_2C| = 6 > |F_1F_2| = 2, \therefore$ 圆心 C 的轨迹是椭圆, 设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 则 $2a = 6, 2c = 2$, 可得 $a = 3, c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 8, \therefore$ 动圆圆心 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(2) 方法一: 设 $\angle F_1PF_2 = 2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 则 $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = b^2 \tan \theta$. 由 $\cos \angle F_1PF_2 = \cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{3}{5}$, 可得 $\tan \theta = \frac{1}{2}$. 由椭圆方

程可知 $a^2 = 9, b^2 = 6, c^2 = a^2 - b^2 = 3$, 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times |F_1F_2| \times |y_P| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times |y_P| = 6 \times \frac{1}{2}$, 所以 $y_P^2 = 3$, 则 $x_P^2 = 9 \times \left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{9}{2}$, 故 $|OP| =$

$\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{3 + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

方法二: 由题可知, $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$ ①, $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos \angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2$, 即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{6}{5}|PF_1| \cdot |PF_2| =$

12 ②, 联立 ① ②, 可得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{15}{2}$.

$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 21$, 又 $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} +$

$\overrightarrow{PF_2})$, 所以 $|OP| = |\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1} +$

$\overrightarrow{PF_2}|$, 即 $|OP| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| =$

$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2 + 2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} + |\overrightarrow{PF_2}|^2} =$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{21 + 2 \times \frac{15}{2} \times \frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

方法三: 由题可知, $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$ ①, $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 -$

$2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos \angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2$, 即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{6}{5}|PF_1| \cdot |PF_2| =$

12 ②, 联立 ① ②, 可得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 21$. 由三角形中线定理可知, $(2|OP|)^2 +$

$|F_1F_2|^2 = 2(|PF_1|^2 + |PF_2|^2) = 42$, 易

知 $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$, 解得 $|OP| = \frac{\sqrt{30}}{2}$. 故

选 B.

变式题 (1) C (2) $\sqrt{15}$ [解析] (1) 由椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 得 $a = 3, b = 2$, 则

$|MF_1| + |MF_2| = 2a = 2 \times 3 = 6$, 则

$|MF_1| \cdot |MF_2| \leq \left(\frac{|MF_1| + |MF_2|}{2}\right)^2 =$

$3^2 = 9$, 当且仅当 $|MF_1| = |MF_2| = 3$ 时等

号成立. 故选 C.

(2) 由题得 $a = 3, c = 2, F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 故以 F_1F_2 为直径的圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 圆 O 的半径为 2, 则 $|F_1O| =$

$|OA| = 2$. 因为 $OA \parallel PF_2$, 所以 $\frac{|F_1O|}{|F_1F_2|} =$

$\frac{|OA|}{|F_2P|} = \frac{1}{2}$, 所以 $|F_2P| = 4$, 又点 P 在椭圆

C 上, 所以 $|F_1P| + |F_2P| = 2a = 6$, 则 $|F_1P| = 2$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理得

$\cos \angle PF_1F_2 = \frac{|PF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - |PF_2|^2}{2|PF_1| \cdot |F_1F_2|} =$

$\frac{2^2 + 4^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 4} = \frac{1}{4}$, 故 $\sin \angle PF_1F_2 =$

$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 则 $S_{\triangle PF_1F_2} =$

$\frac{1}{2} |PF_1| \cdot |F_1F_2| \sin \angle PF_1F_2 = \frac{1}{2} \times$

$2 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$.

例 2 [思路点拨] (1) 根据离心率以及长轴长和短轴长的关系列出方程求解, 结合椭圆的焦点在 y 轴上即可写出椭圆的标准方程; (2) 由已知条件列方程组求出椭圆的长半轴长和半焦距, 进而求得短半轴长, 分焦点在 x 轴、 y 轴两种情况写出椭圆的标准方程; (3) 设出有相同焦点的椭圆的标准方程, 将已知点的坐标代入, 利用待定系数法求解.

解: (1) 因为椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 长轴长

与短轴长之差为 2, 所以 $\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ 2a - 2b = 2, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a^2 = 9, \\ b^2 = 4, \end{cases}$ 又椭圆的焦点在 y 轴上, 故

椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$.

(2) 设椭圆的长轴长、短轴长、焦距分别为 $2a, 2b, 2c$, 由题得 $\begin{cases} a = 2c, \\ a - c = \sqrt{3}, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a = 2\sqrt{3}, \\ c = \sqrt{3}, \end{cases} \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 9$. 若椭圆的焦

点在 y 轴上, 则椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{12} +$

$\frac{x^2}{9} = 1$; 若椭圆的焦点在 x 轴上, 则椭圆

的标准方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$. 故椭圆的标准

方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{9} = 1$.

(3) 设与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 有相同的焦点的

椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2+\lambda} + \frac{y^2}{1+\lambda} = 1$ ($\lambda >$

-1), 因为椭圆经过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $\frac{1}{2+\lambda} +$

$\frac{9}{4(1+\lambda)} = 1$, 解得 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -\frac{7}{4}$ (舍去),

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

变式题 (1) D (2) B [解析] (1) 椭圆 C

的焦距为 8, 则 $|F_1F_2| = 2c = 8$, 故 $c = 4$.

由 $PF_1 \perp PF_2$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 12, 得

$\frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = 12$, 即 $|PF_1| \cdot |PF_2| =$

24 , 又 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 64$,

所以 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 +$

$|PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 112$, 即 $4a^2 =$

112 , 所以 $a^2 = 28$, 又 $c = 4$, 则 $b^2 = a^2 -$

$c^2 = 12$, 则椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{28} +$

$\frac{y^2}{12} = 1$. 故选 D.

(2) 由离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{3}$, 得

$\frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}$, 即 $b^2 = \frac{8}{9}a^2$. 由题意知 $A_1(-a,$

$0), A_2(a, 0), B(0, b)$, 所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-a,$

$-b), \overrightarrow{BA_2} = (a, -b)$, 因为 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} =$

-1 , 所以 $-a^2 + b^2 = -1$, 将 $b^2 = \frac{8}{9}a^2$

代入, 得 $a^2 = 9, b^2 = 8$, 故椭圆 C 的方程

为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. 故选 B.

例 3 [思路点拨] (1) 思路一: 设出点 P 的

坐标, 从而得到点 Q 的坐标, 由直线 AP ,

AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$ 及点 P 在椭圆 C

上, 可得 $\frac{b^2}{a^2}$ 的值, 由 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ 即

可求出离心率; 思路二: 设椭圆的右顶点

为 B , 由对称性得直线 BP, AQ 关于 y 轴

$\frac{1}{4}$. 由 $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{n^2}{a^2 - m^2} = \frac{b^2}{a^2}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 所以椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

方法二: 设椭圆 C 的右顶点为 B , 因为点 P, Q 均在 C 上, 且关于 y 轴对称, 所以直线 BP, AQ 关于 y 轴对称, 所以 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = -k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{1}{4}$, 故 $k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{1}{4}$. 设 $P(x_0, y_0)$, 由题得 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, 则 $k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{(1 - \frac{x_0^2}{a^2})b^2}{x_0^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 = -\frac{1}{4}$, 所以 $e^2 = \frac{3}{4}$, 即 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

(2) 由 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$ 可知 $|AF_2| = 2|F_2B|$, A, F_2, B 三点共线. 设 $|F_2B| = x$, 则 $|AF_2| = 2x$, $|AF_1| = 2a - 2x$, $|BF_1| = 2a - x$, $|AB| = 3x$. 在 $\triangle AF_1B$ 中, 由余弦定理可得 $(3x)^2 = (2a - 2x)^2 + (2a - x)^2 - 2(2a - 2x)(2a - x) \times \frac{4}{5}$, 化简可得 $2a^2 - 3ax - 9x^2 = 0$, 即 $(a - 3x)(2a + 3x) = 0$, 故 $a = 3x$ 或 $2a = -3x$ (舍去), 又 $\cos \angle AF_2F_1 + \cos \angle BF_2F_1 = 0$, 所以 $\frac{(2x)^2 + 4c^2 - (2a - 2x)^2}{2 \cdot 2x \cdot 2c} + \frac{x^2 + 4c^2 - (2a - x)^2}{2 \cdot x \cdot 2c} = 0$, 化简可得 $3c^2 + 4ax - 3a^2 = 0$, 即 $3c^2 + 4a \times \frac{a}{3} - 3a^2 = 0$, 故 $9c^2 = 5a^2$, 可得 $3c = \sqrt{5}a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 D.

例 4 [思路点拨] (1) 先求出焦点坐标, 设 $P(m, n)$, 求得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$, 再由 P 在椭圆上, 结合 n 的取值范围即可求解. (2) 利用椭圆的定义, 结合勾股定理与基本不等式转化求解即可.

(1) $[-2, 1]$ (2) B [解析] (1) 由椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得 $a = 2, b = 1$, 故 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, 可得 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$. 设 $P(m, n)$, 则 $\overrightarrow{PF_1} = (-\sqrt{3} - m, -n), \overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{3} - m, -n)$, 可得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-\sqrt{3} - m)(\sqrt{3} - m) + n^2 = m^2 + n^2 - 3$. 由 P 在椭圆上, 得 $m^2 + 4n^2 = 4$, 可得 $m^2 = 4 - 4n^2 (-1 \leq n \leq 1)$, 故 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1 - 3n^2 (-1 \leq n \leq 1)$, 则当 $n = 0$ 时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 取得最大值 1, 当 $n = \pm 1$ 时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 取得最小值 -2, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围是 $[-2, 1]$.

(2) 连接 BF_1 , 设 $|AF_2| = t$, 则 $|AB| = t + 1, |BF_1| = 2a - 1, |AF_1| = 2a - t$. 由 $AF_1 \perp AB$, 可得 $(t + 1)^2 + (2a - t)^2 = (2a - 1)^2$, 则 $2a = \frac{t^2 + t}{t - 1} > 0$, 故 $t > 1$, 所以 $2a = \frac{t^2 + t}{t - 1} = (t - 1) + \frac{2}{t - 1} + 3 \geq 3 + 2\sqrt{(t - 1) \cdot \frac{2}{t - 1}} = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $t - 1 = \frac{2}{t - 1}$, 即 $t = 1 + \sqrt{2}$ 时取等号, 则椭圆长轴长的最小值是 $3 + 2\sqrt{2}$. 故选 B.

【应用演练】

1. A [解析] 由题可得 $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $e_2 =$

$\sqrt{3}e_1$, 所以 $e_1 = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{a^2 - 1}{a^2} = \frac{1}{4}$, 解得 $a^2 = \frac{4}{3}$, 所以 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

2. C [解析] 因为 O, A 均在 x 轴上, 且四边形 $OABC$ 为平行四边形, 所以 $OA \parallel BC$, 且 B, C 的纵坐标相等, 则由椭圆的对称性知 B, C 的横坐标互为相反数. 由题意得 $A(a, 0)$, 设 $B(\frac{a}{2}, y_0) (y_0 > 0)$, 则 $C(-\frac{a}{2}, y_0)$, 将点 $B(\frac{a}{2}, y_0)$ 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中, 得 $y_0^2 = \frac{3}{4}b^2$, 则 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, 即 $B(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$, 所以 $k = k_{OB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}b}{a}$, 故 A 不正确. 因

为 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}k$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}k^2}$, 所以当 k 越大时, E 的离心率越小, 椭圆 E 越圆, 故 B 不正确. 当 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $e = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故 C 正确. 因为 $a > b > 0$, 所以 $k = \frac{\sqrt{3}b}{a} < \sqrt{3}$, 故 D 不正确. 故选 C.

3. B [解析] 因为 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 所以设 $|AF_2| = 2|F_2B| = 2m (m > 0)$. 连接 BF_1 , 因为过 F_2 的直线交椭圆于 A, B 两点, 所以由椭圆的定义可得, $|AF_1| + |AF_2| = 2a, |BF_1| + |BF_2| = 2a$, 则 $|BF_1| = 2a - m, |AF_1| = 2a - 2m$. 因为 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$, 所以 $AF_1 \perp AF_2$, 则 $\triangle F_1AF_2$ 和 $\triangle F_1AB$ 都是直角三角形. 由勾股定理可得, $|AF_1|^2 + |AB|^2 = |BF_1|^2$, 即 $(2a - 2m)^2 + 9m^2 = (2a - m)^2$, 可得 $m = \frac{a}{3}$, 所以 $|AF_1| = \frac{4a}{3}, |AF_2| = \frac{2a}{3}$, 又 $|F_1F_2| = 2c, |AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 所以 $\frac{16a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} = 4c^2$, 解得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$, 所以椭圆 E 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 B.

4. $\frac{4}{5}$ [解析] 因为经过椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 的右顶点 $(m, 0)$ 与上顶点 $(0, n)$ 的直线的斜率为 $-\frac{5}{3}$, 所以 $-\frac{n}{m} = -\frac{5}{3}$, 即 $\frac{n}{m} = \frac{5}{3}$, 可知椭圆 C 的焦点在 y 轴上, 则 C 的离心率 $e = \sqrt{1 - (\frac{m}{n})^2} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$.

5. $[\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{5}}{5}]$ [解析] 设点 $A(x_1, y_1)$, 由题意知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 则 $\overrightarrow{AF_1} = (-c - x_1, -y_1), \overrightarrow{AF_2} = (c - x_1, -y_1)$, 由 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 4c^2$, 得 $(-c - x_1)(c - x_1) + (-y_1)(-y_1) = 4c^2$, 即 $x_1^2 + y_1^2 = 5c^2$, 因此点 A 在以 $(0, 0)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{5}c$ 的圆上, 又点 A 在椭圆 C 上, 则圆 $x^2 + y^2 = 5c^2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有公共点. 由椭圆的几何性

质知 $b \leq \sqrt{5}c \leq a$, 即 $b^2 \leq 5c^2 \leq a^2$, 即 $a^2 - c^2 \leq 5c^2 \leq a^2$, 整理得 $5c^2 \leq a^2 \leq 6c^2$, 即 $\frac{1}{6} \leq \frac{c^2}{a^2} \leq \frac{1}{5}$, 所以椭圆 C 的离心率

$e \in [\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{5}}{5}]$.

6. $\frac{3}{2}$ [解析] 由题得 $a = 5, b = 4, c = 3$, $\therefore \triangle F_1PF_2$ 的周长 $L = |PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2a + 2c = 16$. $\therefore \triangle F_1PF_2$ 内切圆的半径 $r = \frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{L}$, $\therefore$ 当 $S_{\triangle F_1PF_2}$ 取得最大值时, r 取得最大值, 显然当 P 为短轴端点时, $S_{\triangle F_1PF_2}$ 取得最大值, 此时 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} \times b \times 2c = bc = 12$, 则 $r = \frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{L} = \frac{3}{2}$.

/第2课时 直线与椭圆的位置关系/

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 将直线方程 $y = x + m$ 和椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立, 消去 y 并整理得 $7x^2 + 8mx + 4m^2 - 12 = 0$, 根据判别式求解即可.

解: 由 $\begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $7x^2 + 8mx + 4m^2 - 12 = 0$ ①, $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 7 \times (4m^2 - 12) = -48m^2 + 336$.
(1) 当 $\Delta > 0$, 即 $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$ 时, 方程①有两个不同的实数根, 此时直线 l 与椭圆 C 有两个不重合的公共点.
(2) 当 $\Delta = 0$, 即 $m = \pm\sqrt{7}$ 时, 方程①有两个相同的实数根, 此时直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.
(3) 当 $\Delta < 0$, 即 $m < -\sqrt{7}$ 或 $m > \sqrt{7}$ 时, 方程①没有实数根, 此时直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

变式题 (1) A (2) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ [解析] (1) 由题

意知切线 l 的方程为 $\frac{3x}{12} + \frac{-y}{4} = 1$, 即 $x - y - 4 = 0$, 切线 l 的斜率为 1, 与切线 l 垂直的直线的斜率为 -1, 则过点 A 且与切线 l 垂直的直线的方程为 $y + 1 = -(x - 3)$, 即 $x + y - 2 = 0$. 故选 A.

(2) 设与直线 $x - 2y + 8 = 0$ 平行且与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 相切的直线方程为 $x -$

$2y + m = 0$. 由 $\begin{cases} x - 2y + m = 0, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$ 消去 x 并

整理得 $25y^2 - 16my + 4m^2 - 36 = 0$, 所以 $\Delta = 256m^2 - 400(m^2 - 9) = 0$, 解得 $m = \pm 5$. 当 $m = 5$, 即切线方程为 $x - 2y + 5 = 0$ 时, 切线与直线 $x - 2y + 8 = 0$ 间的距离为 $\frac{|8 - 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; 当 $m = -5$, 即切线方程为 $x - 2y - 5 = 0$ 时, 切线与直线 $x - 2y + 8 = 0$ 间的距离为 $\frac{|8 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$. 所以椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点到直线 $x -$

$2y + 8 = 0$ 的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例 2 [思路点拨] (1) 利用已知和 a, b, c 的关系, 可得 a, b , 进而得到椭圆 E 的方程; (2) 设出直线 BC 的方程, 联立直线 BC 与椭圆 E 的方程, 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 利用根与系数的关系得到 $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$, 进而求出 M, N 的坐标, 表示出 $|MN|$, 化简即可.

解: (1) 由题意得 $\begin{cases} b=1, \\ 2c=2\sqrt{3}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 可得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=\sqrt{3}, \end{cases} \text{ 所以椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 由题意得直线 BC 的方程为 $y-1=k(x+2)$. 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y-1=k(x+2), \end{cases}$ 消去 y 并

整理, 得 $(4k^2+1)x^2 + (16k^2+8k)x + 16k^2+16k=0$, 则 $\Delta = (16k^2+8k)^2 - 4(4k^2+1)(16k^2+16k) = -64k > 0$, 解得 $k < 0$. 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{16k^2+8k}{4k^2+1}, \\ x_1x_2 = \frac{16k^2+16k}{4k^2+1} \end{cases} \quad \text{①. 直线 } AB \text{ 的}$$

方程为 $y = \frac{y_1-1}{x_1}x + 1$, 则直线 AB 与 x

轴的交点 M 的坐标为 $(\frac{-x_1}{kx_1+2k}, 0)$.

同理得点 N 的坐标为 $(\frac{-x_2}{kx_2+2k}, 0)$.

因为 $|MN| = 2$, 所以 $|\frac{-x_2}{k(x_2+2)} - \frac{-x_1}{k(x_1+2)}| = 2$, 所以 $|x_1 - x_2| = |k[x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]|$, 所以 $\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = |k[x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]|$. ②. 将①代入②, 得 $(\frac{-16k^2+8k}{4k^2+1})^2 - \frac{4(16k^2+16k)}{4k^2+1} = k^2[\frac{16k^2+16k}{4k^2+1} - \frac{2(16k^2+8k)}{4k^2+1} + 4]^2$, 整理得 $k^2+4k=0$. 又 $k < 0$, 所以 $k = -4$.

变式题 1 C [解析] 方法一: 由题可知 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0), \triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍, 则点 F_1 到直线 $y=x+m$ 的距离是点 F_2 到直线 $y=x+m$ 距离的 2 倍, 故 $\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}} = 2 \frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$, 化简可得 $3m^2+10\sqrt{2}m+6=0$, 即 $(3m+\sqrt{2})(m+3\sqrt{2})=0$, 解得 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m = -3\sqrt{2}$, 又直线 $y=x-3\sqrt{2}$ 与 C 不相交, 所以 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

方法二: 不妨设直线 $y=x+m$ 与 x 轴的交点为 $Q(-m, 0)$, 因为 $\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍, 所以点 F_1 到直线 $y=x+m$ 的距离是点 F_2 到直线 $y=x+m$ 距离的 2 倍, 则 $|F_1Q| = 2|F_2Q|$.

若 Q 在线段 F_1F_2 上, 则 $|F_2Q| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $-m = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 即 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$; 若 Q 在线段 F_1F_2 的延长线上, 则 $|F_2Q| = 2\sqrt{2}$, 所以 $-m = 3\sqrt{2}$, 即 $m = -3\sqrt{2}$, 此时直线 $y=x+m$ 与椭圆相离. 故选 C.

变式题 2 解: (1) 依题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ \frac{1}{2}ab = \sqrt{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 可

$$\begin{cases} a = \sqrt{6}, \\ b = \sqrt{2}, \\ c = 2, \end{cases} \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 由(1)知椭圆 C 的右焦点的坐标为 $(2, 0)$. 当直线 l 的斜率不存在时,

由 $\frac{y^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$, 此时 $|PQ| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 不符合题意, 所以直线 l 的斜率存在. 设直线 l 的方程为 $y = k(x-2)$, 由

$$\begin{cases} y = k(x-2), \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得 } (1+3k^2)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0, \text{ 设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1+x_2 = \frac{12k^2}{1+3k^2},$$

$$x_1x_2 = \frac{12k^2-6}{1+3k^2}, \text{ 所以 } |PQ| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{12k^2}{1+3k^2}\right)^2 - 4 \times \frac{12k^2-6}{1+3k^2}} =$$

$$\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{144k^4 - 24(12k^2-6)(1+3k^2)}{(1+3k^2)^2}} = \frac{2\sqrt{6} \cdot (1+k^2)}{1+3k^2} = \frac{6\sqrt{6}}{7}, \text{ 解得 } k = \pm\sqrt{2}, \text{ 所以以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \pm\sqrt{2}(x-2).$$

例 3 [思路点拨] (1) 思路一: 设出弦端点的坐标, 由弦端点的坐标与弦中点的坐标的关系, 结合弦端点在椭圆上可得弦所在直线的斜率, 结合直线过点 C 即可求出弦所在直线的方程; 思路二: 设过点 C 的弦为 AB , 利用 $k_{AB} \cdot k_{OC} = -\frac{b^2}{a^2}$ (O 为坐标原点) 得到 k_{AB} , 结合直线 AB 过点 C 可得答案. (2) 设出直线 MN 的方程, 与椭圆的方程联立, 由根与系数的关系求出两根之和, 进而求出弦 MN 中点的坐标, 即可得弦 MN 中点的轨迹方程. (3) 设出弦与椭圆的交点的坐标和点 P 的坐标, 分弦所在直线的斜率存在与不存在两种情况进行分析, 结合点差法即可得点 P 的轨迹方程.

解: (1) 方法一: 设以 $C(1, 1)$ 为中点的弦与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1+x_2}{2} = 1, \frac{y_1+y_2}{2} = 1$.

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 可得 } \frac{x_1^2-x_2^2}{4} = -\frac{y_1^2-y_2^2}{3},$$

$$\text{则 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} = -\frac{3}{4}, \text{ 即直线 } AB \text{ 的斜率为 } -\frac{3}{4}, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的方程为 } y-1 = -\frac{3}{4}(x-1), \text{ 即 } 3x+4y-7=0.$$

方法二: 设过点 C 的弦为 AB , 因为 AB 被点 C 平分, 所以 $k_{AB} \cdot k_{OC} = -\frac{b^2}{a^2}$ (O 为坐标原点), 即 $k_{AB} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$, 解得

$$k_{AB} = -\frac{3}{4}, \text{ 故弦 } AB \text{ 所在直线的方程为 } y-1 = -\frac{3}{4}(x-1), \text{ 即 } 3x+4y-7=0.$$

(2) 设直线 MN 的方程为 $y = 2x + t$, $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$, 由 $\begin{cases} y = 2x+t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$

$$\text{消去 } y \text{ 整理得 } 19x^2 + 16tx + 4t^2 - 12 = 0, \text{ 由 } \Delta = (16t)^2 - 4 \times 19 \times (4t^2 - 12) > 0, \text{ 可得 } t^2 < 19, \text{ 则 } x_3+x_4 = \frac{-16t}{19}, \text{ 故 } y_3+y_4 = 2(x_3+x_4) + 2t = \frac{-32t}{19} + 2t = \frac{6t}{19},$$

$$\text{所以弦 } MN \text{ 的中点的坐标为 } \left(\frac{-8t}{19}, \frac{3t}{19} \right).$$

设弦 MN 的中点坐标为 (x, y) ,

$$\begin{cases} x = \frac{-8t}{19}, \\ y = \frac{3t}{19}, \\ t^2 < 19, \end{cases} \text{ 可得 } 3x+8y=0 \left(|x| < \frac{8\sqrt{19}}{19} \right), \text{ 所以弦 } MN \text{ 的中点的轨迹方程}$$

$$\text{为 } 3x+8y=0 \left(|x| < \frac{8\sqrt{19}}{19} \right).$$

(3) 由题意知 $F(-1, 0)$. 设弦与椭圆的两交点分别为 $I(x_5, y_5), J(x_6, y_6), P(x, y)$, 当 $x_5 = x_6$ 时, P 与 F 重合, 即 $P(-1, 0)$. 当 $x_5 \neq x_6$ 时, 由 $\begin{cases} 3x_5^2+4y_5^2=12, \\ 3x_6^2+4y_6^2=12, \end{cases}$ 两式相

减得 $3(x_5+x_6)(x_5-x_6) + 4(y_5+y_6)(y_5-y_6) = 0$, 即 $3(x_5+x_6) + 4 \cdot \frac{(y_5+y_6)(y_5-y_6)}{x_5-x_6} = 0$, 因为 $\frac{y_5-y_6}{x_5-x_6} =$

$$k_{FP} = \frac{y}{x+1} (x \neq -1), x_5+x_6 = 2x, y_5+y_6 = 2y, \text{ 所以 } 3x^2+3x+4y^2=0 (x \neq -1), \text{ 显然点 } (-1, 0) \text{ 的坐标满足该方程, 所以点 } P \text{ 的轨迹方程为 } 3x^2+3x+4y^2=0.$$

变式题 (1) B (2) $9x-8y-43=0$

[解析] (1) 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, 即椭圆 $5x^2+9y^2-45=0$. 设椭圆上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 关于直线 $y=3x+m$ 对称, 线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 则 $5x_1^2+9y_1^2-45=0, 5x_2^2+9y_2^2-45=0$, 两式相减得 $5(x_1+x_2)(x_1-x_2) + 9(y_1+y_2)(y_1-y_2) = 0$, 所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{5}{9} \cdot \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = -\frac{5}{9} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{3}$, 所以 $y_0 = \frac{5}{3}x_0$, 代入直线方程 $y=3x+m$ 得 $x_0 = -\frac{3m}{4}, y_0 = -\frac{5m}{4}$, 即 $M\left(-\frac{3m}{4}, -\frac{5m}{4}\right)$. 因为点 M 在椭圆内部, 所以 $5 \times \frac{9m^2}{16} + 9 \times \frac{25m^2}{16} < 45$, 解得 $-\frac{2\sqrt{6}}{3} < m < \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 即 m 的取值范围是 $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 故选 B.

(2) 由题意知, 椭圆的右焦点的坐标为 $(2, 0)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 因为 $\triangle BMN$ 的重心为 $(2, 0)$, 所以 $\frac{x_1+x_2}{3} =$

$$2, \frac{y_1+y_2}{3} = 0, \text{ 所以 } x_1+x_2 = 6, y_1+y_2 = -4, \text{ 故线段 } MN \text{ 的中点坐标为 } (3, -2). \text{ 因为 } \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{12} = 1, \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{12} = 1, \text{ 所以 } 3(x_2+x_1)(x_2-x_1) + 4(y_2+y_1)(y_2-y_1) = 0, \text{ 即 } 18(x_2-x_1) - 16(y_2-y_1) = 0, \text{ 所以 } k_{MN} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}, \text{ 所以直线 } l \text{ 的方程为 } y+2 = \frac{9}{8}(x-3), \text{ 即 } 9x-8y-43=0.$$

例 4 [思路点拨] (1) 设切点为 M , 根据已知条件得到 $PF_1 \perp PF_2, OM \parallel PF_1$ (O 为坐标原点), 结合椭圆的定义及勾股定理得到 a, b 的关系, 进而可求离心率. (2) 思路一: 设 $|QF_1| = m, |PF_1| = n$, 将存在点 P 使 $|PQ| = |QF_2|$ 等价转化为 $(|PQ| - |QF_2|)_{\min} \leq 0$, 由椭圆的二级结论得 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2a}{b^2}$, 结合基本不等式可求 $|PQ| - |QF_2| = 2m+n-2a$ 的最小值, 即可求得 $\frac{b^2}{a^2}$ 的取值范围, 从而得到 e^2 的取值范围; 思路二: 由椭圆的焦半径公式

和椭圆的定义,结合基本不等式即可得到 e^2 的取值范围. (3) 思路一: 设出点 A, B 的坐标, 结合 $|MA|=|NB|$ 得线段 AB 的中点 E 也为线段 MN 的中点, 利用点差法得到 $k_{OE} \cdot k_{AB}$ (O 为坐标原点), 设出直线 l 的方程, 得到 M, N, E 的坐标, 结合 $|MN|=2\sqrt{3}$ 求解即可; 思路二: 设出线段 AB 的中点 E 的坐标, 结合 $|MA|=|NB|$ 得到 E 也为 MN 的中点, 根据 M, N 的位置得到 M, N 的坐标, 结合 $k_{OE} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ (O 为坐标原点) 及 $|MN|=2\sqrt{3}$ 求解即可; 思路三: 设出线段 AB 的中点 E 的坐标, 结合 $|MA|=|NB|$ 得到 E 也为 MN 的中点, 得到 M, N 的坐标及直线 AB 的方程, 结合 $k_{AB} = k_{MN}$ 及 $|MN|=2\sqrt{3}$ 求解即可.

(1) C (2) $[8\sqrt{2}-11, 1)$ (3) $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$ [解析] (1) 设切点为 M , 连接 PF_1, OM . $\because |OP|=|OF_2|=|OF_1|$, $\therefore PF_1 \perp PF_2$. $\because OM \perp PF_2$, $\therefore OM \parallel PF_1$, 又 O 是 F_1F_2 的中点, 圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}b^2$ 的半径为 $\frac{1}{2}b$, $\therefore |PF_1|=2|OM|=b$, $\therefore |PF_2|=2a-b$, $\therefore b^2+(2a-b)^2=4c^2=4(a^2-b^2)$, 即 $2a=3b$, 得 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, $\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 故选 C.

(2) 方法一 (利用椭圆的二级结论和基本不等式): 设 $|QF_1|=m, |PF_1|=n$, 则 $|QF_2|=2a-m$, 且 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a}{b^2}$, 显然当点 P 为右顶点时, $|PQ|>|QF_2|$, 故存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$ 成立等价于 $(|PQ|-|QF_2|)_{\min} \leq 0$. 因为 $|PQ|-|QF_2|=2m+n-2a$, 且 $2m+n=\frac{b^2}{2a}(2m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{b^2}{2a}\left(3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\right) \geq \frac{(3+2\sqrt{2})b^2}{2a}$, 当且仅当 $n=\sqrt{2}m$ 时取等号, 所以 $(|PQ|-|QF_2|)_{\min}=\frac{(3+2\sqrt{2})b^2}{2a}-2a$, 由 $\frac{(3+2\sqrt{2})b^2}{2a}-2a \leq 0$, 得 $\frac{b^2}{a^2} \leq 12-8\sqrt{2}$, 又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}, 0 < e < 1$, 所以 $8\sqrt{2}-11 \leq e^2 < 1$, 故 e^2 的取值范围是 $[8\sqrt{2}-11, 1)$.

方法二 (利用焦半径公式和基本不等式): 设 $\angle PF_1F_2=\theta$, 点 P 在 x 轴上方, 则 $|PF_1|=\frac{a}{1-\cos\theta}, |QF_1|=\frac{a}{1+\cos\theta}$, 所以 $|QF_2|=2a-|QF_1|=2a-\frac{b^2}{1+\cos\theta}$. 若存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$, 即 $|PF_1|+|QF_1|=|QF_2|$, 则 $2a=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{2}{1+\cos\theta}\right)$, 所以 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{2}{1+\cos\theta}\right)(1-\cos\theta+1+\cos\theta)=\frac{1}{4}\left[3+\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{2(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}\right] \geq \frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}$, 当且仅当 $\cos\theta=3-2\sqrt{2}$ 时取等号, 故 $\frac{b^2}{a^2} \leq 12-8\sqrt{2}$, 又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}, 0 < e < 1$, 所以 $8\sqrt{2}-11 \leq e^2 < 1$, 故 e^2 的取值范围是

$[8\sqrt{2}-11, 1)$.

(3) 方法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 E , $\therefore |MA|=|NB|$,

$\therefore E$ 也为 MN 的中点. 由 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$,

$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$, 两式相减可得 $\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$, 则 $k_{OE} \cdot k_{AB}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$ (O 为坐标原点). 设直线 l 的方程为 $y=kx+m, k < 0, m > 0$, 则

$M\left(-\frac{m}{k}, 0\right), N(0, m), \therefore E\left(-\frac{m}{2k}, \frac{m}{2}\right), \therefore k_{OE}=-k, \therefore -k \cdot k=-\frac{1}{2}$, 可得

$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore |MN|=2\sqrt{3}, \therefore \sqrt{\frac{m^2}{k^2}+m^2}=2\sqrt{3}$, 即 $\frac{m^2}{k^2}+m^2=12, \therefore 3m^2=12$, 又 $m > 0$, $\therefore m=2$, $\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$, 即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

方法二: 设线段 AB 的中点为 $E(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$), $\therefore |MA|=|NB|, \therefore E$ 也是 MN 的中点. $\therefore M$ 在 x 轴的正半轴上, $\therefore M(2x_0, 0), \therefore N$ 在 y 轴的正半轴上, $\therefore N(0, 2y_0), \therefore k_{AB} \cdot k_{OE}=-\frac{b^2}{a^2}$ (O 为坐标原点), $k_{AB}=k_{MN}, \therefore k_{MN} \cdot k_{OE}=-\frac{2y_0}{2x_0} \cdot \frac{y_0}{x_0}=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$, $\therefore x_0^2=2y_0^2, \therefore |MN|=2\sqrt{3}$, $\therefore \sqrt{4x_0^2+4y_0^2}=2\sqrt{3}$, 又 $x_0^2=2y_0^2, x_0 > 0, y_0 > 0, \therefore x_0=\sqrt{2}, y_0=1$, 故 $M(2\sqrt{2}, 0), N(0, 2), \therefore$ 直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$, 即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

方法三: 设线段 AB 的中点为 $E(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$), $\therefore |MA|=|NB|, \therefore E$ 也为 MN 的中点, $\therefore M(2x_0, 0), N(0, 2y_0)$, 直线 AB 的方程为 $\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{3}=\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{3}$, 故 $k_{AB}=\frac{-x_0}{2y_0}=k_{MN}=-\frac{2y_0}{2x_0}$, 则 $x_0^2=2y_0^2$. 又 $|MN|=2\sqrt{3}, \therefore (2x_0)^2+(2y_0)^2=12$, 解得 $x_0^2=2, y_0^2=1$, 可得 $x_0=\sqrt{2}, y_0=1, \therefore$ 直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})$, 即 $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

变式题 (1) B (2) ACD (3) 18

[解析] (1) 方法一: $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore a^2=3c^2$, $b^2=2c^2$. 设直线 AB 的方程为 $x=\frac{1}{k}y-c$, 与椭圆方程 $2x^2+3y^2=6c^2$ 联立, 消去 x 整理得 $\left(3+\frac{2}{k^2}\right)y^2-\frac{4c}{k}y-4c^2=0$, 设

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1+y_2=\frac{4kc}{3k^2+2}, y_1y_2=\frac{-4c^2k^2}{3k^2+2}, \therefore |AF|=2|FB|$, $\therefore y_1=-2y_2$, 可得 $y_2=-\frac{4kc}{3k^2+2}, y_2^2=\frac{2c^2k^2}{3k^2+2}, \therefore \left(-\frac{4kc}{3k^2+2}\right)^2=\frac{2c^2k^2}{3k^2+2}$, 又 $k > 0, \therefore k=\sqrt{2}$. 故选 B.

方法二: 设 l 为椭圆的左准线, 分别过 A, B 两点作 AA_1, BB_1 垂直于 l , 垂足分别为点 A_1, B_1 , 过点 B 作 $BE \perp AA_1$ 于点

E , 根据椭圆的第二定义, 得 $|AA_1|=\frac{|AF|}{e}, |BB_1|=\frac{|BF|}{e}, \therefore |AF|=2|FB|$, $\therefore |AA_1|=\frac{2|BF|}{e}, \therefore \cos \angle BAE=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{|BF|}{e}=\frac{1}{3e}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \sin \angle BAE=\frac{\sqrt{6}}{3}, \therefore \tan \angle BAE=\sqrt{2}$, 即 $k=\sqrt{2}$. 故选 B.

方法三: 设直线 AB 的倾斜角为 θ , 由椭圆的焦半径公式得 $|AF|=\frac{a-c\cos\theta}{1-\cos\theta}, |FB|=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$, 由题知 $|AF|=2|FB|$, 则

$\frac{b^2}{a+c\cos\theta}=\frac{2b^2}{a-c\cos\theta}$, 即 $3e\cos\theta=1$, 解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}, \therefore k=\tan\theta=\sqrt{2}$. 故选 B.

(2) 设直线 l 与 QF_2 交于点 G . 对于 A , 若 $k=1$, 则 $Q(0, c)$, 所以 $b=c$, 所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{c}{\sqrt{2c^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 A 正确; 对于 B , 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$, 且 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, 即 $y_0^2=\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{a^2}$, 所以 $k_{MA}k_{MB}=\frac{y_0}{x_0+a} \cdot \frac{-y_0}{-x_0+a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=1-e^2=\frac{1}{3}$, 故 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 B 错误; 对于 C , 由题意可知 OG (O 为坐标原点) 是 $\triangle QF_1F_2$ 的中位线, 故 $l \parallel F_1Q$, 故 C 正确; 对于 D , 设点 $B(x_0, y_0)$, 则直线 $l: y=\frac{y_0}{x_0}x$, 因为直线 BQ 平行于 x 轴, 所以点 $Q(-x_0, y_0)$, 线段 F_2Q 的中点为 $G\left(\frac{-x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$, 所以由点 G 在直线 l 上

且 $k_{F_2G}k=-1$ 得 $\begin{cases} \frac{y_0}{2}=\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{c-x_0}{2}, \\ \frac{y_0}{-x_0-c} \cdot \frac{y_0}{x_0}=-1, \end{cases}$

解得 $x_0=\frac{1}{2}c, y_0^2=\frac{3c^2}{4}$, 即 $y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 所以 $k=\frac{y_0}{x_0}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{1}{2}c}=\pm\sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选 ACD.

(3) 圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $O_1(1, 0)$, 半径 $r=1$, 连接 O_1P . 因为直线 l 过圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心, 且与圆相交于 A, B 两点, 所以 $\overrightarrow{O_1B}=-\overrightarrow{O_1A}$. 由椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$, 得 $a=3, c=1$, 故右焦点为 $O_1(1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1A}) \cdot (\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1B})=(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1A}) \cdot (\overrightarrow{PO_1}-\overrightarrow{O_1A})=\overrightarrow{PO_1}^2-\overrightarrow{O_1A}^2=|\overrightarrow{PO_1}|^2-1$, 又 $a-c \leq |\overrightarrow{PO_1}| \leq a+c$, 即 $2 \leq |\overrightarrow{PO_1}| \leq 4$, 所以 $3 \leq |\overrightarrow{PO_1}|^2-1 \leq 15$, 即 $3 \leq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 15$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最大值为 15, 最小值为 3, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最大值与最小值之和为 18.

第 54 讲 双曲线

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 距离的差的绝对值 焦点 焦距

- (1) $a < c$ (2) $a = c$ (3) $a > c$
 3. $x \geq a$ 或 $x \leq -a$ $y \leq -a$ 或 $y \geq a$
 $(-a, 0)$ $(a, 0)$ $(0, -a)$ $(0, a)$
 $\pm \frac{b}{a}x \pm \frac{a}{b}y$ $(1, +\infty)$ $a^2 + b^2$
 $2a$ $2b$

【对点演练】

1. 4 $(0, -5), (0, 5)$ $y = \pm \frac{4}{3}x$
 [解析] 把双曲线的方程 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 化为标准方程, 得 $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$. 由此可知, $a = 4, b = 3$, 故 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, 则焦点坐标是 $(0, -5), (0, 5)$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$.

2. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ [解析] 设双曲线方程为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 把点 $A(3, -1)$ 的坐标代入, 得 $\lambda = 8$, 故所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$.

3. $(0, 2)$ [解析] 要使 $\frac{x^2}{t} + \frac{y^2}{t-2} = 1$ 表示双曲线, 只需 $t(t-2) < 0$, 解得 $0 < t < 2$, 所以实数 t 的取值范围是 $(0, 2)$.

4. 17 [解析] 由题意知 $|PF_1| = 9 < a + c = 10$, 所以点 P 在双曲线的左支上, 则有 $|PF_2| - |PF_1| = 2a = 8$, 故 $|PF_2| = |PF_1| + 8 = 17$.

5. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右支 [解析] 设满足题意的点为点 P , 由题意知 $|PF_1| - |PF_2| = 6 < |F_1F_2| = 8$, 则点 P 在以 F_1, F_2 为焦点, 且实轴长为 6 的双曲线的右支上. 设该双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 半焦距为 c , 则 $a = 3, c = 4$, 故 $b^2 = c^2 - a^2 = 7$, 所以所求点的轨迹是双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右支.

6. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ [解析] 若双曲线的焦点在 x 轴上, 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ ($a_1 > 0, b_1 > 0$), 则其渐近线的方程为 $y = \pm \frac{b_1}{a_1}x$, 由题意可得 $\frac{b_1}{a_1} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 即 $b_1 = \sqrt{3}a_1$, 可得 $c_1 = 2a_1$, 此时离心率为 $\frac{c_1}{a_1} = 2$. 若双曲线的焦点在 y 轴上, 设双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a_2^2} - \frac{x^2}{b_2^2} = 1$ ($a_2 > 0, b_2 > 0$), 则其渐近线的方程为 $y = \pm \frac{a_2}{b_2}x$, 由题意可得 $\frac{a_2}{b_2} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 即 $a_2 = \sqrt{3}b_2$, 可得 $c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_2$, 此时离心率为 $\frac{c_2}{a_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 综上, 所求离心率为 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

● 课堂考点探究

- 例 1 [思路点拨] (1) 根据双曲线方程确定 c 的值, 从而求出 $|PF_2|$, 再利用双曲线的定义求解即可. (2) 思路一: 先根据双曲线的定义及 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 12$ 求出 $|PF_1|, |PF_2|$, 进而得到 $\tan \angle PF_1F_2$, 结合 $\angle POF_2 = 2$ 进而得到 $\tan \angle POF_2$, 思路二: 先根据双曲线的定义及 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 12$ 求出 $|PF_1|, |PF_2|$, 进而得到 $|F_1F_2|$, 求出双曲线的方程, 结合 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0)$ 在双曲线及以 F_1F_2 为直径的圆上, 得到 $x_0, |y_0|$, 进而求解.

- (1) A (2) A [解析] (1) 由 $x^2 - y^2 =$

2, 得 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, 故 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 2$.
 $\therefore |PF_2|^2 = 8 |F_1F_2| = 8 \times 4 = 32$,
 $\therefore |PF_2| = 4\sqrt{2}$. 又 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$, $\therefore |PF_1| = 2\sqrt{2} + |PF_2| = 6\sqrt{2}$. 故选 A.

(2) 方法一: 设 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$, 则 $m > n$. 由双曲线的定义知 $m - n = 4$, 又 $mn = 12$, 所以 $m = 6, n = 2$. 因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上, 所以 $PF_1 \perp PF_2$, 故 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{|PF_2|}{|PF_1|} = \frac{1}{3}$, 所以 $\tan \angle POF_2 =$

$$\tan 2\angle PF_1F_2 = \frac{2\tan \angle PF_1F_2}{1 - \tan^2 \angle PF_1F_2} = \frac{3}{4}.$$

方法二: 设 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$, 则 $m > n$. 由双曲线的定义知 $m - n = 4$, 又 $mn = 12$, 所以 $m = 6, n = 2$. 因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上, 所以 $PF_1 \perp PF_2$, 则 $|F_1F_2| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, 则 $b^2 = 10 - 4 = 6$, 故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$.

设 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0)$, 由 $\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{6} = 1, \\ x_0^2 + y_0^2 = 10, \end{cases}$

可得 $\begin{cases} x_0 = \frac{4\sqrt{10}}{5}, \\ |y_0| = \frac{3\sqrt{10}}{5}, \end{cases}$ 故 $\tan \angle POF_2 =$

$$\frac{|y_0|}{x_0} = \frac{3}{4}, \text{ 故选 A.}$$

变式题 (1) C (2) $\sqrt{15}$ [解析] (1) $\because$ 两定点 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$, $\therefore |F_1F_2| = 6$, 由双曲线的定义得, 当 $|PF_1| - |PF_2| = \pm 4$ 时, 动点 P 的轨迹为双曲线, 故选 C.

(2) 因为 $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{a^2} = 4$, 所以 $a^2 = 1$, 则 $c = 2$, 所以 $|F_1F_2| = 4$, 又 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 10, 所以 $|AF_1| + |AF_2| = 6$. 不妨设点 A 在双曲线的右支上, 由双曲线的定义得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a = 2$, 所以 $|AF_1| = 4, |AF_2| = 2$, 所以 $\triangle AF_1F_2$ 是等腰三角形. 取 AF_2 的中点 B , 连接 BF_1 , 则 $BF_1 \perp AF_2, |BF_1| = \sqrt{|F_1F_2|^2 - |F_2B|^2} = \sqrt{15}$, 所以 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2} |AF_2| \cdot |BF_1| = \sqrt{15}$.

例 2 [思路点拨] (1) 根据双曲线 C 的焦点得到双曲线 C 的半焦距, 结合离心率求出实半轴长, 进而得到虚半轴长, 写出 C 的方程即可. (2) 设所求双曲线的方程为 $4x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 结合点 $(-5, 2\sqrt{15})$ 在所求双曲线上, 求出 λ , 即可得到所求双曲线的方程.

$$(1) \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{40} = 1$$

[解析] (1) 设双曲线 C 的实半轴长、虚半轴长分别为 a, b , 显然双曲线 C 的中心为原点, 焦点在 x 轴上, 其半焦距 $c = 2$.

由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$, 得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$,

解得 $a = \sqrt{2}$, 则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 设所求双曲线的方程为 $4x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 又点 $(-5, 2\sqrt{15})$ 在双曲线上, 所以 $\lambda = 4 \times (-5)^2 - (2\sqrt{15})^2 = 100 - 60 = 40$, 故所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{40} = 1$.

变式题 (1) B (2) D [解析] (1) 因为圆 $C: x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ 的圆心为 $C(-3,$

$0)$, 半径 $r = 2$, 所以 $c = 3$. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即 $b \pm ax = 0$, 由题知 $\frac{|3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$

2, 整理得 $a^2 = \frac{5}{4}b^2$, 又 $a^2 + b^2 = 9$, 所以 $\frac{5}{4}b^2 + b^2 = 9$, 所以 $b^2 = 4, a^2 = 5$, 故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. 故选 B.

(2) 由题意, $|PF_2| = 2, \therefore$ 焦点到任一条渐近线的距离为 $b, \therefore b = 2$. 在 $\triangle POF_2$ (O 为原点) 中, 由等面积法易得点 P 的坐标为 $(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c})$, 故 $k_{PF_1} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c} - c} = \frac{ab}{a^2 - c^2} =$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$, 化简可得 $(a - \sqrt{2})^2 = 0$, 故 $a = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据已知条件求出 m 的值, 即可得到双曲线的渐近线方程. (2) 根据双曲线方程得到渐近线方程, 根据渐近线与圆相切得到圆心到渐近线的距离等于半径, 列式求解即可.

(1) C (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析] (1) 由题意得

$\sqrt{3m+2} = 2\sqrt{m}$, 解得 $m = 2$, 则双曲线 $C: \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{2} = 1$, 故其渐近线方程为 $y = \pm 2x$. 故选 C.

(2) 双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{x}{m}$, 即 $x \pm my = 0$. 圆 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ 的标准方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, 所以圆心坐标为 $(0, 2)$, 半径 $r = 1$. 依题意, 圆心 $(0, 2)$ 到渐近线 $x \pm my = 0$ 的距离 $d = \frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$, 解得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

或 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍去).

例 4 [思路点拨] (1) 设 $|AF_1| = m (m > 0)$, 根据等边三角形的几何性质及双曲线的定义用 m 表示出 $2a, 2c$, 进而求出离心率. (2) 思路一: 利用坐标法, 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), B(0, n)$, 结合已知条件得到 $n^2 = 4c^2$, 结合点 A 在 C 上及 $b^2 = c^2 - a^2$ 得到关于 $\frac{c}{a}$ 的方程, 即可得到离心率; 思

路二: 利用几何法, 根据 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 设 $|F_2A| = 2x, |F_2B| = 3x$. 根据双曲线的对称性及定义用 x 表示 $|F_1B|, |F_1A|$, 结合 $F_1A \perp F_1B$ 得到 $x = a$, 在 $\triangle AF_1F_2$ 中利用余弦定理得到 a 与 c 的关系, 即可得到离心率.

(1) A (2) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ [解析] (1) 设 $|AF_1| = m (m > 0)$, 因为 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, $AF_1 \perp F_1F_2$, 所以 $|AF_2| = 2m, |F_1F_2| = \sqrt{3}m = 2c$, 又 $|AF_2| - |AF_1| = m = 2a$, 所以双曲线 M 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{3}m}{m} = \sqrt{3}$. 故选 A.

(2) 方法一 (坐标法): 依题可设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), B(0, n)$, 由 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 可得 $A(\frac{5}{3}c, -\frac{2}{3}n)$, 所以 $\overrightarrow{F_1A} = (\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n)$, 又 $\overrightarrow{F_1B} = (c, n)$,

所以由 $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$ 可得 $\frac{8}{3}c^2 - \frac{2}{3}n^2 = 0$, 即 $n^2 = 4c^2$. 因为点 A 在 C 上, 所以 $\frac{25}{9}c^2 - \frac{4}{9}n^2 = 1$, 即 $25\frac{c^2}{a^2} - 16\frac{c^2}{c^2 - a^2} = 9$, 即 $25e^2 - \frac{16e^2}{e^2 - 1} = 9$, 解得 $e^2 = \frac{9}{5}$ 或 $e^2 = \frac{1}{5}$ (舍去), 所以 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

方法二 (几何法): 由 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ 可得 $\frac{|\overrightarrow{F_2A}|}{|\overrightarrow{F_2B}|} = \frac{2}{3}$, 设 $|F_2A| = 2x$, $|F_2B| = 3x$, 由对称性可得 $|F_1B| = 3x$, 易知点 A 在双曲线的右支上, 根据双曲线的定义可得 $|F_1A| = 2x + 2a$. 又 $|AB| = 5x$, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, 所以 $\sin \angle F_1AF_2 = \frac{|F_1B|}{|AB|} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$, 所以 $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{4}{5}$, 即 $\frac{|F_1A|}{|AB|} = \frac{2x+2a}{5x} = \frac{4}{5}$, 可得 $x = a$, 所以 $|AF_1| = 4a$, $|AF_2| = 2a$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{4}{5} = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2}$, 即 $5c^2 = 9a^2$, 得 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【应用演练】

- D [解析] 由题意知直线 $y = 2x$ 的斜率小于双曲线的渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的斜率, 所以 $\frac{b}{a} > 2$, 即 $b^2 > 4a^2$, 即 $c^2 - a^2 > 4a^2$, 即 $\frac{c^2}{a^2} > 5$, 所以 $e = \frac{c}{a} > \sqrt{5}$. 故选 D.
- D [解析] 由题可知四边形 AF_2BF_1 为平行四边形, 则 $|F_1B| = |F_2A| = 2|F_1A|$. 易知 A 在 y 轴左侧, 故 $|F_2A| - |F_1A| = 2a$, $\therefore |F_1A| = 2a$, $|F_2A| = 4a$. $\therefore \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{AF_1} = -\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = -2a \cdot 4a \cos \angle F_1AF_2 = -8a^2 \cos \angle F_1AF_2 = 4a^2$, $\therefore \cos \angle F_1AF_2 = -\frac{1}{2}$, 则 $|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cos \angle F_1AF_2 = 4a^2 + 16a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 4a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28a^2$, 即 $4c^2 = 28a^2$ (c 为双曲线的半焦距), $\therefore$ 双曲线的离心率 $e = \sqrt{7}$, 故选 D.
- $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ [解析] 由双曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 的方程可得 $(m+1)m < 0$, 解得 $-1 < m < 0$, 所以 $m+1 > 0 > m$, 所以双曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m+1} = 1$ 的焦点在 y 轴, 且 $a^2 = m+1$, $b^2 = -m$, 所以 $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{-m}{m+1}$, 又双曲线的离心率为 3, 所以 $1 + \frac{-m}{m+1} = 9$, 解得 $m = -\frac{8}{9}$, 所以 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$, $c = 1$, 所以焦点坐标为 $(0, \pm 1)$, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}x$, 即 $x \pm 2\sqrt{2}y = 0$, 所以焦点 $(0, \pm 1)$ 到渐近线 $x \pm 2\sqrt{2}y = 0$ 的距离 $d = \frac{|0 \pm 2\sqrt{2} \times (\pm 1)|}{\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- $\frac{3}{2}$ [解析] $\because |AB| = 10, \therefore |AF_2| = 5$,

又 $\because |AF_1| = 13, AF_2 \perp F_1F_2, \therefore |F_1F_2| = \sqrt{|AF_1|^2 - |AF_2|^2} = 12, \therefore 2c = 12, \therefore c = 6. \therefore 2a = |AF_1| - |AF_2| = 8, \therefore a = 4, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

例 5 [思路点拨] (1) 根据题目所给条件得到 a, c , 进而得到 b , 即可写出双曲线 C 的方程; (2) 设直线 l 的方程为 $y = x + m$, 将直线方程与双曲线方程联立, 结合根与系数的关系用 m 表示出线段 MN 的中点坐标, 得到线段 MN 的垂直平分线的方程, 进而根据三角形的面积求出 m 即可.

解: (1) 由题设得 $c = 2, e = \frac{c}{a} = 2$, 解得 $a = 1$, 则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$, 所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = x + m, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$. 由 $\begin{cases} y = x + m, \\ 3x^2 - y^2 = 3, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $2x^2 - 2mx - m^2 - 3 = 0$, 则 $\Delta = (-2m)^2 + 8(m^2 + 3) = 12(m^2 + 2) > 0$.

由根与系数的关系可知 $\begin{cases} x_1 + x_2 = m, \\ x_1x_2 = -\frac{m^2 + 3}{2}. \end{cases}$

设线段 MN 的中点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}, y_0 = x_0 + m = \frac{3m}{2}$, 故线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y - \frac{3m}{2} = -\left(x - \frac{m}{2}\right)$, 即 $y = -x + 2m$.

此直线与 x 轴、 y 轴的交点坐标分别为 $(2m, 0), (0, 2m)$. 由题设可得 $\frac{1}{2}|2m| \cdot |2m| = 4$, 即 $m^2 = 2$, 解得 $m = \pm\sqrt{2}$, 故直线 l 的方程为 $y = x \pm \sqrt{2}$.

变式题 1 (1) B (2) ACD [解析] (1) 不妨设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$. 因为 $AN = 3AM, AM \perp x$ 轴, M 在 Γ 上, 所以 $M(x_0, -y_0), (x_N - x_0, y_N - y_0) = 3(0, -2y_0) = (0, -6y_0)$, 所以 $x_N = x_0, y_N = -5y_0$, 即 $N(x_0, -5y_0)$. 设点 $C(x, y)$, 又点 C 在双曲线 Γ 上, 则 $k_{CB} \cdot k_{CA} = \frac{y + y_0}{x + x_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y^2 - y_0^2}{x^2 - x_0^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) - \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)}{x^2 - x_0^2} = \frac{b^2}{a^2}$, 又 $\angle CAB = 90^\circ$, 所以 $k_{BN} \cdot \left(-\frac{1}{k_{AB}}\right) = \frac{b^2}{a^2}$, 又 $k_{BN} = \frac{-y_0 - (-5y_0)}{-x_0 - x_0} = -\frac{2y_0}{x_0}, k_{AB} = \frac{y_0}{x_0}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = 2$, 故 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$. 故选 B.

(2) 对于 A, 当 $a = b$ 时, 因为 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{2}$, 故 A 正确; 对于 B, 当过其右焦点 F 的直线 l 与 Γ 的左、右两支均相交时, $|AB|$ 的最小值为 $2a$ (此时 A, B 为双曲线的两顶点); 当过其右焦点 F 的直线 l 与 Γ 的右支相交于 A, B 两点时, 最短弦长为通径, 即交点的横坐标为 c , 将 $x = c$ 代入双曲线方程得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 此时 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$. 由于 a 与 b 的大小关系不确定, 故 $|AB|$ 的最小值不一定为 $2a$, 故 B 错误; 对于 C, 若满足 $|AB| = 2a$ 的直线 l 恰有一条, 则由选项 B 可知 $2a < \frac{2b^2}{a}$, 即 $b^2 > a^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > \sqrt{2}$, 故 C 正确; 对于 D, 若满足 $|AB| = 2a$

的直线 l 恰有三条, 则由选项 B 可知 $2a > \frac{2b^2}{a}$, 即 $b^2 < a^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} < \sqrt{2}$, 又 $e > 1$, 所以 $1 < e < \sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

变式题 2 解: (1) 由题意可得 $\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \\ \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = 2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a^2 = 1, \\ b^2 = 3, \end{cases}$ 故 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 可设 $A(x_A, y_A)$, 则 $B(x_A, -y_A)$, 则 $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A), \overrightarrow{OB} = (x_A, -y_A)$, 将点 A 的坐标代入双曲线方程得 $x_A^2 - \frac{y_A^2}{3} = 1$, 又

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A^2 - y_A^2 = 0$, 解得 $y_A = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, 此时 $|AB| = 2|y_A| = \sqrt{6}$. 当直线 l

的斜率存在时, 可设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3 - k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 3 = 0$, 故 $3 - k^2 \neq 0$, $\Delta = 4k^2m^2 + 4(m^2 + 3)(3 - k^2) > 0$, 则

$x_1 + x_2 = \frac{2km}{3 - k^2}, x_1x_2 = \frac{-m^2 - 3}{3 - k^2}$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = (1 + k^2) \cdot \frac{-m^2 - 3}{3 - k^2} + km \cdot \frac{2km}{3 - k^2} + m^2 = 0$, 化简得 $3k^2 + 3 = 2m^2$, 此时 $\Delta = 6(k^2 + 9) > 0$, 故 $|AB| = \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2km}{3 - k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-m^2 - 3}{3 - k^2}} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\frac{12(m^2 - k^2 + 3)}{(3 - k^2)^2}} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{k^4 + 10k^2 + 9}{k^4 - 6k^2 + 9}} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \frac{16k^2}{k^4 - 6k^2 + 9}}$. 当 $k = 0$ 时, $|AB| = \sqrt{6}$; 当 $k \neq 0$ 时, $|AB| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \frac{16}{k^2 + \frac{9}{k^2} - 6}}$. $\because 3 - k^2 \neq 0, \therefore k^2 + \frac{9}{k^2} > 2\sqrt{k^2 \cdot \frac{9}{k^2}} = 6$, 故 $\frac{16}{k^2 + \frac{9}{k^2} - 6} > 0$,

故 $|AB| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \frac{16}{k^2 + \frac{9}{k^2} - 6}} > \sqrt{6}$.

综上所述, $|AB|$ 的取值范围为 $[\sqrt{6}, +\infty)$.

第 55 讲 抛物线

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 相等 焦点 准线

2. $\left(\frac{p}{2}, 0\right) \left(-\frac{p}{2}, 0\right) \left(0, \frac{p}{2}\right) \left(0, -\frac{p}{2}\right)$ $1 \quad x = -\frac{p}{2} \quad x = \frac{p}{2}$

$y = -\frac{p}{2} \quad y = \frac{p}{2} \quad x_0 + \frac{p}{2} \quad -x_0 + \frac{p}{2}$

$y_0 + \frac{p}{2} \quad -y_0 + \frac{p}{2}$

【对点演练】

1. (4, 0) [解析] 抛物线的标准方程为 $y^2 = 16x$, 所以其焦点坐标为 (4, 0).

2. $\frac{9}{7}$ [解析] 以拱顶为坐标原点, 水平向右的方向为 x 轴的正方向, 竖直向上的方向为 y 轴的正方向建立平面直角坐标系. 设抛物线的方程为 $x^2 = -2py$ ($p > 0$), 设 $A\left(\frac{3}{2}, t\right)$, $B(2, t-1)$, 则

$$\begin{cases} \frac{9}{4} = -2pt, \\ 4 = -2p(t-1), \end{cases} \text{解得} \begin{cases} t = -\frac{9}{7}, \\ p = \frac{7}{8}, \end{cases} \text{所以暴雨后的水面离桥拱顶的距离为} \frac{9}{7} \text{ m.}$$

3. $\frac{31}{16}$ [解析] 抛物线的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{4}y$, 则焦点为 $F\left(0, \frac{1}{16}\right)$, 准线方程为 $y = -\frac{1}{16}$. 因为点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线上,

$$\text{且 } |PF| = 2, \text{ 所以 } y_0 + \frac{1}{16} = 2, \text{ 即 } y_0 = 2 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

4. $y^2 = 8x$ 或 $x^2 = y$ [解析] 设抛物线的方程为 $y^2 = kx$ ($k \neq 0$) 或 $x^2 = my$ ($m \neq 0$), 将 $P(2, 4)$ 的坐标代入, 可得 $k = 8$, $m = 1$, 故所求抛物线的方程为 $y^2 = 8x$ 或 $x^2 = y$.

5. 3 [解析] ①当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的斜率为 k , 则当 $k = 0$ 时, 直线 l 的方程为 $y = 2$, 满足直线 l 与抛物线 $y^2 = 2x$ 有且只有一个公共点; 当 $k \neq 0$ 时, 直线 l 是抛物线的切线, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$, 代入抛物线的方程可得 $k^2x^2 + (4k-2)x + 4 = 0$, 由 $\Delta = (4k-2)^2 - 4k^2 \cdot 4 = 0$, 得 $k = \frac{1}{4}$, 故切线方程

为 $y = \frac{1}{4}x + 2$. ②当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = 0$, 满足直线 l 与抛物线 $y^2 = 2x$ 有且只有一个公共点. 综上, 满足题意的直线 l 共有 3 条.

● 课堂考点探究

- 例 1 [思路点拨] (1) 由抛物线的定义结合梯形性质即可求得结果. (2) 先求得抛物线的焦点坐标和准线方程, 设 $P(m, n)$, 得到 Q 的坐标, 利用抛物线的定义和两点间的距离公式结合已知条件, 可得所求距离.

(1) B (2) A [解析] (1) 由题意知抛物线的准线方程为 $x = -1$, 过点 M, N 作准线的垂线, 垂足分别为 M', N' , 根据抛物线的定义得 $|MF| = |MM'|$, $|NF| = |NN'|$, 所以 $|MF| + |NF| = |MM'| + |NN'|$, 所以线段 MN 的中点到准线的距离为 $\frac{1}{2}(|MF| + |NF|) = \frac{5}{2}$, 所以线段

MN 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.

(2) 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 $F(0, 1)$, 准线方程为 $y = -1$. 设 $P(m, n)$, $n > 0$, 则 $Q(m, -1)$, $m^2 = 4n$, 由抛物线的定义可得 $|PF| = |PQ| = n + 1$. 在 $\triangle PQF$ 中, $\angle PFQ = \angle PQF = 30^\circ$, $\angle FPQ = 120^\circ$, 可得 $|FQ| = \sqrt{3}|PQ| = \sqrt{3}(n+1)$, 即 $\sqrt{m^2 + 4} = \sqrt{4n+4} = \sqrt{3}(n+1)$, 解得 $n = \frac{1}{3}$ 或 $n = -1$ (舍去), 则 $|PQ| = n + 1 = \frac{4}{3}$. 故选 A.

- 变式题 (1) C (2) B [解析] (1) 由题意得 $|y_A| = 4$, $x_A + \frac{p}{2} = 5$, 其中 $y_A^2 = 2px_A$, 故 $2p\left(5 - \frac{p}{2}\right) = 16$, 解得 $p = 2$ 或 8. 故选 C.

(2) 由题设知, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 又 $\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{OF}$,

所以 $B\left(\frac{5p}{2}, 0\right)$. 因为线段 AB 的垂直平分线经过点 F , 所以 $|AF| = |BF| = 2p$. 不妨设 $A(x_0, y_0)$ 且 $y_0 > 0$, 则 $|AF| = x_0 + \frac{p}{2} = 2p$, 可得 $x_0 = \frac{3p}{2}$, 故 $y_0 = \sqrt{3}p$,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{\left(\frac{5p}{2} - \frac{3p}{2}\right)^2 + 3p^2} = 2p,$$

所以 $\frac{|AB|}{|AF|} = 1$. 故选 B.

- 例 2 [思路点拨] (1) 将双曲线的方程化为标准方程, 得到双曲线的左顶点, 即可得到抛物线的焦点坐标, 进而求解; (2) 分情况设出抛物线的方程, 求出 A 的横坐标, 再根据焦半径公式代入求解; (3) 由正三角形的面积结合性质得到点 A 的坐标, 代入抛物线方程即可求解.

解: (1) 将双曲线方程 $16x^2 - 9y^2 = 144$ 化为标准方程, 得 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, 故双曲线的左顶点为 $(-3, 0)$, 所以抛物线的焦点为 $(-3, 0)$, 抛物线的开口方向向左, 可设抛物线的标准方程为 $y^2 = -2px$ ($p > 0$), 则 $\frac{p}{2} = 3$, 解得 $p = 6$, 所以所求抛物线的方程是 $y^2 = -12x$.

(2) 当焦点在 x 轴的正半轴上时, 设抛物线的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 当 $y = -3$ 时, $x = \frac{9}{2p}$, 由 $|AF| = \frac{9}{2p} + \frac{p}{2} = 5$, 得 $p^2 - 10p + 9 = 0$, 解得 $p = 1$ 或 $p = 9$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = 2x$ 或 $y^2 = 18x$. 当焦点在 x 轴的负半轴上时, 设抛物线的方程为 $y^2 = -2mx$ ($m > 0$), 当 $y = -3$ 时, $x = -\frac{9}{2m}$, 由 $|AF| = \frac{9}{2m} + \frac{m}{2} = 5$, 得 $m^2 - 10m + 9 = 0$, 解得 $m = 1$ 或 $m = 9$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = -2x$ 或 $y^2 = -18x$. 综上可知, 所求抛物线的方程为 $y^2 = \pm 2x$ 或 $y^2 = \pm 18x$.

(3) 根据抛物线的对称性, 可知 $AB \perp x$ 轴. 因为正三角形 OAB 的面积是 $4\sqrt{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2 = 4\sqrt{3}$, 故 $|AB| = 4$. 设 AB 与 x 轴交于点 C , 则 $|OC| = 2\sqrt{3}$, 故可设点 A 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 2)$, 将点 A 的坐标代入抛物线方程得 $4 = 4\sqrt{3}p$, 解得 $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故所求抛物线的方程为 $y^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

变式题 (1) 6 (2) $y^2 = 4x$ [解析] (1) 方法一: 根据题意设直线的方程为 $y = kx$, $\therefore$ 直线与圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 3$ 相切, $\therefore$ 圆心 $C(-2, 0)$ 到直线 $y = kx$ 的距离 $d = \frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{3}$, 解得 $k = \pm\sqrt{3}$, 不妨令

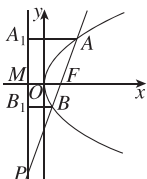
$$k = \sqrt{3}, \text{ 由 } \begin{cases} y = \sqrt{3}x, \\ y^2 = 2px, \end{cases} \text{ 得 } P\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\therefore |OP| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 8, \text{ 可得 } p = 6.$$

方法二: 由题得, 圆心 $C(-2, 0)$, 半径 $r = \sqrt{3}$, $\therefore$ 直线与圆相切, $\therefore$ 直线的斜率为 $\pm\sqrt{3}$, 不妨令 $k = \sqrt{3}$, 则直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$. 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 A ,

在 $\text{Rt}\triangle OPA$ 中, $\angle POA = \frac{\pi}{3}$, $OP = 8$, 可得 $P(4, 4\sqrt{3})$, 又点 P 在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上, $\therefore p = 6$.

(2) 如图, 记 C 的准线与 x 轴交于点 M , 过 A, B 分别作准线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 因为 $PB = 3BF$, 所以 $|PB| = 3|BF|$, 即 $|PB| = 3|BB_1|$. 因为 $|AF| = 3$, 所以 $|AA_1| =$



3. 由 $\triangle PBB_1 \sim \triangle PAA_1$ 可知 $|PA| = 9$, 所以 $|PF| = 6$, 又 $|FM| = p$, $\triangle PFM \sim \triangle PBB_1$, 所以 $p = |FM| = 2$, 故 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

- 例 3 [思路点拨] (1) 求出抛物线的焦点坐标, 可得 $p = 2$, 即可判断 A; 联立直线与抛物线的方程, 得到 A, B 的坐标, 可得 $|AB|$, 即可判断 B; 确定 M, N 的坐标, 可计算 $k_{NF} \cdot k_{MF}$, 即可判断 C; 求出线段 AB 的中点的坐标, 即可判断 D. (2) 由抛物线的性质知 A, B 两点关于 x 轴对称, 设出坐标, 结合直线 AF, OB 的斜率之积为 -1 即可求解.

(1) BD (2) $x = \frac{5p}{2}$ [解析] (1) 由题意, 不妨设点 A 在第一象限内, 直线 $l: \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$,

又 l 经过抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F , 所以 $F(1, 0)$, 可得 $p = 2$, 故抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 故 A 中说法正确. 由 $\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 可得 $3x^2 - 10x + 3 = 0$, 解得 $x = 3$ 或 $x = \frac{1}{3}$, 可得 $A(3, 2\sqrt{3})$,

$B\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 所以 $|AB| =$

$$\sqrt{\left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{16}{3}, \text{ 故 B 中说法错误. 易知 } M(-1, 2\sqrt{3}),$$

$N\left(-1, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $F(1, 0)$, 可得 $k_{NF} \cdot$

$$k_{MF} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{2}} \times \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{2}} = -1, \text{ 则 } MF \perp NF,$$

即 $\angle MFN = 90^\circ$, 故 C 中说法正确. 因为

$A(3, 2\sqrt{3}), B\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 所以线段 AB 的中点为 $\left(\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 则线段 AB 的

中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{3}$, 故 D 中说法错误. 故选 BD.

(2) 由抛物线的性质知 A, B 两点关于 x 轴对称, 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(x_0, -y_0)$.

由题意知 $AF \perp OB$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 所以

$$k_{AF} \cdot k_{OB} = \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}} \cdot \frac{-y_0}{x_0} = -1, \text{ 所以}$$

$$y_0^2 = x_0\left(x_0 - \frac{p}{2}\right), \text{ 即 } 2px_0 = x_0\left(x_0 - \frac{p}{2}\right), \text{ 因为 } x_0 \neq 0, \text{ 所以 } 2p = x_0 - \frac{p}{2}, \text{ 即}$$

$$x_0 = \frac{5p}{2}, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的方程为 } x = \frac{5p}{2}.$$

- 变式题 (1) A (2) C [解析] (1) 不妨设

$P\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right)$ ($y_0 < 0, \frac{y_0^2}{4} > 1$), 由抛物线的对称性及正方形的性质可得 $-y_0 = \frac{y_0^2}{4} - 1$, 可得 $y_0 = -(2 + 2\sqrt{2})$,

$$\therefore |PF| = \frac{y_0^2}{4} + 1 = 4 + 2\sqrt{2}. \text{ 故选 A.}$$

(2) 因为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$, M 在抛物线上, 所以 $|MF| = x_M + 1 = 6$, 故 $x_M = 5$. 不妨设 M 在第一象限内, 则 $M(5, 2\sqrt{5})$, 所以 $S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} \times (5 - 0) \times 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. 故选 C.

- 例 4 [思路点拨] (1) 思路一: 先求出抛物线 C 的方程, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将直线 l 的方程与抛物线 C 的方程联立, 利用根与系数的关系求出 $x_1 x_2$ 的值, 再根据抛物线

的定义用 x_1, x_2 表示出 $2|AF| + 3|BF|$, 结合基本不等式求解即可. 思路二: 先求出抛物线 C 的方程, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将直线 l 的方程与抛物线 C 的方程联立, 利用根与系数的关系求出 $x_1 x_2$ 的值, 再

根据抛物线的定义得到 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = 1$, 利用基本不等式求解即可. (2) 根据点 A 在抛物线 C 上, 求出 p , 即可判断 A ; 利用导数的几何意义求出抛物线 C 在点 A 处的切线方程, 即可判断 B ; 设出直线 PQ 的方程, 联立直线 PQ 的方程与抛物线 C 的方程, 利用根与系数的关系及两点间的距离公式即可判断 C, D .

(1) B (2) BCD [解析] (1) 方法一: 因为抛物线 C 的焦点 F 到准线的距离为 2, 所以 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 焦点为 $F(1, 0)$. 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = ty + 1, \end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4$, 故 $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = 1$. 又 $|AF| = x_1 + \frac{p}{2} = x_1 + 1$, $|BF| = x_2 + \frac{p}{2} = x_2 + 1$, 所以 $2|AF| + 3|BF| = 2(x_1 + 1) + 3(x_2 + 1) = 2x_1 + 3x_2 + 5 \geq 2\sqrt{6x_1 x_2} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$, 当且仅当 $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立, 故 $2|AF| + 3|BF|$ 的最小值为 $2\sqrt{6} + 5$. 故选 B.

方法二: 因为抛物线 C 的焦点 F 到准线的距离为 2, 所以 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 焦点为 $F(1, 0)$. 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = ty + 1, \end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4$, 故 $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = 1, x_1 + x_2 = t(y_1 + y_2) + 2 = 4t^2 + 2$, 则 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} = 1$, 故 $2|AF| + 3|BF| = (2|AF| + 3|BF|) \left(\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} \right) = 5 + \frac{2|AF|}{|BF|} + \frac{3|BF|}{|AF|} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{3|BF|}{|AF|} \cdot \frac{2|AF|}{|BF|}} = 5 + 2\sqrt{6}$, 当且仅当 $|AF| = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, |BF| = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立, 故 $2|AF| + 3|BF|$ 的最小值为 $2\sqrt{6} + 5$. 故选 B.

(2) 因为点 $A(1, 1)$ 在抛物线 C 上, 所以 $2p = 1$, 所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = y$, 其准线方程为 $y = -\frac{1}{4}$, 故 A 选项错误; 由 $y' = 2x$, 知抛物线 C 在点 A 处的切线的斜率为 2, 则切线方程为 $y = 2x - 1$, 恰过点 B , 故 B 选项正确; 由题意知直线 PQ 的斜率存在, 设直线 PQ 的方程为 $y = kx - 1$, 代入 $x^2 = y$ 并整理得 $x^2 - kx + 1 = 0$, 则 $\Delta = k^2 - 4 > 0$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 则 $x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = 1$, 所以 $|OP| \cdot |OQ| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(x_1^2 + x_1^4) \cdot (x_2^2 + x_2^4)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 (1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2)} = \sqrt{(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2} > \sqrt{2x_1 x_2 + 2} = 2 = |OA|^2$, 故 C 选项正确; $|BP| \cdot |BQ| = \sqrt{[x_1^2 + (y_1 + 1)^2] \cdot [x_2^2 + (y_2 + 1)^2]} =$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1^2 + k^2 x_1^2) \cdot (x_2^2 + k^2 x_2^2)} = \\ & \sqrt{x_1^2 x_2^2 (1 + k^2) \cdot (1 + k^2)} = \\ & \sqrt{(1 + k^2) \cdot (1 + k^2)} = 1 + k^2 > 5 = |BA|^2, \text{故 } D \text{ 选项正确. 故选 } BCD. \end{aligned}$$

变式题 1 (1) C (2) $4 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

[解析] (1) 抛物线 $E: y^2 = 3x$ 的焦点为 $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, 设直线 AB 的方程为 $x = my + n, n \neq 0, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y^2 = 3x, \\ x = my + n, \end{cases}$ 可得 $y^2 - 3my - 3n = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 3m, y_1 y_2 = -3n$. 由 $OA \perp OB$, 可得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$, 即 $\frac{(y_1 y_2)^2}{9} + y_1 y_2 = 0$, 即 $n^2 - 3n = 0$, 可得 $n = 3$, 则直线 $AB: x = my + 3$ 过定点 $P(3, 0)$. 由 $OC \perp AB$, 可得 C 的轨迹是以 OP 为直径的圆 (除去原点), 其轨迹方程为 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} (x \neq 0)$, 所以 $|CF|$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right]$, 即 $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right]$. 故选 C.

(2) 如图, 延长 AF 交抛物线 E 于点 D , 连接 CD , 过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H , 下面先证明直线 CA, CD 关于 x 轴对称. 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), D\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 由抛物线焦点弦的性质可得 $y_1 y_2 = -p^2 = -4$, 又 $C(-1, 0)$, 则 $k_{CA} = \frac{y_1 - 0}{\frac{y_1^2}{4} - (-1)} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} + 1}$, $k_{CD} = \frac{y_2 - 0}{\frac{y_2^2}{4} - (-1)} = \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4} + 1}$, 故 $k_{CA} + k_{CD} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} + 1} + \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4} + 1} = \frac{4y_1}{y_1^2 + 4} + \frac{4y_2}{y_2^2 + 4} = \frac{4 \times \left(-\frac{4}{y_2}\right)}{\left(-\frac{4}{y_2}\right)^2 + 4} + \frac{4y_2}{y_2^2 + 4} = -\frac{4y_2}{\frac{y_2^2}{4} + 4} + \frac{4y_2}{\frac{y_2^2}{4} + 4} = 0$, 所以直线 CA, CD 关于 x 轴对称. 又 BF 为 $\angle AFC$ 的平分线, 所以 $\angle AFB = \angle CFB = \angle CFD = 60^\circ$, 所以 $\angle AFH = 60^\circ$. 由焦半径公式得, $|AF| = \frac{p}{1 - \cos \angle AFH} = \frac{2}{1 - \cos 60^\circ} = 4$, 则 $|AH| = 2\sqrt{3}, |FH| = 2$. 又 $F(1, 0)$, 所以 $A(3, 2\sqrt{3})$ 或 $A(3, -2\sqrt{3})$, 又 $C(-1, 0)$, 所以直线 l 的斜率 $k = \frac{2\sqrt{3} - 0}{3 - (-1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k = \frac{-2\sqrt{3} - 0}{3 - (-1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以直线 l 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式题 2 解: (1) 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, 由 $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$ 可得 $y^2 - 4py + 2p = 0$, 所以 $y_A + y_B = 4p, y_A y_B = 2p$, 所以 $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{y_A^2 + y_B^2 - 4y_A y_B} = 4\sqrt{15}$, 即 $2p^2 - p - 6 = 0$, 又 $p > 0$, 所以 $p = 2$. (2) 由 (1) 可得 $F(1, 0)$, 因为直线 MN 的斜率不可能为零, 所以设直线 $MN: x = my + n, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + n, \end{cases}$ 可得 $y^2 - 4my - 4n = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4n$. 由 $\Delta = 16m^2 + 16n > 0$, 得 $m^2 + n > 0$. 因为 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 所以 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0$, 即 $(my_1 + n - 1)(my_2 + n - 1) + y_1 y_2 = 0$, 即 $(m^2 + 1)y_1 y_2 + m(n - 1)(y_1 + y_2) + (n - 1)^2 = 0$, 将 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4n$ 代入上式得 $4m^2 = n^2 - 6n + 1$, 故 $4(m^2 + n) = (n - 1)^2 > 0$, 所以 $n \neq 1$. 由 $n^2 - 6n + 1 \geq 0$, 解得 $n \geq 3 + 2\sqrt{2}$ 或 $n \leq 3 - 2\sqrt{2}$. 设点 F 到直线 MN 的距离为 d , 则 $d = \frac{|n - 1|}{\sqrt{1 + m^2}}$, 又 $|MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1 + m^2} \sqrt{16m^2 + 16n} = \sqrt{1 + m^2} \sqrt{4(n^2 - 6n + 1) + 16n} = 2\sqrt{1 + m^2} |n - 1|$, 所以 $\triangle MFN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times d \times |MN| = \frac{1}{2} \times \frac{|n - 1|}{\sqrt{1 + m^2}} \times 2\sqrt{1 + m^2} |n - 1| = (n - 1)^2$, 又 $n \geq 3 + 2\sqrt{2}$ 或 $n \leq 3 - 2\sqrt{2}$, 所以当 $n = 3 - 2\sqrt{2}$ 时, $\triangle MFN$ 的面积取到最小值 $(2 - 2\sqrt{2})^2 = 12 - 8\sqrt{2}$.

增分微课 8 圆锥曲线中的轨迹问题

例 1 A [解析] 由点 $M(-2\sqrt{5}, 0), N(2\sqrt{5}, 0)$, 可得 $|MN| = 4\sqrt{5}$, 则 $|PM| - |PN| = 4 < |MN| = 4\sqrt{5}$, 根据双曲线的定义, 可得点 P 的轨迹为以 M, N 为焦点的双曲线的右支, 且 $2a = 4, 2c = 4\sqrt{5}$, 可得 $a = 2, c = 2\sqrt{5}$, 则 $b^2 = c^2 - a^2 = 16$, 所以点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 (x \geq 2)$. 故选 A.

变式题 ABC [解析] 对于 A, 连接 QA, OA , 由已知得 $|QA| = |QP|$, 所以 $|QO| + |QA| = |QO| + |QP| = |OP| = r$. 又因为点 A 在圆内, 所以 $|OA| < |OP|$, 根据椭圆的定义, 可得点 Q 的轨迹是以 O, A 为焦点, r 为长轴长的椭圆, A 正确. 对于 B, 当点 A 在圆 O 上时, 点 Q 与圆 O 重合, 点 Q 的轨迹为定点, 故 B 正确. 对于 C, 连接 QA, OA , 由已知得 $|QA| = |QP|$, 所以 $||QO| - |QA|| = ||QO| - |QP|| = |OP| = r$. 又因为点 A 在圆外, 所以 $|OA| > |OP|$, 根据双曲线的定义, 可得点 Q 的轨迹是以 O, A 为焦点, r 为实轴长的双曲线, C 正确. 对于 D, 当点 A 与圆 O 重合时, 点 Q 的轨迹为圆, 所以点 Q 的轨迹不可能为抛物线, D 错误. 故选 ABC.

例 2 (1) B (2) $y^2 = 4x (x \neq 0, x \neq 1)$ [解析] (1) 设动点 $M(x, y) (y > 0)$, 因为 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 直线 AM 与直线 BM 的斜率之积为 2, 所以 $\frac{y}{x + 1} \cdot \frac{y}{x - 1} = 2 (y > 0)$, 化简得 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 (y > 0)$. 故选 B.

(2) 设 $B(x, y)$, 因为 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_3}$, 所以 $\frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{x}{y}} + \frac{x}{y - 2} = \frac{x - 1}{y - 2} (x \neq 0, x \neq 1)$, 化简可得 $y^2 = 4x (x \neq 0, x \neq 1)$, 故曲线 E 的方程为 $y^2 = 4x (x \neq 0, x \neq 1)$.

变式题 解: 设 $M(x, y)$, 因为动点 M 到直线 $x = 3$ 的距离是到点 $(2, 0)$ 的距离的 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍, 所以 $|x - 3| = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$, 化简整理可得 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 故动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

例 3 $y = 3(x - 2)^2 + 1$ [解析] 设 $C(m, n), \triangle ABC$ 的重心为 $G(x, y)$, 则 $3x = 0$

+6+m, 3y=0+0+n, 即 m=3x-6, n=3y. 由 n=m^2+3, 可得 3y=(3x-6)^2+3, 化简可得 y=3(x-2)^2+1, 故 △ABC 的重心 G 的轨迹方程为 y=3(x-2)^2+1.

变式题 (1) A (2) x^2+y^2=2(y≠0)

[解析] (1) 设 M(x, y), 由 M 为线段 OP 的中点, 得 P(2x, 2y), 将点 P 的坐标代入双曲线方程, 得 \frac{(2x)^2}{4} - (2y)^2 = 1, 即

x^2 - 4y^2 = 1, 故点 M 的轨迹方程是 x^2 - 4y^2 = 1, 故选 A.

(2) 设 M(x_0, y_0) (y_0 ≠ 0), 由题意可得 N(x_0, 0), 设 P(x, y), 由点 P 满足 \overrightarrow{NP} = \sqrt{2} \overrightarrow{NM}, 可得 (x-x_0, y) = \sqrt{2}(0, y_0), ∴ x-x_0=0, y=\sqrt{2}y_0, 则 x_0=x, y_0=\frac{y}{\sqrt{2}}, 又 \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1 (y_0 ≠ 0), ∴ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 (y ≠ 0), ∴ 点 P 的轨迹方程为 x^2 + y^2 = 2 (y ≠ 0).

例 4 ABD **[解析]** 对于 A, 依题知曲线 C 的轨迹方程为 \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \cdot |x-a| = 4. ∵ 点 (0, 0) 在曲线 C 上, ∴ |a| = 2, 又 a < 0, ∴ a = -2, 故 A 正确. 对于 B, 曲线 C 的方程为 |x+2| \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4, 令 y=0, 得 |x^2-4|=4, ∴ x=0 或 x=2\sqrt{2}, 故 B 正确. 对于 C, 由 |x+2| \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4, 得 (x-2)^2 + y^2 = \frac{16}{(x+2)^2}, ∴ y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2, 当 x = \frac{3}{-2} 时, y^2 = \frac{207}{196} > 1, ∴ C 在第一象限的点的纵坐标的最大值大于 1, 故 C 错误. 对于 D, y_0^2 = \left(\frac{4}{x_0+2}\right)^2 - (x_0-2)^2 \leq \left(\frac{4}{x_0+2}\right)^2, 即 y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}, 故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 ②③④ **[解析]** 对于①, 在方程 (x-\cos\theta)^2 + (y-\sin\theta)^2 = 4 中, 令 x=0, 得 \cos^2\theta + (y-\sin\theta)^2 = 4, 即 \cos^2\theta + y^2 - 2y\sin\theta + \sin^2\theta = 1 + y^2 - 2y\sin\theta = 4, 所以 2\sin\theta = y - \frac{3}{y}. 因为 0 \leq \theta \leq \pi, 所以 0 \leq \sin\theta \leq 1, 所以 0 \leq 2\sin\theta \leq 2, 所以 0 \leq y - \frac{3}{y} \leq 2, 解得 -\sqrt{3} \leq y \leq -1 或 \sqrt{3} \leq y \leq 3, 所以点 A 的坐标为 (0, \sqrt{3}), 故①错误; 对于②, 由题设 \begin{cases} x=2\cos\alpha+\cos\theta, \\ y=2\sin\alpha+\sin\theta \end{cases} (\alpha 为参数), 则 M(2\cos\alpha+\cos\theta, 2\sin\alpha+\sin\theta), 所以 |OM| = \sqrt{(2\cos\alpha+\cos\theta)^2 + (2\sin\alpha+\sin\theta)^2} = \sqrt{5+4\cos(\alpha-\theta)}, 当 \alpha=\theta 时, \cos(\alpha-\theta)=1, 即 M 到原点的距离的最大值为 3, 故②正确; 对于③, 由①可知, D(0, -\sqrt{3}), C(0, 3), 所以 |CD|=3+\sqrt{3}, 故③正确; 对于④, “水滴”图形是由一个半径为 1 的半圆、一个边长为 2 的等边三角形和两个全等的弓形组成的, 所以白色“水滴”图形的面积 S = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 + 2 \left(\frac{1}{6} \times \pi \times 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \right) = \frac{11}{6} \pi - \sqrt{3}, 故④正确. 故填②③④.

第 56 讲 圆锥曲线热点问题

/第 1 课时 长度、斜率、面积问题/

● 课堂考点探究

例 1 **[思路点拨]** (1) 将点 P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) 的坐标代入椭圆 C 的方程, 化简整理, 即可求出离心率; (2) 设直线 OQ 的斜率为 k, 点 Q 的坐标为 (x_0, y_0), 将点 Q 的坐标代入直线 OQ 与椭圆 C 的方程, 消去 y_0

得到 x_0^2, 再由 |AQ|=|AO| 得出 x_0, 即可建立关于 k 的方程, 求解即可.

解: (1) ∵ 点 P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) 在椭圆 C 上,

∴ \frac{a^2}{5a^2} + \frac{a^2}{2b^2} = 1, 整理得 \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{8}, ∴ 椭圆

C 的离心率 e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.

(2) 由题意可知, 点 A 的坐标为 (-a, 0), |AO|=a. 易知直线 OQ 的斜率存在, 设直线 OQ 的斜率为 k, 则其方程为 y=kx,

设点 Q 的坐标为 (x_0, y_0), 则 \begin{cases} y_0=kx_0, \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \end{cases}

消去 y_0, 整理得 x_0^2 = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2} ①. 由 |AQ|=|AO|, 得 (x_0+a)^2 + k^2 x_0^2 = a^2, 整理得 (1+k^2)x_0^2 + 2ax_0 = 0, 又 x_0 \neq 0,

∴ x_0 = -\frac{2a}{1+k^2} ②. 把②代入①得

\frac{4a^2}{(1+k^2)^2} = \frac{a^2 b^2}{k^2 a^2 + b^2}, 整理得 (1+k^2)^2 =

4k^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 4, 由(1)知 \frac{a^2}{b^2} = \frac{8}{5}, 则 (1+

k^2)^2 = \frac{32}{5}k^2 + 4, 即 5k^4 - 22k^2 - 15 = 0,

可得 k^2 = 5, 解得 k = \pm\sqrt{5}, 故直线 OQ 的斜率为 \pm\sqrt{5}.

变式题 1 **解:** (1) 因为椭圆 C 的一个顶点为

(2, 0), 离心率是 \frac{\sqrt{3}}{2}, 所以 \begin{cases} a=2, \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}

解得 \begin{cases} a=2, \\ c=\sqrt{3}, \end{cases} 又因为 b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,

所以椭圆 C 的标准方程为 \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.

(2) 由题意可得 \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1, \end{cases} 两式相减,

得 \frac{1}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2) + (y_1+y_2)(y_1-y_2) = 0, 所以 \frac{1}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2) = -(y_1+y_2)(y_1-y_2), 又

因为线段 AB 的中点的横坐标为 -\frac{1}{2},

所以 x_1+x_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, 且线

段 AB 的中点的纵坐标为 k\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{k}{2}, 所以 y_1+y_2 = 2 \times \frac{k}{2} = k,

所以 -\frac{1}{4}(x_1-x_2) = -k(y_1-y_2), 所

以 \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{-\frac{1}{4}}{-k} = \frac{1}{4k}, 又因为 k =

\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, 所以 k = \frac{1}{4k}, 所以 k^2 = \frac{1}{4}, 又因

为 k > 0, 所以 k = \frac{1}{2}, 所以直线 l: y =

\frac{1}{2}(x+1). 由 \begin{cases} y=\frac{1}{2}(x+1), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} 可得

2x^2 + 2x - 3 = 0, 所以 x_1+x_2 = -1,

x_1x_2 = -\frac{3}{2}, 所以 |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot

\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} \times

\sqrt{1+4 \times \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{35}}{2}, 所以直线 l 的斜率

为 \frac{1}{2}, 弦长 |AB| 为 \frac{\sqrt{35}}{2}.

变式题 2 **解:** (1) 由题意知 \frac{9}{a^2} - \frac{7}{b^2} = 1,

a^2 + b^2 = 4, 可得 a^4 - 20a^2 + 36 = 0, 则 a^2 = 2 或 a^2 = 18. 当 a^2 = 2 时, b^2 = 2; 当 a^2 = 18 时, b^2 = -14, 舍去. 故双曲线 C

的方程为 \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1.

(2) 设直线 l 的方程为 x = ty + 2, 由 \begin{cases} x=ty+2, \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} 得 (t^2-1)y^2 + 4ty + 2 = 0,

则 t^2-1 \neq 0, \Delta = 16t^2 - 8(t^2-1) = 8t^2 + 8 > 0, 设 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), 则 y_1 +

y_2 = -\frac{4t}{t^2-1}, y_1y_2 = \frac{2}{t^2-1}. 由直线 l 与双

曲线 C 的右支交于 A, B 两点, 结合直线 l

的斜率大于 0, 可得 \begin{cases} t > 0, \\ y_1y_2 = \frac{2}{t^2-1} < 0, \end{cases} 解得

0 < t < 1. 由 PF 平分 \angle APB, 得 \frac{|PA|}{|PB|} =

\frac{|AF|}{|BF|}, 即 \frac{\sqrt{(x_1-3)^2 + (y_1+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(x_2-3)^2 + (y_2+\sqrt{7})^2}} =

\left| \frac{y_1}{y_2} \right|, 即 \frac{\sqrt{(ty_1-1)^2 + (y_1+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(ty_2-1)^2 + (y_2+\sqrt{7})^2}} =

\left| \frac{y_1}{y_2} \right|, 等号两边同时平方得

(t^2+1)y_1^2 + 2(\sqrt{7}-t)y_1 + 8 = \frac{y_1^2}{y_2^2}, 整理

可得 4(y_1+y_2) + (\sqrt{7}-t)y_1y_2 = 0,

将 y_1+y_2 = -\frac{4t}{t^2-1}, y_1y_2 = \frac{2}{t^2-1} 代入,

可得 \frac{-16t}{t^2-1} + \frac{2(\sqrt{7}-t)}{t^2-1} = 0, 解得 t = \frac{\sqrt{7}}{9} \in

(0, 1), 符合题意, 故直线 l 的方程为 x =

\frac{\sqrt{7}}{9}y + 2, 即 9x - \sqrt{7}y - 18 = 0.

例 2 **[思路点拨]** (1) 根据已知条件, 求出 b, c, 再结合 a^2 = b^2 + c^2 求出 a, 即可求

解; (2) 设出直线 AB 的方程, 并与椭圆的方程联立, 设 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), 结合

根与系数的关系得到 x_1+x_2, x_1x_2, 结合

椭圆的对称性利用 k_{AC} + k_{BC} = 0 或 A, C, D 三点共线即可求解.

解: (1) 因为椭圆 E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >

0), 以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的

四边形是边长为 2 的正方形, 所以 b =

c = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, 故 a^2 = b^2 + c^2 = 4, 可得 a =

2, 所以椭圆 E 的方程为 \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, 离

心率 e = \frac{\sqrt{2}}{2}.

(2) 由题意知直线 AB 的斜率存在, 且不

为 0, 设直线 AB: y = kx + t (t > \sqrt{2}, k \neq

0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2).

由 \begin{cases} y=kx+t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} 消去 y 并整理得 (1+

2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 4 = 0, 由题意可知,

\Delta = 16k^2t^2 - 8(2k^2+1)(t^2-2) = 8(4k^2+2-t^2) > 0, 即 k, t 应满足 4k^2+

2-t^2 > 0. 由根与系数的关系可知, x_1 +

x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2t^2-4}{1+2k^2}.

方法一 (斜率转化): 直线 AC: y-1 = \frac{y_1-1}{x_1}x, 若直线 BD 的斜率为 0, 则由椭

圆的对称性可知点 B, D 关于 y 轴对称, 所以 $k_{AC} + k_{BC} = 0$, 即 $\frac{y_1-1}{x_1} + \frac{y_2-1}{x_2} = 0$, 即 $\frac{kx_1+t-1}{x_1} + \frac{kx_2+t-1}{x_2} = 0$, 化简得 $2kx_1x_2 + (t-1)(x_1+x_2) = 0$, 将 $x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{2t^2-4}{1+2k^2}$ 代入, 得 $t = 2$. 经检验, $t = 2$ 符合题意, 所以若直线 BD 的斜率为 0, 则 t 的值为 2. 方法二(三点共线): 若直线 BD 的斜率为 0, 则由椭圆的对称性可设 $D(-x_2, y_2)$, 故直线 $AD: y = \frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}(x-x_1) + y_1$, 令 $x = 0$, 则 $y_C = \frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2} = \frac{x_1(kx_2+t) + x_2(kx_1+t)}{x_1+x_2} = \frac{2kx_1x_2 + t(x_1+x_2)}{x_1+x_2} = \frac{4k(t^2-2)}{-4kt} + t = \frac{2}{t} = 1$, 解得 $t = 2$. 经检验, $t = 2$ 符合题意, 所以若直线 BD 的斜率为 0, 则 t 的值为 2.

例 3 [思路点拨] (1) 将点 A 的坐标代入双曲线方程得到 a^2 , 显然直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 与双曲线方程联立, 根据直线 AP, AQ 的斜率之和为 0 及根与系数的关系求解即可; (2) 设直线 AP 的倾斜角为 α , 结合已知条件得到直线 AP 的斜率, 进而求出点 P 的坐标, 根据三角形的面积公式即可求解.

解: (1) 将点 A 的坐标代入双曲线 C 的方程得 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1$, 可得 $a^2 = 2$, 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$. 由题知, 直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 联立直线 l 与双曲线 C 的方程, 可得 $(2k^2-1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$, 则 $\Delta = 8(m^2 + 1 - 2k^2) > 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2-1}$, $x_1x_2 = \frac{2m^2-2}{2k^2-1}$. 由题知 $k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1-1}{x_1-2} + \frac{y_2-1}{x_2-2} = \frac{kx_1+m-1}{x_1-2} + \frac{kx_2+m-1}{x_2-2} = 0$, 化简得 $2kx_1x_2 + (m-1-2k)(x_1+x_2) - 4(m-1) = 0$, 则 $\frac{2k(2m^2-2)}{2k^2-1} + (m-1-2k)(-\frac{4km}{2k^2-1}) - 4(m-1) = 0$, 可得 $(k+1)(m+2k-1) = 0$, 因为直线 l 不过点 A , 所以 $2k+m-1 \neq 0$, 所以 $k = -1$, 即直线 l 的斜率为 -1 .

(2) 设直线 AP 的倾斜角为 α ($\tan \alpha > 0$), 由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 可得 $\tan \frac{\angle PAQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $2\alpha + \angle PAQ = \pi$, 可得 $k_{AP} = \tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle PAQ}{2} \right) = \sqrt{2}$, 即 $\frac{y_1-1}{x_1-2} = \sqrt{2}$, 又 $\frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1$, 所以 $x_1 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$, $y_1 = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}$, 代入直线 l 的方程, 可得 $m = \frac{5}{3}$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{20}{3}$, $x_1x_2 = \frac{68}{9}$. 因为 $|AP| = \sqrt{3}|x_1-2|$, $|AQ| = \sqrt{3}|x_2-2|$, 由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 可得 $\sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2}|AP||AQ|\sin \angle PAQ = \sqrt{2}|x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4| = \frac{16\sqrt{2}}{9}$.

变式题 解: (1) 设圆心为 $Q(x, y)$, 由题意可得 $\sqrt{|x|^2 + 2^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, 整理可得 $y^2 = 4x$, 所以曲线 E 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 由题意可知, 直线 AB 的斜率存在且不为 0, 如图, 设直线 $AB: x = my + n$ ($m \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$. 由 $\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2 - 4my - 4n = 0$, 则 $\Delta_1 = 16m^2 + 16n > 0$, $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1y_2 = -4n$. 直线 $AC: x = \frac{x_1-2}{y_1-1}(y-1) + 2$, 由 $\begin{cases} x = \frac{x_1-2}{y_1-1}(y-1) + 2, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2 - \frac{4(x_1-2)}{y_1-1}y + \frac{4(x_1-2)}{y_1-1} - 8 = 0$, 则 $\Delta_2 > 0$, $y_1 + y_3 = \frac{4(x_1-2)}{y_1-1}$, 即 $y_3 = \frac{4x_1-8}{y_1-1} - y_1$, 由 $y_1^2 = 4x_1$, 可得 $y_3 = \frac{4x_1-8}{y_1-1} - y_1 = \frac{y_1^2-8}{y_1-1} - y_1 = \frac{y_1-8}{y_1-1}$.

同理可得 $y_4 = \frac{y_2-8}{y_2-1}$, 则 $k_{CD} = \frac{y_3-y_4}{x_3-x_4} = \frac{\frac{y_3-8}{y_3-1} - \frac{y_4-8}{y_4-1}}{\frac{y_3^2-8}{y_3-1} - \frac{y_4^2-8}{y_4-1}} = \frac{\frac{y_3-8}{y_3-1} - \frac{y_4-8}{y_4-1}}{\frac{4[y_1y_2 - (y_1+y_2) + 1]}{2y_1y_2 - 9(y_1+y_2) + 16} + \frac{4n+4m-1}{2n+9m-4}}$.

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $k_{AB} = k_{CD}$, 即 $\frac{1}{m} = \frac{4n+4m-1}{2n+9m-4}$, 整理可得 $(2m-1)(m+n-2) = 0$, 由题意可知, 点 $T(2, 1)$ 不在直线 $AB: x = my + n$ 上, 则 $m+n \neq 2$, 即 $m+n-2 \neq 0$, 可得 $2m-1 = 0$, 即 $m = \frac{1}{2}$, 所以直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{1}{m} = 2$.

例 4 [思路点拨] (1) 根据两点在椭圆上, 求得 a, b , 再结合 $c^2 = a^2 - b^2$ 及离心率公式求解即可. (2) 思路一: 以 AP 为 $\triangle ABP$ 的底边, 得到点 B 到直线 AP 的距离, 进而得出过点 B 且与直线 AP 平行的直线 l' 的方程, 与椭圆方程联立, 求出点 B 的坐标, 进而可得 l 的方程; 思路二: 分直线 l 的斜率不存在及存在两种情况讨论, 结合已知条件、点到直线的距离及三角形的面积公式可得答案.

解: (1) 由已知得 $b = 3$, 将点 $P(3, \frac{3}{2})$ 的坐标代入椭圆 C 的方程, 得 $\frac{9}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 12$, $\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 3$, $\therefore C$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

(2) 方法一: 设点 B 到直线 AP 的距离为 d , 由已知得 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}|PA| \cdot d = \frac{1}{2} \times \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \times d = 9$, 解得 $d = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. $k_{AP} = \frac{3 - \frac{3}{2}}{0 - 3} = -\frac{1}{2}$, 易得直线 AP 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$. 设过点 B 且与直线 AP 平行的直线为 l' , 又 l' 与直线 AP 间的距离为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$, 点 B 在椭圆 C 上, $\therefore l'$:

$y = -\frac{1}{2}x + 3$. 联立 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 和 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -3$, $\therefore B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$. 当点 B 的坐标为 $(0, -3)$ 时, l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$; 当点 B 的坐标为 $(-3, -\frac{3}{2})$ 时, l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$. $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

方法二: ① 当 l 的斜率不存在时, $B(3, -\frac{3}{2})$, $\therefore |BP| = 3$, 点 A 到直线 BP 的距离为 3, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不满足题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$, 由 $\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 12k(1-2k)x + (3-6k)^2 - 36 = 0$, $\therefore \Delta = 36(2k+3)^2 > 0$, 故 $k \neq -\frac{3}{2}$, 由根与系数的关系得 $3+x_B = \frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$, $\therefore x_B = \frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$, $\therefore |BP| = \sqrt{1+k^2} \cdot |3-x_B| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又点 A 到直线 BP 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2} \cdot \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = 9$, $\therefore |2k+3| \cdot |k + \frac{1}{2}| = 3+4k^2$, $\therefore |2k+3| \cdot |2k+1| = 8k^2 + 6$, $\therefore 4k^2 + 8k + 3 = 8k^2 + 6(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $4k^2 + 8k + 3 = -8k^2 - 6(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 即 $4k^2 - 8k + 3 = 0(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $12k^2 + 8k + 9 = 0(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 解得 $k = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$, $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

变式题 解: (1) 由题意可得 $\begin{cases} 2b = 2\sqrt{3}, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 6, \\ b^2 = 3, \\ c^2 = 3, \end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \pm 1$, 当直线 l 的方程为 $x = 1$ 时, 由四边形 $OMPN$ 为平行四边形, 可得 $P(2, 0)$, 因为 $\frac{4}{6} + \frac{0}{3} = \frac{2}{3} < 1$, 所以点 $P(2, 0)$ 不在椭圆 C 上, 不符合题意. 当直线 l 的方程为 $x = -1$ 时, 由四边形

$y = -\frac{1}{2}x - 3$. 联立 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 和 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -3$, $\therefore B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$. 当点 B 的坐标为 $(0, -3)$ 时, l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$; 当点 B 的坐标为 $(-3, -\frac{3}{2})$ 时, l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$. $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

方法二: ① 当 l 的斜率不存在时, $B(3, -\frac{3}{2})$, $\therefore |BP| = 3$, 点 A 到直线 BP 的距离为 3, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不满足题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$, 由 $\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 12k(1-2k)x + (3-6k)^2 - 36 = 0$, $\therefore \Delta = 36(2k+3)^2 > 0$, 故 $k \neq -\frac{3}{2}$, 由根与系数的关系得 $3+x_B = \frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$, $\therefore x_B = \frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$, $\therefore |BP| = \sqrt{1+k^2} \cdot |3-x_B| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又点 A 到直线 BP 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2} \cdot \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = 9$, $\therefore |2k+3| \cdot |k + \frac{1}{2}| = 3+4k^2$, $\therefore |2k+3| \cdot |2k+1| = 8k^2 + 6$, $\therefore 4k^2 + 8k + 3 = 8k^2 + 6(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $4k^2 + 8k + 3 = -8k^2 - 6(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 即 $4k^2 - 8k + 3 = 0(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $12k^2 + 8k + 9 = 0(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 解得 $k = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$, $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

方法二: ① 当 l 的斜率不存在时, $B(3, -\frac{3}{2})$, $\therefore |BP| = 3$, 点 A 到直线 BP 的距离为 3, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不满足题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$, 由 $\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 12k(1-2k)x + (3-6k)^2 - 36 = 0$, $\therefore \Delta = 36(2k+3)^2 > 0$, 故 $k \neq -\frac{3}{2}$, 由根与系数的关系得 $3+x_B = \frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$, $\therefore x_B = \frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$, $\therefore |BP| = \sqrt{1+k^2} \cdot |3-x_B| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又点 A 到直线 BP 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2} \cdot \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = 9$, $\therefore |2k+3| \cdot |k + \frac{1}{2}| = 3+4k^2$, $\therefore |2k+3| \cdot |2k+1| = 8k^2 + 6$, $\therefore 4k^2 + 8k + 3 = 8k^2 + 6(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $4k^2 + 8k + 3 = -8k^2 - 6(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 即 $4k^2 - 8k + 3 = 0(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $12k^2 + 8k + 9 = 0(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 解得 $k = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$, $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

③ 当 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \pm 1$, 当直线 l 的方程为 $x = 1$ 时, 由四边形 $OMPN$ 为平行四边形, 可得 $P(2, 0)$, 因为 $\frac{4}{6} + \frac{0}{3} = \frac{2}{3} < 1$, 所以点 $P(2, 0)$ 不在椭圆 C 上, 不符合题意. 当直线 l 的方程为 $x = -1$ 时, 由四边形

$y = -\frac{1}{2}x - 3$. 联立 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 和 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -3$, $\therefore B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$. 当点 B 的坐标为 $(0, -3)$ 时, l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$; 当点 B 的坐标为 $(-3, -\frac{3}{2})$ 时, l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$. $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

方法二: ① 当 l 的斜率不存在时, $B(3, -\frac{3}{2})$, $\therefore |BP| = 3$, 点 A 到直线 BP 的距离为 3, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不满足题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$, 由 $\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 12k(1-2k)x + (3-6k)^2 - 36 = 0$, $\therefore \Delta = 36(2k+3)^2 > 0$, 故 $k \neq -\frac{3}{2}$, 由根与系数的关系得 $3+x_B = \frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$, $\therefore x_B = \frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$, $\therefore |BP| = \sqrt{1+k^2} \cdot |3-x_B| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又点 A 到直线 BP 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2} \cdot \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = 9$, $\therefore |2k+3| \cdot |k + \frac{1}{2}| = 3+4k^2$, $\therefore |2k+3| \cdot |2k+1| = 8k^2 + 6$, $\therefore 4k^2 + 8k + 3 = 8k^2 + 6(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $4k^2 + 8k + 3 = -8k^2 - 6(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 即 $4k^2 - 8k + 3 = 0(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $12k^2 + 8k + 9 = 0(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 解得 $k = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$, $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

③ 当 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \pm 1$, 当直线 l 的方程为 $x = 1$ 时, 由四边形 $OMPN$ 为平行四边形, 可得 $P(2, 0)$, 因为 $\frac{4}{6} + \frac{0}{3} = \frac{2}{3} < 1$, 所以点 $P(2, 0)$ 不在椭圆 C 上, 不符合题意. 当直线 l 的方程为 $x = -1$ 时, 由四边形

$y = -\frac{1}{2}x - 3$. 联立 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 和 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -3$, $\therefore B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$. 当点 B 的坐标为 $(0, -3)$ 时, l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$; 当点 B 的坐标为 $(-3, -\frac{3}{2})$ 时, l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$. $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

方法二: ① 当 l 的斜率不存在时, $B(3, -\frac{3}{2})$, $\therefore |BP| = 3$, 点 A 到直线 BP 的距离为 3, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不满足题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$, 由 $\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 12k(1-2k)x + (3-6k)^2 - 36 = 0$, $\therefore \Delta = 36(2k+3)^2 > 0$, 故 $k \neq -\frac{3}{2}$, 由根与系数的关系得 $3+x_B = \frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$, $\therefore x_B = \frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$, $\therefore |BP| = \sqrt{1+k^2} \cdot |3-x_B| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又点 A 到直线 BP 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2} \cdot \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = 9$, $\therefore |2k+3| \cdot |k + \frac{1}{2}| = 3+4k^2$, $\therefore |2k+3| \cdot |2k+1| = 8k^2 + 6$, $\therefore 4k^2 + 8k + 3 = 8k^2 + 6(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $4k^2 + 8k + 3 = -8k^2 - 6(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 即 $4k^2 - 8k + 3 = 0(k < -\frac{3}{2} \text{ 或 } k \geq -\frac{1}{2})$ 或 $12k^2 + 8k + 9 = 0(-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2})$, 解得 $k = \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$, $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

③ 当 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = \pm 1$, 当直线 l 的方程为 $x = 1$ 时, 由四边形 $OMPN$ 为平行四边形, 可得 $P(2, 0)$, 因为 $\frac{4}{6} + \frac{0}{3} = \frac{2}{3} < 1$, 所以点 $P(2, 0)$ 不在椭圆 C 上, 不符合题意. 当直线 l 的方程为 $x = -1$ 时, 由四边形

$y = -\frac{1}{2}x - 3$. 联立 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 和 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -3$, $\therefore B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$. 当点 B 的坐标为 $(0, -3)$ 时, l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$; 当点 B 的坐标为 $(-3, -\frac{3}{2})$ 时, l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$. $\therefore l$ 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

方法二: ① 当 l 的斜率不存在时, $B(3, -\frac{3}{2})$, $\therefore |BP| = 3$, 点 A 到直线 BP 的距离为 3, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不满足题意.

② 当 l 的斜率存在时, 设斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$, 由 $\begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 + 12k(1-2k)x + (3-6k)^2 - 36 = 0$, $\therefore \Delta = 36(2k+3)^2 > 0$, 故 $k \neq -\frac{3}{2}$, 由根与系数的关系得 $3+x_B = \frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$, $\therefore x_B = \frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$, $\therefore |BP| = \sqrt{1+k^2} \cdot |3-x_B| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2}$, 又点 A 到直线 BP 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{|12k+18|}{3+4k^2} \cdot \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = 9$, $\therefore |2k+3| \cdot |k + \frac{1}{2}| = 3+4k^2$, $\therefore |2k+3| \cdot |2k+1| = 8k^2 + 6$, $\therefore 4k^2 + 8k + 3 =$

OMPN 为平行四边形, 可得 $P(-2, 0)$, 因为 $\frac{4}{6} + \frac{0}{3} = \frac{2}{3} < 1$, 所以点 $P(-2, 0)$ 不在椭圆 C 上, 不符合题意, 所以直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 则 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 所以 $m^2 = k^2 + 1$ ①.

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$, 则 $\Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 6) = 16k^2(k^2 + 1) - 4(2k^2 + 1)[2(k^2 + 1) - 6] = 8(5k^2 + 2) > 0$. 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1}$, 故 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = -\frac{4km}{2k^2 + 1} + \frac{2m(2k^2 + 1)}{2k^2 + 1} = \frac{2m}{2k^2 + 1}$, 所以线段 MN 的中点坐标为 $(-\frac{2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1})$. 因为四边形 OMPN 为平行四边形, 所以 $P(-\frac{4km}{2k^2 + 1}, \frac{2m}{2k^2 + 1})$, 又因为点 P 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{16k^2m^2}{6(2k^2 + 1)^2} + \frac{4m^2}{3(2k^2 + 1)^2} = 1$ ②.

将①代入②得 $\frac{8k^2(k^2 + 1)}{3(2k^2 + 1)^2} + \frac{4(k^2 + 1)}{3(2k^2 + 1)^2} = 1$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $m = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(-\frac{4km}{2k^2 + 1})^2 - 4 \times \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{16k^2m^2}{(2k^2 + 1)^2} - 4 \times \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{16 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{(2 \times \frac{1}{2} + 1)^2} - 4 \times \frac{2 \times \frac{3}{2} - 6}{2 \times \frac{1}{2} + 1}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 所以 $S_{\square OMPN} = 2S_{\triangle OMN} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} \times 1 = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

第2课时 最值与范围、证明问题

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1) 设 $E(x, y)$ 为椭圆上任意一点, 利用两点间的距离公式结合二次函数的性质即可求解; (2) 设出直线 AB 的方程并与椭圆的方程联立, 利用根与系数的关系得到两根之和与两根之积, 再分别联立直线 PA , 直线 PB 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 的方程, 得到 C, D 两点的横坐标, 由此可表示出 $|CD|$, 再转化求解即可.

解: (1) 设 $E(x, y)$ 为椭圆上任意一点, 则 $|PE| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{-11y^2 - 2y + 13} = \sqrt{-11(y + \frac{1}{11})^2 + \frac{144}{11}}$, 因此, 当 E 点坐标为 $(\pm \frac{12\sqrt{10}}{11}, -\frac{1}{11})$ 时, $|PE|$ 取到最大值 $\frac{12\sqrt{11}}{11}$.

(2) 由题意, 设 AB 的直线方程为 $y = kx + \frac{1}{2}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 AB

的直线方程与椭圆方程联立得 $\begin{cases} y = kx + \frac{1}{2}, \\ x^2 + 12y^2 = 12, \end{cases}$ 则 $(1 + 12k^2)x^2 + 12kx - 9 = 0$, 从而 $x_1 + x_2 = \frac{-12k}{1 + 12k^2}$, $x_1x_2 = \frac{-9}{1 + 12k^2}$.

设 $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$, 由 PA 与 CD 的直线方程联立得 $\begin{cases} y - 1 = \frac{y_1 - 1}{x_1}x, \\ y = -\frac{1}{2}x + 3, \end{cases}$ 解得 $x_C = \frac{4x_1}{(2k + 1)x_1 - 1}$.

同理 $x_D = \frac{4x_2}{(2k + 1)x_2 - 1}$. 那么 $|CD| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} |x_C - x_D| = 2\sqrt{5} \left| \frac{x_2 - x_1}{(2k + 1)^2 x_1x_2 - (2k + 1)(x_1 + x_2) + 1} \right| = \frac{3\sqrt{5} \sqrt{16k^2 + 1}}{2 |3k + 1|}$. 当 $k = -\frac{1}{3}$ 时, $PA \parallel CD$ 或 $PB \parallel CD$, 不符合题意. 令 $3k + 1 = t$, 则 $|CD| = \frac{3\sqrt{5} \sqrt{25(\frac{1}{t} - \frac{16}{25})^2 + \frac{16}{25}}}{2}$.

因此, 当 $k = \frac{3}{16}$ 时, $|CD|$ 取得最小值, 且最小值为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

变式题 解: (1) 由题意可知 $2b = 4$, 故 $b = 2$, 又渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2x$, 所以 $a = 1$, 故双曲线 C 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. (2) 由题意知 $F(\sqrt{5}, 0)$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_0, y_0)$, 设直线 AB 的方程为 $x = my + \sqrt{5}$ ($m \neq 0$), 由 $\begin{cases} x = my + \sqrt{5}, \\ 4x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $(4m^2 - 1)y^2 + 8\sqrt{5}my + 16 = 0$, 故 $4m^2 - 1 \neq 0$, $\Delta = 320m^2 - 64(4m^2 - 1) = 64(m^2 + 1) > 0$, $y_1 + y_2 = \frac{-8\sqrt{5}m}{4m^2 - 1}$, $y_1y_2 = \frac{16}{4m^2 - 1} > 0$, 则 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{4\sqrt{5}m}{4m^2 - 1}$, $x_0 = my_0 + \sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{4m^2 - 1}$. 由 O, M, P 三点共线得 $\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_P}{x_P} = 4m$ ①, 由 $PF \perp AB$ 得 $k_{PF} \cdot k_{AB} = -1$, 即 $\frac{y_P - 0}{x_P - \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{m} = -1$ ②.

由①②解得 $\begin{cases} x_P = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ y_P = \frac{4m}{\sqrt{5}}, \end{cases}$ 即 $P(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4m}{\sqrt{5}})$. 由 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$, 可知四边形 $PAQB$ 是平行四边形, 所以 $S_{\square PAQB} = 2S_{\triangle PAB} = d \cdot |AB|$, 其中 d 为点 P 到直线 AB 的距离.

$d = \frac{|\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4m^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{1 + m^2}$, $|AB| = \sqrt{1 + m^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1 + m^2} \cdot \frac{8\sqrt{m^2 + 1}}{|4m^2 - 1|} = \frac{8(m^2 + 1)}{|4m^2 - 1|}$, 所以 $S_{\square PAQB} = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{1 + m^2} \cdot \frac{8(m^2 + 1)}{|4m^2 - 1|} = \frac{32}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{|4m^2 - 1|}$.

令 $t = 4m^2 - 1 > 0$, 则 $m^2 = \frac{t + 1}{4}$, $S_{\square PAQB} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{(t + 5)^3}{t^2}}$. 令 $f(t) = \frac{(t + 5)^3}{t^2}$, $t > 0$, 则 $f'(t) = \frac{3(t + 5)^2 \cdot t^2 - 2t \cdot (t + 5)^3}{t^4} = \frac{(t + 5)^2(t - 10)}{t^3}$, 所以 $f(t)$ 在 $(0, 10)$ 上单调递减, 在 $(10, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(t)_{\min} = f(10) = \frac{135}{4}$, 所以 $(S_{\square PAQB})_{\min} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = 6\sqrt{3}$, 当且仅当 $t = 10$, 即 $m = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$ 时取等号, 故四边形 $PAQB$ 面积的最小值为 $6\sqrt{3}$.

例2 [思路点拨] (1) 思路一: 设出点 P 的坐标, 结合几何条件即可得到 W 的方程; 思路二: 根据抛物线的定义可知 W 为抛物线, 进而得到 W 的方程. (2) 设直线 BA 的方程为 $y = k(x - a) + a^2 + \frac{1}{4}$, 将其与抛物线的方程联立, 再利用根与系数的关系、弦长公式和放缩法得到 $|AB| + |AD| \geq \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + k^2)^3}{k^2}}$, 利用换元法和函数思想即可求出周长的最值, 再排除边界值即可.

解: (1) 方法一: 设 $P(x, y)$, 则 $|y| = \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2}$, 化简得 $y = x^2 + \frac{1}{4}$, 即 W 的方程为 $y = x^2 + \frac{1}{4}$. 方法二: 根据抛物线的定义可知, 点 P 在以 $F(0, \frac{1}{2})$ 为焦点, x 轴为准线的抛物线上, 其中 $p = \frac{1}{2}$, 从而 $x^2 = 2p(y - \frac{1}{4}) = y - \frac{1}{4}$, 故 W 的方程为 $y = x^2 + \frac{1}{4}$.

(2) 证明: 不妨设 A, B, D 三点在 W 上, 且有 $BA \perp DA$, 设 $A(a, a^2 + \frac{1}{4})$, 直线 BA, DA 的斜率分别为 $k, -\frac{1}{k}$, 由对称性不妨设 $|k| \leq 1$.

由 $\begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{4}, \\ y = k(x - a) + a^2 + \frac{1}{4}, \end{cases}$ 可得 $x^2 - kx + ka - a^2 = 0$, 由根与系数的关系得 $x_A + x_B = k$, 所以 $B(k - a, (k - a)^2 + \frac{1}{4})$, 所以 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot |k - 2a|$.

同理可得 $|AD| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \left| -\frac{1}{k} - 2a \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \left| \frac{1}{k} + 2a \right|$, 所以 $|AB| + |AD| = \sqrt{1 + k^2} \cdot |k - 2a| + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \left| \frac{1}{k} + 2a \right| \geq \sqrt{1 + k^2} \left(|k - 2a| + \left| \frac{1}{k} + 2a \right| \right) \geq \sqrt{1 + k^2} \cdot \left| k + \frac{1}{k} \right| = \sqrt{\frac{(1 + k^2)^3}{k^2}}$. 令 $m = k^2$, 设 $f(m) = \frac{(1 + m)^3}{m} = m^2 + 3m + \frac{1}{m} + 3$ ($0 < m \leq 1$), 可得 $f'(m) = 2m + 3 - \frac{1}{m^2} =$

$\frac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$, 所以 $f(m)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$

上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递增, 所以

$f(m)$ 在 $(0, 1]$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{27}{4}$. 所以 $|AB| + |AD| = \sqrt{f(k^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

分析可知, $|AB| + |AD|$ 取不到 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(|AB| + |AD|) > 3\sqrt{3}$, 故得证.

例 3 [思路点拨] (1) 根据 M 的坐标及 $MF \perp x$ 轴得到 c , 结合 $a^2 - b^2 = c^2$ 及点 M 在椭圆上, 求出 a^2, b^2 , 即可得 C 的方程. (2) 思路一: 设线法, 分直线 AB 与 x 轴不重合与重合两种情况, 当直线 AB 与 x 轴不重合时, 设出直线 AB 的方程, 并与椭圆方程联立, 得到点 Q 的坐标, 进而得到直线 AQ 的斜率, 即可得到结果; 思路二: 设点法, 设出点 A, B 的坐标, 结合向量的坐标运算及 A, B 两点位于椭圆上求出等式, 再结合直线 NB 与 MF 交于 Q , 求出 y_Q , 得到直线 AQ 的斜率, 即可得到结果.

解: (1) 因为 $MF \perp x$ 轴且 $M(1, \frac{3}{2})$, 所以 $c=1$, 所以 $a^2 - b^2 = 1$ ①. 将点 $M(1, \frac{3}{2})$ 的坐标代入椭圆方程得 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ ②, 联立①②, 解得 $b^2 = 3, a^2 = 4$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 方法一: 由题可知 $F(1, 0)$, $N(\frac{5}{2}, 0)$. 当直线 AB 与 x 轴不重合时, 设 $l_{AB}: x = ty + 4, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = ty + 4, \end{cases}$ 消去 x 可得 $(3t^2 + 4)y^2 + 24ty + 36 = 0$, 由 $\Delta > 0$, 得 $t^2 > 4$, 由根与系数的关系可得 $y_1 + y_2 = -\frac{24t}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 + 4}$.

$l_{NB}: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}(x - \frac{5}{2})$, 令 $x = 1$, 得 $y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}}$, 所以 $y_Q - y_1 = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}} - y_1 = \frac{-\frac{3}{2}y_2 - (y_1 + y_2) - ty_1 y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}(-\frac{24t}{3t^2 + 4}) - t \cdot \frac{36}{3t^2 + 4}}{ty_2 + \frac{3}{2}} = 0$, 故

$k_{AQ} = 0$, 即 $AQ \perp y$ 轴. 当直线 AB 与 x 轴重合时, $y_Q = y_A = 0$, 故 $k_{AQ} = 0$, 即 $AQ \perp y$ 轴. 综上, $AQ \perp y$ 轴.

方法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \vec{AP} = \lambda \vec{PB} (\lambda \neq 0 \text{ 且 } \lambda \neq \pm 1)$,

则 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 = 4, \\ 1 + \lambda = 0, \\ y_1 + \lambda y_2 = 0, \\ 1 + \lambda = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = 4 + 4\lambda - \lambda x_2, \\ y_1 = -\lambda y_2, \end{cases}$

又由 $\begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12, \\ 3(\lambda x_2)^2 + 4(\lambda y_2)^2 = 12\lambda^2, \end{cases}$ 两式相减, 整理可得 $3 \cdot \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \cdot \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + 4 \cdot \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \cdot \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = 12$, 所以 $5\lambda -$

$2\lambda x_2 + 3 = 0$. 由题可知 $N(\frac{5}{2}, 0)$, 则

$l_{NB}: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}(x - \frac{5}{2})$, 令 $x = 1$ 得

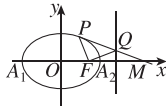
$y_Q = \frac{3y_2}{5 - 2x_2} = \frac{3\lambda y_2}{5\lambda - 2\lambda x_2} = -\lambda y_2 = y_1$, 所以 $k_{AQ} = 0$, 故 $AQ \perp y$ 轴.

变式题 1 解: (1) 由 $G: x^2 + my^2 = m$, 得 $G:$

$\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$, 由题意可得 $m > 1$, 故 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}}$, 解得 $m = 2$, 故 $G: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

则半焦距 $c = \sqrt{m-1} = 1$, 故 $F(1, 0)$.

(2) 证明: 如图, 设 $P(x_0, y_0), x_0 \neq 0$ 且 $-\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$,



则 $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$.

由题知 $Q(2, y_Q), M(x_M, 0)$. 由 $PF \perp FQ$, 得 $\vec{FP} \cdot \vec{FQ} = 0$, 故 $(x_0 - 1) \cdot (2 - 1) + y_0 \cdot y_Q = 0$, 即 $y_Q = \frac{1 - x_0}{y_0}$. 由 $k_{PQ} =$

k_{PM} , 得 $\frac{y_Q - y_0}{2 - x_0} = \frac{y_0}{x_0 - x_M}$, 故 $x_M = x_0 - \frac{y_0(2 - x_0)}{y_Q - y_0} = x_0 - \frac{y_0(2 - x_0)}{\frac{1 - x_0}{y_0} - y_0} = x_0 - \frac{y_0^2(2 - x_0)}{1 - x_0 - y_0^2} = x_0 - \frac{(1 - \frac{x_0^2}{2})(2 - x_0)}{\frac{x_0^2}{2} - x_0} =$

$x_0 - \frac{x_0^3 - 2x_0^2 - 2x_0 + 4}{x_0^2 - 2x_0} = \frac{2x_0 - 4}{x_0^2 - 2x_0} = \frac{2}{x_0}$. 由 $G: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 可得 $A_1(-\sqrt{2}, 0), A_2(\sqrt{2}, 0)$, 则 $|MP|^2 = (\frac{2}{x_0} - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{4}{x_0^2} - 4 + x_0^2 + y_0^2 = \frac{4}{x_0^2} - 4 + x_0^2 + 1 - \frac{x_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} - 3 + \frac{4}{x_0^2}$,

$|MA_1| \cdot |MA_2| = |\frac{2}{x_0} + \sqrt{2}| \cdot |\frac{2}{x_0} - \sqrt{2}| = |\frac{4}{x_0^2} - 2| = \frac{4}{x_0^2} - 2$, 所以 $|MP|^2 =$

$|MA_1| \cdot |MA_2| = \frac{x_0^2}{2} - 3 + \frac{4}{x_0^2} - \frac{4}{x_0^2} + \frac{4}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{2} - 1$, 由 $x_0 \neq 0$ 且 $-\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$, 得 $\frac{x_0^2}{2} - 1 < 0$, 故 $|MP|^2 < |MA_1| \cdot |MA_2|$.

变式题 2 解: (1) 由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \\ 2b = 2\sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 2, \\ c^2 = 2, \end{cases}$ 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 证明: 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 4 = 0$, 则 $\Delta = 8(4k^2 - m^2 + 2) > 0$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 4}{2k^2 + 1}$. 因为 $|MN| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$, 点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}$,

所以 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = \frac{1}{2} |m| \cdot |x_1 - x_2| =$

$\frac{1}{2} |m| \sqrt{(\frac{-4km}{2k^2 + 1})^2 - 4 \cdot \frac{2m^2 - 4}{2k^2 + 1}} = \sqrt{2}$,

即 $m^4 - (4k^2 + 2)m^2 + (2k^2 + 1)^2 = 0$, 可得 $m^2 = 2k^2 + 1$, 满足 $\Delta = 8(4k^2 - m^2 + 2) > 0$, 所以 $k_{OM} \cdot k_{ON} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2}{x_1 x_2} =$

$\frac{k^2(2m^2 - 4) + km(-4km) + m^2(2k^2 + 1)}{2m^2 - 4} =$

$\frac{1 - 2k^2}{4k^2 - 2} = -\frac{1}{2}$. 设 $T(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} +$

$\frac{y_0^2}{2} = 1$, 即 $x_0^2 = 2(2 - y_0^2)$, 又因为 $A(0, \sqrt{2}), B(0, -\sqrt{2})$, 所以 $k_{AT} \cdot k_{BT} =$

$\frac{y_0 - \sqrt{2}}{x_0} \cdot \frac{y_0 + \sqrt{2}}{x_0} = \frac{y_0^2 - 2}{x_0^2} = -\frac{1}{2}$.

因为 $AT \parallel OM$, 所以 $k_{AT} = k_{OM}$, 又 $k_{OM} \cdot k_{ON} = k_{AT} \cdot k_{BT}$, 所以 $k_{BT} = k_{ON}$, 所以 $BT \parallel ON$.

/第3课时 定点、定值、探索性问题/

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 根据已知条件, 求出双曲线的实半轴长 a 和虚半轴长 b , 即可求解. (2) 分直线 MN 的斜率不存在与存在两种情况进行分析, 当直线 MN 的斜率不存在时, 可求得点 P 的坐标; 当直线 MN 的斜率存在时, 设出点 M, N 的坐标及直线 MN 的方程, 根据直线 MA_1, NA_2 的方程得到点 P 横坐标的表达式, 将直线 MN 的方程与双曲线 C 的方程联立, 再结合根与系数的关系推得点 P 的横坐标为定值, 进而得证.

解: (1) 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(a > 0, b > 0)$, 由题意得 $\begin{cases} c = 2\sqrt{5}, \\ \frac{c}{a} = \sqrt{5}, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$ 可

得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 4, \end{cases}$ 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 证明: 由(1)得 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$. 当直线 MN 的斜率不存在时, 直线 MN 的方程为 $x = -4$, 则易知 $M(-4, 4\sqrt{3}), N(-4, -4\sqrt{3})$, $\therefore$ 直线 MA_1 的方程为 $y = -2\sqrt{3}(x + 2)$, 直线 NA_2 的方程为

$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 2)$, 由 $\begin{cases} y = -2\sqrt{3}(x + 2), \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x - 2), \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -2\sqrt{3}, \end{cases} \therefore P(-1, -2\sqrt{3})$.

当直线 MN 的斜率存在时, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $y = k(x + 4)$, 由题意知 $k \neq 0$ 且 $k \neq \pm 2$,

直线 MA_1 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$,

直线 NA_2 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$.

联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程, 消去 y 得 $\frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$, 则

$k(x_1 + 4) = \frac{k(x_2 + 4)}{x_1 + 2}(x + 2) = \frac{k(x_2 + 4)}{x_2 - 2}(x - 2)$, 即

$(x_1 + 4)(x_2 - 2)(x + 2) = (x_2 + 4)(x_1 + 2)(x - 2)$, 解得 $x = 2 \cdot$

$\frac{x_1 x_2 + x_1 + 3x_2}{3x_1 - x_2 + 8}$ ①.

由 $\begin{cases} y=k(x+4), \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1, \end{cases}$ 可得 $(4-k^2)x^2-8k^2x-16k^2-16=0$, 则 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{8k^2}{4-k^2}, \\ x_1x_2=-16\cdot\frac{k^2+1}{4-k^2}, \end{cases}$

可得 $\begin{cases} x_1x_2=-2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2), \\ 8=\left(\frac{4}{k^2}-1\right)(x_1+x_2), \end{cases}$

代入①可得 $x=2$.

$$\begin{aligned} & -2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2)+x_1+3x_2 \\ & =\frac{3x_1-x_2+\left(\frac{4}{k^2}-1\right)(x_1+x_2)}{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}=-1, \\ & \frac{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}=-1, \end{aligned}$$

∴当直线MN的斜率存在时,点P在直线 $x=-1$ 上.又点 $(-1,-2\sqrt{3})$ 在直线 $x=-1$ 上,故点P在定直线 $x=-1$ 上.

变式题 解:(1)设E的方程为 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$

($m>0, n>0$).将 $A(0,-2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 两点的坐标分别代入E的方程得

$$\begin{cases} \frac{4}{n^2}=1, \\ \frac{9}{4m^2}+\frac{1}{n^2}=1, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} m^2=3, \\ n^2=4, \end{cases} \text{ 故E的方程为 } \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$$

(2)证明:由 $A(0,-2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 可得直线AB的方程为 $y=\frac{2}{3}x-2$.

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线的斜率不存在,则该直线的方程为 $x=1$,将 $x=1$ 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, 可得 $M\left(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

$N\left(1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, 将 $y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入 $y=\frac{2}{3}x-2$, 可得 $x=3-\sqrt{6}$, 则 $T(3-\sqrt{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$.

由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$, 得 $H(5-2\sqrt{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$, 则直线HN的方程为 $y=\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x-2$, 此时直线HN过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线的斜率存在,则设该直线的方程为 $y=k(x-1)-2$, $M(x_1, y_1)(-2<y_1<-1), N(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1)-2, \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$,

$$\text{则 } \begin{cases} x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4}, \\ x_1x_2=\frac{3k(k+4)}{3k^2+4}, \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4}, \\ y_1y_2=\frac{8(2+2k-k^2)}{3k^2+4}, \end{cases}$ 且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$.

由 $\begin{cases} y=y_1, \\ y=\frac{2}{3}x-2, \end{cases}$ 可得 $T\left(\frac{3y_1}{2}+3, y_1\right)$, 则 $H(3y_1+6-x_1,$

$y_1)$, 则直线HN的方程为 $y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$, 将 $(0,-2)$ 的坐标代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$, 可得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$, 显然成立, 此时直线HN过点 $(0,-2)$. 综上, 直线HN过定点 $(0,-2)$.

例2 [思路点拨] (1)由 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 及直线 $l:$

$y=\sqrt{3}x-3$ 经过椭圆E长轴的一个端点, 得 a, c 的值, 进而得到 b^2 , 即可求出椭圆方程; (2)由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ 和

$\begin{cases} \frac{x^2}{3}+y^2=1, \\ y=kx+m, \end{cases}$ 可得 $4m^2=1+3k^2$, 再求 $|BC|$ 和点A到直线l的距离d即可.

解:(1)在 $y=\sqrt{3}x-3$ 中, 令 $y=0$, 得 $x=\sqrt{3}$, ∴ $a=\sqrt{3}$, 又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, ∴ $c=\sqrt{2}$,

$$\therefore b^2=a^2-c^2=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1,$$

∴椭圆E的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)证明: 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, ∴ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,

∴ $p+x_1+x_2=0, q+y_1+y_2=0$, ∴ $p=-(x_1+x_2), q=-(y_1+y_2)$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+y^2=1, \\ y=kx+m, \end{cases}$ 可得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$, $\Delta=(6km)^2-12(1+3k^2)(m^2-1)=12(3k^2+1-m^2)>0$, 由

根与系数的关系可得 $x_1+x_2=\frac{-6km}{1+3k^2}$, $x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}$, ∴ $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+3k^2}$, ∴ $p=-(x_1+x_2)=\frac{6km}{1+3k^2}, q=-(y_1+y_2)=-\frac{2m}{1+3k^2}$.

∴点A(p, q)在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上, ∴ $\left(\frac{6km}{1+3k^2}\right)^2+3\left(\frac{-2m}{1+3k^2}\right)^2=3$, 化简可得 $4m^2=1+3k^2$, ∴ $|BC|=\sqrt{1+k^2}$.

$$|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}, \sqrt{\left(\frac{-6km}{1+3k^2}\right)^2-4\cdot\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3k^2+1-m^2}}{1+3k^2}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4m^2-m^2}}{1+3k^2}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot 6|m|}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{4m^2}=\frac{3\sqrt{1+k^2}}{2|m|},$$

又点A到直线l的距离 $d=\frac{|pk-q+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|\frac{6km}{1+3k^2}\cdot k+\frac{2m}{1+3k^2}+m\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$, ∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{1+k^2}}{2|m|}\cdot\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{9}{4}$, ∴ $\triangle ABC$ 的面积为定值 $\frac{9}{4}$.

变式题 解:(1)因为椭圆C的短轴长为2, 所以 $b=1$. 因为 $|MF_2|=7|MF_1|$, $|MF_2|+|MF_1|=7|MF_1|+|MF_1|=8|MF_1|=2a$, 所以 $|MF_1|=\frac{a}{4}, |MF_2|=\frac{7a}{4}$, 又因为 $MF_1\perp x$ 轴, 所以 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2$, 即 $\left(\frac{7a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2+4c^2$, 结合 $a^2-b^2=a^2-1=c^2$, 可得 $a^2=4$, 所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $A_1(-x_1, -y_1), A_2(x_1, -y_1)$, 由 $\begin{cases} x=ty+m, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$, 则 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}, y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+4}$, 所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-m^2}{2tm}$, 直线 BA_2 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_2)$,

令 $y=0$, 得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+m)y_2+(ty_2+m)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=m+2t\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}-m+m=\frac{4}{m}$, 则 $D\left(\frac{4}{m}, 0\right)$, 所以 A_1D 的中点的坐标为 $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}y_1\right)$. 由题知 A_1D 的中点在直线 $x=ty+m$ 上, 可得 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1=$

$-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}(ty_1+m)=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}ty_1-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}=\frac{3}{2}m$, 解得 $m^2=\frac{4}{3}$, 又 $0<m<2$, 所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例3 [思路点拨] (1)利用旋转可得相关点的坐标, 即可代入求解; (2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0)$, 联立直线MN与双曲线的方程, 根据根与系数的关系及向量共线的坐标关系可得 $4t^2+4=n^2$, 利用 $\lambda=\frac{|MF_1|}{|NF_2|}=\frac{1}{\frac{|MF_1|}{|NF_2|}}$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}=1$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $|PF_1|+|PF_2|=6$, 即可判断.

解:(1)因为曲线 C_1 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$, 所以曲线 C_1 绕原点逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$. 设 $T(x, y)$ 是 C_1 上任意一点, $T(x, y)$ 绕原点O逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到点 $T'(x', y')$, 则 $x'=x\cos\frac{7\pi}{4}-y\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y'=x\sin\frac{7\pi}{4}+y\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$, 因为 $T'(x', y')$ 在曲线 $C_2: xy=2$ 上, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)=2$, 化简得 $y^2-x^2=4$, 故曲线 C_1 的方程为 $y^2-x^2=4$.

(2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), y_1>0, y_2<0, x_1x_2>0$, 易知 $F_1(0, 2\sqrt{2}), F_2(0, -2\sqrt{2})$. 联立直线MN与双曲线 $y^2-x^2=4$ 的方程, 消去 x 得 $(t^2-1)y^2+2tny+n^2+4=$

$7|MF_1|=\frac{7a}{4}$, 又因为 $MF_1\perp x$ 轴, 所以 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2$, 即 $\left(\frac{7a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2+4c^2$, 结合 $a^2-b^2=a^2-1=c^2$, 可得 $a^2=4$, 所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $A_1(-x_1, -y_1), A_2(x_1, -y_1)$,

由 $\begin{cases} x=ty+m, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$, 则 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}, y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+4}$, 所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-m^2}{2tm}$, 直线 BA_2 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_2)$,

令 $y=0$, 得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+m)y_2+(ty_2+m)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=m+2t\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}-m+m=\frac{4}{m}$, 则 $D\left(\frac{4}{m}, 0\right)$, 所以 A_1D 的中点的坐标为 $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}y_1\right)$. 由题知 A_1D 的中点在直线 $x=ty+m$ 上, 可得 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1=$

$-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}(ty_1+m)=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}ty_1-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}=\frac{3}{2}m$, 解得 $m^2=\frac{4}{3}$, 又 $0<m<2$, 所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例3 [思路点拨] (1)利用旋转可得相关点的坐标, 即可代入求解; (2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0)$, 联立直线MN与双曲线的方程, 根据根与系数的关系及向量共线的坐标关系可得 $4t^2+4=n^2$, 利用 $\lambda=\frac{|MF_1|}{|NF_2|}=\frac{1}{\frac{|MF_1|}{|NF_2|}}$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}=1$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $|PF_1|+|PF_2|=6$, 即可判断.

解:(1)因为曲线 C_1 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$, 所以曲线 C_1 绕原点逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$. 设 $T(x, y)$ 是 C_1 上任意一点, $T(x, y)$ 绕原点O逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到点 $T'(x', y')$, 则 $x'=x\cos\frac{7\pi}{4}-y\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y'=x\sin\frac{7\pi}{4}+y\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$, 因为 $T'(x', y')$ 在曲线 $C_2: xy=2$ 上, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)=2$, 化简得 $y^2-x^2=4$, 故曲线 C_1 的方程为 $y^2-x^2=4$.

(2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), y_1>0, y_2<0, x_1x_2>0$, 易知 $F_1(0, 2\sqrt{2}), F_2(0, -2\sqrt{2})$. 联立直线MN与双曲线 $y^2-x^2=4$ 的方程, 消去 x 得 $(t^2-1)y^2+2tny+n^2+4=$

$7|MF_1|=\frac{7a}{4}$, 又因为 $MF_1\perp x$ 轴, 所以 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2$, 即 $\left(\frac{7a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2+4c^2$, 结合 $a^2-b^2=a^2-1=c^2$, 可得 $a^2=4$, 所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $A_1(-x_1, -y_1), A_2(x_1, -y_1)$, 由 $\begin{cases} x=ty+m, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$, 则 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}, y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+4}$, 所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-m^2}{2tm}$, 直线 BA_2 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_2)$,

令 $y=0$, 得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+m)y_2+(ty_2+m)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=m+2t\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}-m+m=\frac{4}{m}$, 则 $D\left(\frac{4}{m}, 0\right)$, 所以 A_1D 的中点的坐标为 $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}y_1\right)$. 由题知 A_1D 的中点在直线 $x=ty+m$ 上, 可得 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1=$

$-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}(ty_1+m)=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}ty_1-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}=\frac{3}{2}m$, 解得 $m^2=\frac{4}{3}$, 又 $0<m<2$, 所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例3 [思路点拨] (1)利用旋转可得相关点的坐标, 即可代入求解; (2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0)$, 联立直线MN与双曲线的方程, 根据根与系数的关系及向量共线的坐标关系可得 $4t^2+4=n^2$, 利用 $\lambda=\frac{|MF_1|}{|NF_2|}=\frac{1}{\frac{|MF_1|}{|NF_2|}}$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}=1$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $|PF_1|+|PF_2|=6$, 即可判断.

解:(1)因为曲线 C_1 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$, 所以曲线 C_1 绕原点逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$. 设 $T(x, y)$ 是 C_1 上任意一点, $T(x, y)$ 绕原点O逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到点 $T'(x', y')$, 则 $x'=x\cos\frac{7\pi}{4}-y\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y'=x\sin\frac{7\pi}{4}+y\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$, 因为 $T'(x', y')$ 在曲线 $C_2: xy=2$ 上, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)=2$, 化简得 $y^2-x^2=4$, 故曲线 C_1 的方程为 $y^2-x^2=4$.

(2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), y_1>0, y_2<0, x_1x_2>0$, 易知 $F_1(0, 2\sqrt{2}), F_2(0, -2\sqrt{2})$. 联立直线MN与双曲线 $y^2-x^2=4$ 的方程, 消去 x 得 $(t^2-1)y^2+2tny+n^2+4=$

$7|MF_1|=\frac{7a}{4}$, 又因为 $MF_1\perp x$ 轴, 所以 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2$, 即 $\left(\frac{7a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2+4c^2$, 结合 $a^2-b^2=a^2-1=c^2$, 可得 $a^2=4$, 所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $A_1(-x_1, -y_1), A_2(x_1, -y_1)$, 由 $\begin{cases} x=ty+m, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$, 则 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}, y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+4}$, 所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-m^2}{2tm}$, 直线 BA_2 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_2)$,

令 $y=0$, 得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+m)y_2+(ty_2+m)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=m+2t\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}-m+m=\frac{4}{m}$, 则 $D\left(\frac{4}{m}, 0\right)$, 所以 A_1D 的中点的坐标为 $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1, -\frac{1}{2}y_1\right)$. 由题知 A_1D 的中点在直线 $x=ty+m$ 上, 可得 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1=$

$-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}(ty_1+m)=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}ty_1-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}ty_1+m$, 即 $\frac{2}{m}=\frac{3}{2}m$, 解得 $m^2=\frac{4}{3}$, 又 $0<m<2$, 所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例3 [思路点拨] (1)利用旋转可得相关点的坐标, 即可代入求解; (2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0)$, 联立直线MN与双曲线的方程, 根据根与系数的关系及向量共线的坐标关系可得 $4t^2+4=n^2$, 利用 $\lambda=\frac{|MF_1|}{|NF_2|}=\frac{1}{\frac{|MF_1|}{|NF_2|}}$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}=1$ 及 $MF_1\parallel NF_2$, 得到 $|PF_1|+|PF_2|=6$, 即可判断.

解:(1)因为曲线 C_1 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$, 所以曲线 C_1 绕原点逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$. 设 $T(x, y)$ 是 C_1 上任意一点, $T(x, y)$ 绕原点O逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到点 $T'(x', y')$, 则 $x'=x\cos\frac{7\pi}{4}-y\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y'=x\sin\frac{7\pi}{4}+y\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$, 因为 $T'(x', y')$ 在曲线 $C_2: xy=2$ 上, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)=2$, 化简得 $y^2-x^2=4$, 故曲线 C_1 的方程为 $y^2-x^2=4$.

(2)设直线MN: $x=ty+n(n\neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), y_1>0, y_2<0, x_1x_2>0$, 易知 $F_1(0, 2\sqrt{2}), F_2(0, -2\sqrt{2})$. 联立直线MN与双曲线 $y^2-x^2=4$ 的方程, 消去 x 得 $(t^2-1)y^2+2tny+n^2+4=$

$0, \Delta = 4t^2n^2 - 4(t^2 - 1)(n^2 + 4) = 4(n^2 + 4 - 4t^2) > 0$, 所以由根与系数的关系可得 $y_1 + y_2 = \frac{-2tn}{t^2 - 1}$, $y_1y_2 = \frac{n^2 + 4}{t^2 - 1}$. 因为 $MF_1 \parallel NF_2$, 所以 $\frac{F_1M}{F_2N} = \frac{F_1M}{F_2N}$, 又 $F_1M = (x_1, y_1 - 2\sqrt{2})$, $F_2N = (x_2, y_2 + 2\sqrt{2})$, 所以 $x_1(y_2 + 2\sqrt{2}) = x_2(y_1 - 2\sqrt{2})$, 即 $(ty_1 + n)(y_2 + 2\sqrt{2}) = (ty_2 + n)(y_1 - 2\sqrt{2})$, 化简得 $2\sqrt{2}t(y_2 + y_1) + n(y_2 - y_1) = -4\sqrt{2}n$, 将 $y_1 + y_2 = \frac{-2tn}{t^2 - 1}$ 代入, 可得 $2\sqrt{2}t \times \frac{-2tn}{t^2 - 1} + n(y_2 - y_1) = -4\sqrt{2}n$, 故 $y_2 - y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{t^2 - 1}$. 由 $(y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 4y_1y_2$, 可得 $4t^2 + 4 = n^2$. 由 $|MF_1| + |NF_2| = \lambda|MF_1| \cdot |NF_2|$, 可得 $\lambda = \frac{|MF_1| + |NF_2|}{|MF_1| \cdot |NF_2|} = \frac{1}{\frac{1}{|MF_1|} + \frac{1}{|NF_2|}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - 2\sqrt{2})^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + (y_2 + 2\sqrt{2})^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(y_1^2 - 4) + (y_1 - 2\sqrt{2})^2}} + \frac{1}{\sqrt{(y_2^2 - 4) + (y_2 + 2\sqrt{2})^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}y_1 - 2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}y_2 + 2)^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{|\sqrt{2}y_1 - 2|} + \frac{1}{|\sqrt{2}y_2 + 2|}}$. 因为点 M, N 均在双曲线 $y^2 - x^2 = 4$ 上, 所以 $y_1 \geq 2$, $y_2 \leq -2$, 所以 $\lambda = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}y_1 - 2} + \frac{1}{\sqrt{2}y_2 + 2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}y_1 - 2} - \frac{1}{\sqrt{2}y_1 + 2}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}y_1 - 2\sqrt{2}y_2 + 2}{(\sqrt{2}y_1 - 2)(\sqrt{2}y_2 + 2)}} = \frac{2\sqrt{2}y_1 - 2\sqrt{2}y_2 + 2}{2\sqrt{2}y_1 - 2\sqrt{2}y_2 + 2} = 1$, 故 $\lambda = 1$. (3) 由双曲线方程 $y^2 - x^2 = 4$ 可得 $a = 2$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$, 不妨设 $|MF_1| = m|NF_2|$, 由 (2) 知 $\frac{1}{|MF_1|} + \frac{1}{|NF_2|} = 1$, 故 $\frac{1}{m|NF_2|} + \frac{1}{|NF_2|} = 1$, 可得 $|NF_2| = \frac{m+1}{m}$, $|MF_1| = m+1$. 由 $MF_1 \parallel NF_2$, 得 $|PF_1| = m|PN|$, $|PF_1| = \frac{m}{m+1}|NF_1|$, $|PF_2| = \frac{1}{m}|PM|$, $|PF_2| = \frac{1}{m+1}|MF_2|$, 故 $|PF_1| + |PF_2| = \frac{m}{m+1}|NF_1| + \frac{1}{m+1}|MF_2| = \frac{m}{m+1}(2a + |NF_2|) + \frac{1}{m+1}(2a + |MF_1|) = 2a + \frac{m}{m+1}|NF_2| + \frac{1}{m+1}|MF_1| = 2a + \frac{m}{m+1} \times \frac{m+1}{m} +$

$\frac{1}{m+1}(m+1) = 2a + 2 = 6$, 故存在两个定点 T_1, T_2 , 使得 $|PT_1| + |PT_2|$ 为定值, 且 $T_1(0, 2\sqrt{2}), T_2(0, -2\sqrt{2})$ 或 $T_1(0, -2\sqrt{2}), T_2(0, 2\sqrt{2})$, 且定值为 6. 变式题 解: (1) 若 B 为椭圆的上顶点, 则 $B(0, 1)$. 又直线 AB 过点 $(2, 0)$, 故直线 $AB: x + 2y - 2 = 0$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$ 可得 $3y^2 - 4y + 1 = 0$, 解得 $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$, 即点 $A(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, 又 $F(1, 0)$, 故直线 AF 的方程为 $y = x - 1$. (2) 证明: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 设直线 AB 的方程为 $x = ty + 2(t \neq 0)$, 代入椭圆方程可得 $(t^2 + 2)y^2 + 4ty + 2 = 0, \Delta > 0$, 所以 $y_1 + y_2 = \frac{-4t}{t^2 + 2}, y_1y_2 = \frac{2}{t^2 + 2}$, 所以 $\frac{y_1y_2}{y_1 + y_2} = -\frac{1}{2t}$, 即 $ty_1y_2 = -\frac{y_1 + y_2}{2}$, 所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 - 1}}{\frac{y_2}{x_2 - 1}} = \frac{y_1(x_2 - 1)}{y_2(x_1 - 1)} = \frac{y_1(ty_2 + 1)}{y_2(ty_1 + 1)} = \frac{ty_1y_2 + y_1}{ty_1y_2 + y_2} = \frac{-\frac{y_1 + y_2}{2} + y_1}{-\frac{y_1 + y_2}{2} + y_2} = -1$, 即 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 -1 . 例 4 [思路点拨] (1) 设 $T(x_0, y_0)$ 为椭圆 E 上任意一点, 根据 T, C 间的距离的最小值大于半径即可得出 r 的取值范围; (2) 设出直线 PM, PN 的方程, 由点到直线的距离等于半径及点 M, N 在椭圆 E 上得出直线 MN 的方程, 最后根据直线 MN 与圆 C 相切, 利用圆心到直线的距离等于半径求参, 即可求出圆的方程. 解: (1) 设 $T(x_0, y_0)$ 为椭圆 E 上任意一点, $-2 \leq x_0 \leq 2$, 则 $|TC|^2 = (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = \frac{3}{4}x_0^2 - 2x_0 + 2$, 则 $r^2 < \left(\frac{3}{4}x_0^2 - 2x_0 + 2\right)_{\min} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{2}{3}$, 故 $0 < r < \frac{\sqrt{6}}{3}$. (2) 由题意可知 $P(0, 1)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 因为 $r < 1$, 所以切线 PM, PN 的斜率都存在. 直线 PM 的方程为 $y = \frac{y_1 - 1}{x_1}x + 1$, 即 $(y_1 - 1)x - x_1y + x_1 = 0$, 直线 PN 的方程为 $(y_2 - 1)x - x_2y + x_2 = 0$, 则 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - 1)^2}} = r$, 故 $x_1^2 + 2x_1(y_1 - 1) + (y_1 - 1)^2 = r^2x_1^2 + r^2(y_1 - 1)^2$, 又 $x_1^2 = 4(1 - y_1^2)$, 故 $4(1 - r^2)(1 - y_1^2) + 2x_1(y_1 - 1) + (y_1 - 1)^2 = r^2(y_1 - 1)^2$, 又因为 $y_1 \neq 1$, 所以 $2x_1 + 3(r^2 - 1)y_1 + 5(r^2 - 1) = 0$, 同理可得 $2x_2 + 3(r^2 - 1)y_2 + 5(r^2 - 1) = 0$, 故直线 MN 的方程为 $2x + 3(r^2 - 1)y + 5(r^2 - 1) = 0$. 若直线 MN 与圆 C 相切, 则 $\frac{|5r^2 - 3|}{\sqrt{9(r^2 - 1)^2 + 4}} = r$, 令 $t = r^2 \in (0, \frac{2}{3})$, 故 $9t^3 - 43t^2 + 43t - 9 = 0$, 即 $(t - 1)(9t^2 - 34t + 9) = 0$, 解得 $t = 1$ 或 $t = \frac{17 \pm 4\sqrt{13}}{9}$. 又 $t \in (0, \frac{2}{3})$, 故 $t = \frac{17 - 4\sqrt{13}}{9}$, 故存在满足条件的圆 C , 其

方程为 $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{17 - 4\sqrt{13}}{9}$. 变式题 解: (1) 由题意知, 椭圆 C 的焦距 $2c = 2$, 则其焦点为 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$, 由椭圆的定义得, 椭圆 C 的长轴长 $2a = \sqrt{(1 - 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{(1 + 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$, 即 $a = \sqrt{2}$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$, 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. (2) 设 $P(x_0, y_0)$, 显然 $x_0 \neq \pm\sqrt{2}$, 设过点 P 的直线 l 的方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 由 $\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4k(y_0 - kx_0)x + 2(y_0 - kx_0)^2 - 2 = 0$, 若直线 l 与椭圆 C 相切, 则 $\Delta = 16k^2(y_0 - kx_0)^2 - 8(1 + 2k^2)[(y_0 - kx_0)^2 - 1] = 0$, 得 $(y_0 - kx_0)^2 = 1 + 2k^2$, 即 $(x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0$. 设直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 显然 k_1, k_2 是上述关于 k 的一元二次方程的两个根, 则 $k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 2} = -1$, 化简得 $x_0^2 + y_0^2 = 3(x_0 \neq \pm\sqrt{2})$, 故点 P 在以原点 O 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆上 (除去 $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ 四个点), 而点 A 为该圆上的一个定点, 当满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 时, 点 P 与点 A 或 B 重合, 或 AB 为圆 O 的直径, 即点 B 的坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$, 所以存在定点 $B(\sqrt{3}, 0)$, 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$. 培优专题 (六) 解析几何运算优化策略 例 1 B [解析] 方法一: 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$, 由点 A, B 在抛物线上, 知 $k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_A^2 - y_B^2}{2p - 2p} = \frac{2p}{y_A + y_B}$, 又因为 M 为 AB 的中点, 则 $y_A + y_B = 2y_1$, 所以 $k_{AB} = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}$, 同理可得 $k_{BC} = \frac{p}{y_2}, k_{AC} = \frac{p}{y_3}$, 又 $k_{AB} + k_{BC} + k_{AC} = -1$, 所以 $\frac{p}{y_1} + \frac{p}{y_2} + \frac{p}{y_3} = -1$, 则 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = -\frac{1}{p}$, 故选 B. 方法二: 设直线 AB 的方程为 $x = m_1y + t_1$, 直线 BC 的方程为 $x = m_2y + t_2$, 直线 AC 的方程为 $x = m_3y + t_3$, 联立直线 AB 的方程与抛物线方程得 $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = m_1y + t_1, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 2pm_1y - 2pt_1 = 0$, 则 $y_A + y_B = 2pm_1 = 2y_1$, 即 $y_1 = pm_1$. 同理可得 $y_2 = pm_2, y_3 = pm_3$. 因为 $k_{AB} + k_{BC} + k_{AC} = -1$, 所以 $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = -1$, 所以 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) = -\frac{1}{p}$. 故选 B. 方法三: 不妨设抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, $A(0, 0), B(1, 2), C(x_C, y_C)$, 则 $k_{AB} = 2, k_{BC} = \frac{y_C - 2}{x_C - 1}, k_{AC} = \frac{y_C}{x_C}$, 由 $k_{AB} + k_{BC} + k_{AC} = -1$, 得 $2 + \frac{y_C - 2}{x_C - 1} + \frac{y_C}{x_C} = 2 + \frac{y_C - 2}{x_C} + \frac{y_C}{x_C} = -1$, 化简得 $3y_C^2 + 14y_C + 8 = 0$, 解得 $y_C = -\frac{2}{3}$ 或 -4 , 不妨取 $y_C =$

$$-4, \text{ 则 } x_C = 4, \text{ 则 } y_1 = \frac{0+2}{2} = 1, y_2 = \frac{2+(-4)}{2} = -1, y_3 = \frac{0+(-4)}{2} = -2, \text{ 所以 } \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 1 + (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{p}, \text{ 故选 B.}$$

【自测题】

证明: 方法一: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 $MN: y = kx + m, k \neq 0, m \neq 0$.

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0, \text{ 则 } \Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2}. \text{ 由 } AM \perp AN, \text{ 得 } \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = -1, \text{ 所以 } (k^2 + 1)x_1 x_2 + (km + x_2 + 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0, \text{ 整理得 } (k^2 + 1) \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} + (km + 2) \frac{-8km}{1+4k^2} + m^2 + 4 = 0, \text{ 化简得 } 5m^2 - 16km + 12k^2 = 0.$$

$$\text{因为 } k \neq 0, \text{ 所以两边同时除以 } k^2 \text{ 得 } 5\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 16 \cdot \frac{m}{k} + 12 = 0, \text{ 解得 } \frac{m}{k} = \frac{6}{5} \text{ 或 } \frac{m}{k} = 2 \text{ (舍)}, \text{ 所以直线 } MN \text{ 的方程为 } y = k\left(x + \frac{6}{5}\right), \text{ 其过定点 } \left(-\frac{6}{5}, 0\right).$$

$$\text{方法二: 设直线 } AM: y = k(x+2) (k \neq 0), \text{ 则直线 } AN: y = -\frac{1}{k}(x+2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (1+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0, \text{ 所以 } -2x_M = \frac{16k^2 - 4}{1+4k^2}, \text{ 所以 } x_M = \frac{2-8k^2}{1+4k^2}, \text{ 所以 } y_M = \frac{4k}{1+4k^2}, \text{ 所以点 } M\left(\frac{2-8k^2}{1+4k^2}, \frac{4k}{1+4k^2}\right), \text{ 同理得点 } N\left(\frac{2k^2-8}{4+k^2}, \frac{-4k}{4+k^2}\right), \text{ 所以 } k_{MN} = \frac{\frac{4k}{1+4k^2} - \frac{-4k}{4+k^2}}{\frac{2-8k^2}{1+4k^2} - \frac{2k^2-8}{4+k^2}} = \frac{5k}{4(1-k^2)}, \text{ 则直线 } MN: y - \frac{4k}{1+4k^2} = \frac{5k}{4(1-k^2)}\left(x - \frac{2-8k^2}{1+4k^2}\right), \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } x = \frac{2-8k^2}{1+4k^2} - \frac{16(1-k^2)}{5(1+4k^2)} = \frac{-6(1+4k^2)}{5(1+4k^2)} = -\frac{6}{5},$$

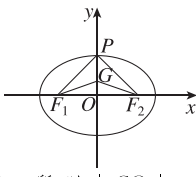
$$\text{所以直线 } MN \text{ 过定点 } \left(-\frac{6}{5}, 0\right).$$

$$\text{方法三: 以 } A \text{ 为坐标原点, 建立新的平面直角坐标系 (新的 } x \text{ 轴与原 } x \text{ 轴重合), 则椭圆的方程为 } \frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 直线 } MN \text{ 的方程为 } y = kx + m, \text{ 易知 } m \neq 0, \text{ 则 } \frac{y-kx}{m} = 1, \text{ 所以 } x^2 + 4y^2 - 4x \cdot \frac{y-kx}{m} = 0, \text{ 两边同时除以 } x^2, \text{ 得 } 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{4}{m} \cdot \frac{y}{x} + \frac{4k}{m} + 1 = 0, \text{ 所以 } \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{k}{m} + \frac{1}{4} = -1, \text{ 即 } k = -\frac{5m}{4}, \text{ 所以直线 } MN \text{ 的方程为 } y = -\frac{5m}{4}x + m = -m\left(\frac{5}{4}x - 1\right), \text{ 其$$

$$\text{过定点 } \left(\frac{4}{5}, 0\right), \text{ 所以直线 } MN \text{ 过定点 } \left(-\frac{6}{5}, 0\right).$$

例 2 B [解析] 因为 P 是椭圆上一点, 且 $\angle F_1 G F_2 \leq \frac{2}{3}\pi$ 恒成立, 所以不妨设点 P 为上顶点, 如图所示, 因为 G 为 $\triangle P F_1 F_2$ 的重心, 所以 $|GO| = \frac{1}{3}|PO| = \frac{1}{3}b$, 而 $|GO| \geq \tan \frac{\pi}{6} \cdot |F_1 O|$, 即 $|GO| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}|F_1 O|$, 所以 $\frac{1}{3}b \geq \frac{\sqrt{3}}{3}c$, 所以 $b^2 \geq 3c^2$, 所以 $a^2 - c^2 \geq 3c^2$, 即 $e^2 \leq \frac{1}{4}$, 解得 $0 < e \leq \frac{1}{2}$. 故选 B.



【自测题】

C [解析] 由 PG 平行于 x 轴得 $y_G = y_P = a$, 则 $y_A = 3y_G = 3a$, 所以 $\triangle A F_1 F_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 2c \times 3a = \frac{1}{2} \cdot (|AF_1| + |AF_2| + 2c) \cdot a$, 又 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 所以 $|AF_1| = 2c + a, |AF_2| = 2c - a$, 又 $|AF_1| = a + ex_A$, 所以 $x_A = 2a$, 因此 $A(2a, 3a)$, 代入双曲线方程得 $\frac{4a^2}{a^2} - \frac{9a^2}{b^2} = 1$, 可得 $b = \sqrt{3}a, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a$, 所以 $e = \frac{c}{a} = 2$. 故选 C.

例 3 证明: 设直线 AB 的方程为 $mx + ny = 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 由 $\begin{cases} mx + ny = 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4n\left(\frac{y}{x}\right) - 4m = 0, \therefore \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -4m. \because k_{OA} k_{OB} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}, \therefore -4m = -1, \therefore m = \frac{1}{4}, \therefore$ 直线 $AB: \frac{1}{4}x + ny = 1$ 过定点 $(4, 0)$.

【自测题】解: 设 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2), D(x_0, y_0)$. 当直线 $Q_1 Q_2$ 的斜率存在时, 设直线 $Q_1 Q_2$ 的方程为 $y = kx + m$, 联立 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 消去 y 可得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2(m^2 - b^2) = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{2(m^2 - b^2)}{2k^2 + 1}$, 则 $y_1 y_2 = \frac{m^2 - 2b^2 k^2}{2k^2 + 1}$. 因为 $OQ_1 \perp OQ_2$, 所以 $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} = 0$, 所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{2(m^2 - b^2)}{2k^2 + 1} + \frac{m^2 - 2b^2 k^2}{2k^2 + 1} = 0$, 所以 $3m^2 = 2b^2(1 + k^2)$ ①.

又直线 $Q_1 Q_2$ 的方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 即 $y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{x_0^2}{y_0} + y_0$, 与 $y = kx + m$ 对比, 所以 $\begin{cases} -\frac{x_0}{y_0} = k, \\ \frac{x_0^2}{y_0} + y_0 = m, \end{cases}$ 代入 ① 中, 化简可得 $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{3}b^2 (y_0 \neq 0)$. 当直线 $Q_1 Q_2$ 的斜率不存在时, 易知点 D 在 x 轴上, 此时 $D\left(\frac{\sqrt{6}}{3}b, 0\right)$ 或 $D\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}b, 0\right)$, 满足 $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{3}b^2$.

综上, 点 D 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}b^2$.

培优专题(七) 圆锥曲线中的交汇、创新问题

例 1 解: (1) 由已知可得 $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, -4\sqrt{3})$, 则 $\overrightarrow{AP} = (6 + \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (x_0 + \sqrt{3}, y_0 - 2\sqrt{3}) = (6 + \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$, $\therefore x_0 = 6, y_0 = 3$, 即点 P 的坐标为 $(6, 3)$.

(2) (i) 由 $y = x$ 与 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 的交点为 $(1, 1)$ 和 $(-1, -1)$, 得 $a^2 = 2$, 由 $y = -x$ 与 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 的交点为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$$\text{得 } b^2 = \frac{2}{3}, \therefore c^2 = \frac{4}{3}, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

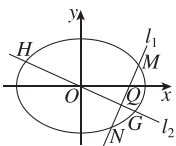
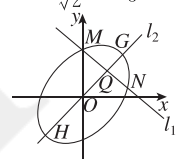
(ii) 方法一: 如图, 设直线 $l_1: y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x = k\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x = k\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \\ x^2 + y^2 - xy = 1, \end{cases}$ 可得 $(k^2 - k + 1)x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3k - 2k^2 - 1)x + \frac{2}{3}k^2 - \frac{4}{3}k - \frac{1}{3} = 0, \therefore x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2k^2 - 2k - 1}{k^2 - k + 1}, x_1 x_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2 - 2k - 1}{k^2 - k + 1},$

$$\therefore |MN| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{(2k^2-2k-1)^2}{(k^2-k+1)^2} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2-2k-1}{k^2-k+1}\right]} = \sqrt{2(1+k^2)}.$$

易知直线 $l_2: y = -\frac{1}{k}x$, 与斜椭圆方程 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 联立, 得 $x^2 + \frac{1}{k^2}x^2 + \frac{1}{k}x^2 = 1, \therefore x^2 = \frac{k^2}{k^2 + k + 1}, \therefore |OH|^2 = \frac{k^2 + 1}{k^2 + k + 1}$, 故 $\frac{\sqrt{2}}{|MN|} + \frac{1}{|OH|^2} = \frac{k^2 - k + 1}{k^2 + 1} + \frac{k^2 + k + 1}{k^2 + 1} = 2$.

方法二: 将斜椭圆 C 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 由 (i) 可得新椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$.

点 Q 旋转后的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$. 当直线 l_1 旋转后斜率不存在时, $|MN| = \frac{2\sqrt{2}}{3}, |OH| = \sqrt{2}$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{|MN|} + \frac{1}{|OH|^2} = 2$. 如图, 当直线 l_1 旋转后斜率存在时, 设直线 l_1 旋转后的方程为 $x = my + \frac{2\sqrt{3}}{3} (m \neq 0)$, 旋转后 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 将 $x = my + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1$ 联立, 得 $\begin{cases} x = my + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 可得 $3(m^2 + 3)y^2 + 4\sqrt{3}my - 2 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{4\sqrt{3}m}{3(m^2 + 3)}, y_1 y_2 = -\frac{2}{3(m^2 + 3)},$



$$\therefore |MN| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{6\sqrt{2}(1+m^2)}{3(m^2+3)}. \text{易知直线 } l_2 \text{ 旋转后为 } y = -mx, \text{代入椭圆方程 } \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} = 1 \text{ 中, 得 } x^2 = \frac{2}{1+3m^2}, \text{则 } |OH|^2 = \frac{2+2m^2}{1+3m^2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{|MN|} + \frac{1}{|OH|^2} = \frac{3\sqrt{2}(m^2+3)}{6\sqrt{2}(m^2+1)} + \frac{3m^2+1}{2(m^2+1)} = 2.$$

综上所述, $\frac{\sqrt{2}}{|MN|} + \frac{1}{|OH|^2} = 2$.

【自测题】

解:(1) 设 $|OP| = |OP'| = r, \angle POx = \theta$, 则 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \angle POx = \theta + \varphi$, 故 $x' = r \cos(\theta + \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi, y' = r \sin(\theta + \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, 所以坐标变换公式为 $\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$, 该变换所对应的二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

(2) 设双曲线 $xy=1$ 上任意一点 (x, y) 在旋转角是 $\frac{\pi}{4}$ 的旋转变换下所得点的坐标为 (x', y') , 则由(1)知 $\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} \\ y' = x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} \end{cases}$,

$$\text{即 } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \end{cases} \text{得 } (y')^2 - (x')^2 = 2xy = 2, \text{则 } \frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1, \text{所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1.$$

(3) 证明: ①当直线 AB 的斜率存在时, 可设直线 AB 的方程为 $y = k(x - \frac{\sqrt{6}}{3})$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - \frac{\sqrt{6}}{3}) \\ y^2 - x^2 = 2 \end{cases}, \text{得 } 3(k^2 - 1)x^2 - 2\sqrt{6}k^2x + 2k^2 = 0, \text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{6}k^2}{3(k^2-1)}, x_1x_2 = \frac{2k^2}{3(k^2-1)}, \text{且由 } \Delta > 0, \text{可得 } 4k^2 - 3 > 0, \text{即 } k^2 > \frac{3}{4}.$$

当 $x_1 = 0$ 时, 则 $A(0, -\sqrt{2})$, 又 $T(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$, 所以 $k_{TA} = \sqrt{3}$, 所以直线 TA 的方程为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$, 将直线 TA 的方程与双曲线 C 的方程联立可得 $x^2 - \sqrt{6}x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = \sqrt{6}$, 所以 $B(\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$, 又 $D(0, \sqrt{2})$, 所以 $k_{DB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 易知 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$; 当 $x_1 \neq 0$ 时, 设 DA, DB 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

$$\text{则 } k_1 = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1} = k - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}}{x_1}, k_2 = k - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}}{x_2}, \text{所以 } k_1 + k_2 = 2k - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}}{x_2} - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}}{x_1} = 2k - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}\right) \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}k}{k - \sqrt{3}}, k_1k_2 = \left(k - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}}{x_1}\right) \left(k - \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k + \sqrt{2}}{x_2}\right) = \frac{-\sqrt{3} + k}{k - \sqrt{3}},$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{k_1 + k_2}{1 - k_1k_2} = -\sqrt{3}.$$

因为 B 在第一象限, 所以 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.

②当直线 AB 的斜率不存在时, 可得 $A(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}), B(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, 则 $k_{DA} = -2 - \sqrt{3}, k_{DB} = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{k_{DA} + k_{DB}}{1 - k_{DA}k_{DB}} = -\sqrt{3}$, 同理可得 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.

综上可得, $\alpha + \beta$ 为定值 $\frac{2\pi}{3}$.

例2 解:(1) $\because$ 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, $\therefore 25 - 16 = m$, 得 $m = 9$. 过点 $P_1(5, 4)$ 且斜率 $k = \frac{1}{2}$ 的直线的方程为 $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 5)$, 即 $x - 2y + 3 = 0$. 由 $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$, $\therefore Q_1(-3, 0)$, $\therefore P_2(3, 0)$, 得 $x_2 = 3, y_2 = 0$.

(2) 证明: 由题知, 当 $n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $P_n(x_n, y_n)$ 关于 y 轴的对称点是 $Q_{n-1}(-x_n, y_n)$, $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ 与 $Q_{n-1}(-x_n, y_n)$ 在同一条斜率为 k 的直线上, 则 $x_{n-1} \neq -x_n$, 即 $x_{n-1} + x_n \neq 0$, 且 $y_n - y_{n-1} = -k(x_n + x_{n-1})$ ①, 又 P_{n-1}, Q_{n-1} 都在双曲线 C 上,

$$\therefore \begin{cases} x_n^2 - y_n^2 = 9 \\ x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 = 9 \end{cases}, \text{由 } ② - ③ \text{ 得 } (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1}) = (y_n - y_{n-1})(y_n + y_{n-1}), \text{将 } ① \text{ 代入上式得 } x_n - x_{n-1} = -k(y_n + y_{n-1}) \text{ ④, 由 } ④ - ① \text{ 得 } x_n - y_n - (x_{n-1} - y_{n-1}) = k(x_n - y_n) + k(x_{n-1} - y_{n-1}), \text{即 } (1 - k)(x_n - y_n) = (1 + k)(x_{n-1} - y_{n-1}), \text{由题知 } x_n - y_n \neq 0, \therefore \frac{x_n - y_n}{x_{n-1} - y_{n-1}} = \frac{1 + k}{1 - k}, \text{又 } x_1 - y_1 = 5 - 4 = 1 \neq 0, \therefore \text{数列 } \{x_n - y_n\} \text{ 是公比为 } \frac{1 + k}{1 - k} \text{ 的等比数列.}$$

(3) 证明: 由(2)得数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列, $\therefore x_1 - y_1 = 5 - 4 = 1, \therefore x_n - y_n = (x_1 - y_1) \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}$. 记 $q = \frac{1+k}{1-k}$, 则 $q > 1, x_n - y_n = q^{n-1}, \therefore x_n^2 - y_n^2 = 9 = (x_n - y_n)(x_n + y_n), \therefore x_n + y_n = 9q^{1-n}, \therefore x_n = \frac{1}{2}(q^{n-1} + 9q^{1-n}), \therefore k_{P_{n+1}P_{n+2}} = \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}} = \frac{x_{n+2} - q^{n+1} - (x_{n+1} - q^n)}{x_{n+2} - x_{n+1}} = \frac{q^{n+1} - q^n}{q^{n+1} - q^n} = 1 - \frac{1}{2}(q^{n+1} + 9q^{1-n}) - \frac{1}{2}(q^n + 9q^{1-n}) = 1 - \frac{2q^n(q-1)}{q^n(q-1) - 9q^{1-n}(q-1)} = 1 - \frac{2q^n}{q^n - 9q^{1-n}}, k_{P_nP_{n+3}} = \frac{y_{n+3} - y_n}{x_{n+3} - x_n} = \frac{y_{n+3} - y_n}{x_{n+3} - q^{n+2} - (x_n - q^{n-1})} = \frac{y_{n+3} - y_n}{x_{n+3} - x_n - q^{n+2} + q^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2}(q^{n+2} + 9q^{1-n}) - \frac{1}{2}(q^{n-1} + 9q^{1-n}) =$

$$1 - \frac{2q^{n-1}(q^3 - 1)}{q^{n-1}(q^3 - 1) - 9q^{1-2n}(q^3 - 1)} = 1 - \frac{2q^n}{q^{n-1} - 9q^{1-2n}} = 1 - \frac{2q^n}{q^{n-1} - 9q^{1-n}} = k_{P_{n+1}P_{n+2}}, \therefore P_nP_{n+3} \parallel P_{n+1}P_{n+2}, \therefore S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}} = S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}, \text{即 } S_n = S_{n+1}.$$

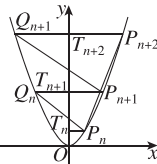
【自测题】

解:(1) 因为点 $P_1(t+1, t)$ 在抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上, 所以可得 $(t+1)^2 = 4t$, 解得 $t = 1$.

(2) 方法一: 由(1)知, $P_1(2, 1)$, 即 $x_1 = 2, y_1 = 1$. 因为点 $P_n(x_n, y_n)$ 在抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上, 所以 $y_n = \frac{x_n^2}{4}$, 且 $Q_{n-1}(-x_n, y_n), n \geq 2$. 过点 $P_{n-1}(x_{n-1}, \frac{x_{n-1}^2}{4}), n \geq 2$, 且斜率为 -1 的直线 $P_{n-1}Q_{n-1}$ 的方程为 $y - \frac{x_{n-1}^2}{4} = -(x - x_{n-1})$, 由方程组 $\begin{cases} y - \frac{x_{n-1}^2}{4} = -(x - x_{n-1}) \\ x^2 = 4y \end{cases}$, 可得 $x^2 + 4x - 4x_{n-1} - x_{n-1}^2 = 0$, 解得 $x = x_{n-1}$ 或 $x = -x_{n-1} - 4$, 所以 $-x_n = -x_{n-1} - 4$, 可得 $x_n - x_{n-1} = 4(n \geq 2)$, 所以数列 $\{x_n\}$ 是首项为 2, 公差为 4 的等差数列, 所以 $x_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2, y_n = \frac{x_n^2}{4} = \frac{(4n-2)^2}{4} = (2n-1)^2$.

方法二: 由(1)知, $P_1(2, 1)$, 即 $x_1 = 2, y_1 = 1$. 因为当 $n \geq 2$ 时点 $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), P_n(x_n, y_n), Q_{n-1}(-x_n, y_n)$ 在抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上, 所以 $\begin{cases} x_{n-1}^2 = 4y_{n-1} \\ x_n^2 = 4y_n \end{cases}$, 两式相减, 得 $(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} + x_n) = 4(y_{n-1} - y_n), n \geq 2$, 所以 $k_{P_{n-1}Q_{n-1}} = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{x_{n-1}^2 - x_n^2}{4(x_{n-1} - x_n)} = -1$, 可得 $x_n - x_{n-1} = 4(n \geq 2)$, 所以数列 $\{x_n\}$ 是首项为 2, 公差为 4 的等差数列, 所以 $x_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2, y_n = \frac{x_n^2}{4} = \frac{(4n-2)^2}{4} = (2n-1)^2$.

(3) 如图, 设线段 $P_{n+1}Q_n$ 与 y 轴交于点 T_{n+1} . 由(2)知, $P_n(4n-2, (2n-1)^2), P_{n+1}(4n+2, (2n+1)^2), P_{n+2}(4n+6, (2n+3)^2)$, 可得 $S_{\text{梯形 } T_n P_n P_{n+1} T_{n+1}} = \frac{1}{2} |T_n T_{n+1}| (|T_n P_n| + |P_{n+1} T_{n+1}|) = \frac{1}{2} [(2n+1)^2 - (2n-1)^2] (4n-2 + 4n+2) = 32n^2$, 即 $S_{\text{梯形 } T_n P_n P_{n+1} T_{n+1}} = 32n^2$, 同理可得 $S_{\text{梯形 } T_{n+1} P_{n+1} P_{n+2} T_{n+2}} = 32(n+1)^2$. 又 $S_{\text{梯形 } T_n P_n P_{n+2} T_{n+2}} = \frac{1}{2} |T_n T_{n+2}| (|T_n P_n| + |P_{n+2} T_{n+2}|) = \frac{1}{2} [(2n+3)^2 - (2n-1)^2] (4n-2 + 4n+6) = 16(2n+1)^2$, 所以 $S_{\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}} = S_{\text{梯形 } T_n P_n P_{n+1} T_{n+1}} + S_{\text{梯形 } T_{n+1} P_{n+1} P_{n+2} T_{n+2}} - S_{\text{梯形 } T_n P_n P_{n+2} T_{n+2}} = 32n^2 + 32(n+1)^2 - 16(2n+1)^2 = 16$.



例3 解:(1) 证明: $\frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|} + \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|} \geq 0$ 显然成立,

令 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|} = -\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}$, 由于 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|} \geq 0, -\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|} \leq 0$, 故当且仅当 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|} = \frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|} = 0$ 时, 等号成立. 令 $f(x) = \frac{x}{1+x} (x \geq 0)$,

则 $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, 所以 $f(x) =$

$\frac{x}{1+x} (x \geq 0)$ 单调递增, 所以 $|x_1-x_2| =$

$|y_1-y_2| = 0$, 即 $\begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2, \end{cases}$ 当且仅当 $A=B$ 时等号成立, 所以 A, B 两点的“ ρ 距离”满足关于 A, B 两点的一个“度量”定义中的①. A, B 两点的“ ρ 距离”显然满足关于 A, B 两点的一个“度量”定义中的②.

设 $C(x_3, y_3)$, 由于 $f(x)$ 单调递增, 故由 $|x_1-x_2| \leq |x_1-x_3| + |x_2-x_3|$ 可得 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|} \leq \frac{|x_1-x_3| + |x_2-x_3|}{1+|x_1-x_3| + |x_2-x_3|} =$

$\frac{\frac{|x_1-x_3|}{1+|x_1-x_3|} + \frac{|x_2-x_3|}{1+|x_2-x_3|}}{1 + \frac{|x_1-x_3|}{1+|x_1-x_3|} + \frac{|x_2-x_3|}{1+|x_2-x_3|}},$

同理得 $\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|} \leq \frac{|y_1-y_3|}{1+|y_1-y_3|} +$

$\frac{|y_2-y_3|}{1+|y_2-y_3|}$, 故 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|} +$

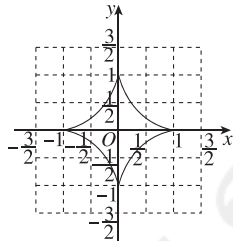
$\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|} \leq \frac{|x_1-x_3|}{1+|x_1-x_3|} +$

$\frac{|y_1-y_3|}{1+|y_1-y_3|} + \frac{|x_2-x_3|}{1+|x_2-x_3|} +$

$\frac{|y_2-y_3|}{1+|y_2-y_3|}$, 即 $\rho(A, B) \leq \rho(B, C) +$

$\rho(C, A)$, 所以 A, B 两点的“ ρ 距离”满足关于 A, B 两点的一个“度量”定义中的③. 故 A, B 两点的“ ρ 距离”是关于 A, B 两点的一个“度量”.

(2)(i) 如图,



(ii) 证明: 设 $P(x, y)$, 则 $\rho(O, P) = \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} = \frac{|x|+|y|+2|xy|}{1+|x|+|y|+|xy|} <$

$2 \cdot \frac{|x|+|y|+|xy|}{1+|x|+|y|+|xy|}$, 令 $|x|+|y|+|xy| = m > 0$, 则 $g(m) = \frac{2m}{1+m} = 2 - \frac{2}{1+m} < 2$, 即 $\rho(O, P) < 2$.

(3) 证明: 设 $A(a, ka + \frac{1}{2}), B(b, kb -$

$\frac{1}{2})$, 则 $\rho(A, B) = \frac{|a-b|}{1+|a-b|} +$

$\frac{|k(a-b)+1|}{1+|k(a-b)+1|}$, 令 $a-b=t \in \mathbf{R}$, 则

$\rho(A, B) = \frac{|t|}{1+|t|} + \frac{|kt+1|}{1+|kt+1|}$.

当 $k=0$ 时, $\rho(A, B)_{\min} = \frac{1}{2} +$

$(\frac{|t|}{1+|t|})_{\min} = \frac{1}{2}$ 成立, 不妨设 $k > 0$,

设 $h(t) = \begin{cases} \frac{t}{t-1} + \frac{kt+1}{kt}, t < -\frac{1}{k}, \\ \frac{1}{1+k}, t = -\frac{1}{k}, \\ \frac{t}{t-1} + \frac{kt+1}{kt+2}, -\frac{1}{k} < t < 0, \\ \frac{1}{2}, t = 0, \\ \frac{t}{1+t} + \frac{kt+1}{kt+2}, t > 0, \end{cases}$

令 $\varphi_1(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{kx+1}{kx+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} + 1 -$

$\frac{1}{kx+2} (x > 0)$, 则 $\varphi_1(x)$ 单调递增.

令 $\varphi_2(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{kx+1}{kx} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{kx} + 1$

$(x < -\frac{1}{k})$, 则 $\varphi_2(x)$ 单调递减, 令

$\varphi_3(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{kx+1}{kx+2} (-\frac{1}{k} < x < 0)$,

则 $\varphi_3'(x) = \frac{k(1-k)x^2 - 6kx + k - 4}{(x-1)^2(kx+2)^2}$,

令 $\psi(x) = k(1-k)x^2 - 6kx + k - 4$

$(-\frac{1}{k} \leq x \leq 0)$,

① 当 $k=1$ 时, $\psi(-\frac{1}{k}) = 3 > 0, \psi(0) =$

$-3 < 0$,

② 当 $0 < k < 1$ 时, $k(1-k) > 0, \psi(0) =$

$k-4 < 0, \psi(-\frac{1}{k}) = \frac{1+k+k^2}{k} > 0$,

③ 当 $1 < k < 4$ 时, $\psi(0) < 0, \psi(-\frac{1}{k}) >$

0 , 由于 $\psi(x)$ 为一次或二次函数, 故①②

③中均存在唯一 $x_0 \in (-\frac{1}{k}, 0)$, 使得

$\psi(x_0) = 0$, 故 $\varphi_3(x)$ 在 $(-\frac{1}{k}, x_0)$ 上单

调递增, 在 $(x_0, 0)$ 上单调递减.

④ 当 $k > 4$ 时, $\psi(x) > 0, \varphi_3(x)$ 单调递增.

综上, $h(t)_{\min} = \min\{h(0), h(-\frac{1}{k})\}$,

所以 $h(-\frac{1}{k}) \geq h(0) = \frac{1}{2}$, 解得 $k \in$

$(0, 1]$. 当 $k < 0$ 时, 同理可求得 $k \in [-1, 0)$, 所以 $k \in [-1, 1]$.

【自测题】

解: (1) 因为当 l 垂直于 x 轴时, $|AB| =$

$2\sqrt{6}$, 而直线 $l: x = \pm a$ 与 Γ 相切, 所以

$2\sqrt{3a^2-a^2} = 2\sqrt{6}$, 可得 $a = \sqrt{3}$,

又椭圆 Γ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则椭圆 Γ 的半

焦距 $c = \sqrt{2}$, 所以 $b = \sqrt{a^2-c^2} = 1$,

所以 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2)(i) 当 l 的斜率存在时, 设 l 的方程为

$y = kx + m$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 3y^2 = 3, \end{cases}$ 消去 y 得

$(3k^2+1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$,

由直线 l 与椭圆 Γ 相切, 得 $\Delta = (6km)^2 -$

$4(3k^2+1)(3m^2-3) = 0$, 整理得 $m^2 =$

$3k^2+1$, 于是圆心 O 到直线 l 的距离 $d =$

$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{3k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{3 - \frac{2}{k^2+1}} \in$

$[1, \sqrt{3}]$, 则 $S_{\triangle PAB} \leq \frac{1}{2}(d+3) \cdot |AB| =$

$\frac{1}{2}(d+3) \cdot 2\sqrt{9-d^2} = \sqrt{(3-d)(d+3)^3}$.

设 $f(d) = (3-d)(d+3)^3, 1 \leq d \leq \sqrt{3}$, 则

$f'(d) = 2(d+3)^2(3-2d)$, 当 $1 \leq d < \frac{3}{2}$

时, $f'(d) > 0$, 函数 $f(d)$ 单调递增, 当

$\frac{3}{2} < d \leq \sqrt{3}$ 时, $f'(d) < 0$, 函数 $f(d)$ 单

调递减, 因此当 $d = \frac{3}{2}$ 时, $f(d)$ 取得最大

值, 此时 $(S_{\triangle PAB})_{\max} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

当 l 的斜率不存在时, 由 (1) 知, $S_{\triangle PAB} \leq$

$\frac{1}{2} \times (\sqrt{3}+3) \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$.

由 $(\frac{9\sqrt{3}}{4})^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = \frac{115}{16} - 4\sqrt{3} >$

$7 - 4\sqrt{3} > 0$, 得 $\frac{27\sqrt{3}}{4} > 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$, 则 $d =$

$\frac{3}{2}$. 对于线段 AB 上任意点 E , 连接 OE

并延长与圆 O 交于点 F , 则 F 是圆上点与 E

最近的点, 当 E 为线段 AB 的中点时, EF

取得最大值 $\frac{3}{2}$, 所以 $d(M, N) = \frac{3}{2}$.

(ii) 证明: 因为 $H(X, Y), H(Y, Z),$

$H(X, Z)$ 均存在,

所以可设点 $X_1, X_2 \in X, Y_1, Y_2, Y_3 \in Y,$

$Z_1, Z_2, Z_3 \in Z$, 且 $H(X, Z) = |X_1Z_1|,$

$H(Y, Z) = |Y_1Z_1|, H(X, Y) = |X_2Y_2|.$

设 Y_2 是集合 Y 中到 X_2 的最近点, 根据

对称性, 不妨设 $H(X, Y) = d(X, Y) =$

$|X_2Y_2|$, 令点 X_2 到集合 Z 的最近点为

Z_3 , 点 Z_3 到集合 Y 的最近点为 Y_3 , 因为

$|X_1Z_1|$ 是集合 X 中所有点到集合 Z 最近

点距离的最大值, 所以 $|X_1Z_1| \geq$

$|X_2Z_3|$, 而在坐标平面中, $|X_2Z_3| +$

$|Y_3Z_3| \geq |X_2Y_3|$, 又点 Y_2 是集合 Y 中

到点 X_2 的最近点, 则 $|X_2Y_3| \geq |X_2Y_2|$, 所以 $H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(X, Y)$.

第九单元 统计

第 57 讲 随机抽样

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) 全面调查 抽样调查 个体

样本容量

(2) $\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$

$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

2. (5) 将号签充分搅拌 重复

3. (1) 若干个子总体(层) 简单随机

(4) $\frac{n_1}{n_1+n_2} \bar{x}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \bar{x}_2 = \frac{n_1}{n_1+n_2} [s_1^2 +$

$(\bar{x}_1 - \bar{x})^2] + \frac{n_2}{n_1+n_2} [s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2]$

【对点演练】

1. 分层随机抽样 简单随机抽样

【解析】① 中该社区 500 户家庭的收入有

明显差异, 所以应选用分层随机抽样法;

② 中 15 个个体间没有明显差异, 所以应

2. 150 【解析】依题意, 得 $\frac{n}{200+1600+1200} =$

$\frac{60}{1200}$, 解得 $n = 150$.

3. 165.4 cm 【解析】抽取的男生人数为

$\frac{490}{490+510} \times 100 = 49$, 抽取的女生人数为

$\frac{510}{490+510} \times 100 = 51$. 估计高二年级全体

学生的平均身高为 $\frac{49}{100} \times 170.2 + \frac{51}{100} \times$

160.8=165.406≈165.4(cm).

4. 一批炮弹的杀伤半径 每发炮弹的杀伤半径 50 发炮弹的杀伤半径 50
[解析] 在这次调查中,总体是一批炮弹的杀伤半径,个体是每发炮弹的杀伤半径,样本是 50 发炮弹的杀伤半径,样本容量是 50.

5. $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ [解析] 从 6 个个体中抽 1 个个体,每个个体被抽到的概率均为 $\frac{1}{6}$,与抽取的次数无关,第二次被抽到的概率仍为 $\frac{1}{6}$.但由于在整个抽样过程中是从 6 个个体中抽 2 个,故个体 a 被抽到的概率为 $\frac{1}{3}$.

6. 300 [解析] 由题意可知, $\frac{60}{n} = \frac{2}{5+2+3}$,解得 $n=300$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1)根据简单随机抽样适用的条件及各种抽样方法的要求,对选项进行逐一判断即可.(2)首先根据第二次抽取时余下的每个个体被抽到的概率为 $\frac{1}{5}$,得 n 的值,然后由简单随机抽样的可能性,求得每个个体被抽到的概率.

- (1)AC (2) $\frac{7}{33}$ [解析] (1)在平面直角坐标系中有无数个点,这与总体中的个体数有限不相符,故 A 中的抽样方法不是简单随机抽样;易知 B 中的抽样方法是简单随机抽样;挑选的 5 名同学是最优秀的,不符合简单随机抽样的等可能性,故 C 中的抽样方法不是简单随机抽样;易知 D 中的抽样方法是简单随机抽样.故选 AC.
(2)第二次抽取时,余下的每个个体被抽到的概率为 $\frac{1}{5}$,则 $\frac{14-1}{n-1} = \frac{1}{5}$,即 $n-1=65$,则 $n=66$.∴在整个抽样过程中,每个个体被抽到的概率为 $\frac{14}{66} = \frac{7}{33}$.

变式题 (1)C (2)8 $\frac{3}{8}$ [解析] (1)对于 A,总体容量较大,有明显的层次性,如男、女生在身高、体重等方面有较大差异,宜采用分层随机抽样方法;对于 B,总体容量较大,且各村庄人口、地域、发展等方面有差异,收入可能有明显的差异,不宜采用简单随机抽样方法;对于 C,总体个数少,且家访活动学生个体平等,宜采用简单随机抽样方法;对于 D,总体容量大,不同年龄的人传染病发病情况不同,有明显的差异,不宜采用简单随机抽样方法.综上所述,最适合用简单随机抽样方法的是 C.故选 C.
(2)简单随机抽样中第一次抽样可以理解为从 n 个个体中抽取一个个体,则每个个体被抽到的可能性是 $\frac{1}{n}$,因此 $n=8$.在整个抽样过程中,每个个体被抽到的可能性是 $\frac{3}{8}$.

例 2 [思路点拨] (1)根据题意可以计算出分层随机抽样的抽样比例,进而计算出中年人和青年人的抽取人数,最后计算出中年人比青少年多抽取多少人.(2)由比例分配的分层随机抽样的特点,结合扇形图求解即可.

- (1)9 (2)B [解析] (1)设中年人抽取 x 人,青少年抽取 y 人,由分层随机抽样可知 $\frac{200}{480} = \frac{x}{36}$, $\frac{80}{480} = \frac{y}{36}$,解得 $x=15$, $y=6$,故中年人比青少年多抽取 9 人.
(2)由扇形图可知,三个年级的学生总人数为 $400+600+1000=2000$,所以样本容量为 $2000 \times 30\% = 600$.因为抽取的高二年级学生人数为 $600 \times 30\% = 180$,所

以抽取的高二年级学生中满意的人数为 $180 \times 60\% = 108$.故选 B.

变式题 (1)A (2)4000 [解析] (1)由题意,全校参与跑步的人数占总人数的 $\frac{3}{5}$,所以样本中参与跑步的人数为 $200 \times \frac{3}{5} = 120$,则从高二年级参与跑步的学生中应抽取的人数为 $120 \times \frac{3}{2+3+5} = 36$.故选 A.

(2)由题可知 $\frac{3200+x}{x+2400} = \frac{90}{80}$,解得 $x=4000$.

例 3 [思路点拨] (1)利用比例分配的分层随机抽样的特点和样本平均数的计算公式求解即可.(2)先根据比例分配的分层随机抽样的特点求各层抽取的人数,再根据平均数、方差的公式运算求解.

- (1)8.43 (2)D [解析] (1)该武警大队共有 $30+30+40=100$ (人),由按比例分配的分层随机抽样方法得第一中队参加射击考核的人数为 $\frac{30}{100} \times 30 = 9$,第二中队参加射击考核的人数为 $\frac{30}{100} \times 30 = 9$,第三中队参加射击考核的人数为 $\frac{40}{100} \times 30 = 12$,所以参加射击考核的 30 人的平均射击环数为 $\frac{9}{30} \times 8.8 + \frac{9}{30} \times 8.5 + \frac{12}{30} \times 8.1 = 8.43$,所以估计该武警大队队员的平均射击水平为 8.43 环.

(2)高三(1)班抽取的人数为 $\frac{45}{45+30} \times 10 = 6$,高三(2)班抽取的人数为 $\frac{30}{45+30} \times 10 = 4$.
方法一:设高三(1)班的同学答对题目数依次为 $x_1, x_2, \dots, x_6$,高三(2)班的同学答对题目数依次为 y_1, y_2, y_3, y_4 .由题意可得 $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 1$, $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (x_i - 1)^2 = \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \right) = 1$, $\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 y_j = 1.5$, $\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 (y_j - 1.5)^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^4 y_j^2 - 4 \times 1.5^2 \right) = 0.35$,可得 $\sum_{i=1}^6 x_i = 6$, $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 12$, $\sum_{j=1}^4 y_j = 6$, $\sum_{j=1}^4 y_j^2 = 10.4$,则这 10 人

答对题目数的平均数为 $\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^6 x_i + \sum_{j=1}^4 y_j \right) = 1.2$,这 10 人答对题目数的方差为 $\frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^6 x_i^2 + \sum_{j=1}^4 y_j^2 - 10 \times 1.2^2 \right) = 0.8$.故选 D.

方法二:这 10 人答对题目数的平均数为 $\frac{6 \times 1 + 4 \times 1.5}{10} = 1.2$,则这 10 人答对题目数的方差为 $\frac{1}{10} \times \{6 \times [1 + (1-1.2)^2] + 4 \times [0.35 + (1.5-1.2)^2]\} = 0.8$.

变式题 (1)A (2)18 84 [解析] (1)方法一:从第一、二、三分厂抽取的电子产品数量分别为 25 件,50 件,25 件,则抽取的 100 件产品的使用寿命的平均值为 $\frac{1}{100} \times (980 \times 25 + 1020 \times 50 + 1032 \times 25) = 1013$ (h).
方法二:因为第一、二、三分厂的产量之比为 1:2:1,所以抽取的 100 件产品的使用寿命的平均值为 $\frac{1}{4} \times (980 + 2 \times 1020 + 1032) = 1013$ (h).故选 A.

(2)由按比例分配的分层随机抽样方法可得 C 车间应抽取的件数为 $60 \times 30\% = 18$.总样本平均值为 $\bar{x} = \frac{12 \times 220 + 30 \times 240 + 18 \times 230}{60} = 233$,总样

本方差为 $s^2 = \frac{1}{60} \times \{12 \times [20 + (220 - 233)^2] + 30 \times [20 + (240 - 233)^2] + 18 \times [30 + (230 - 233)^2]\} = 84$.

第 58 讲 用样本估计总体

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (2)①最大值 最小值 ②组距 组数
③分组 ④频率分布表
⑤频率分布直方图

2. (1) $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

(2)从小到大(或从大到小) 中间
(3)最多 (4)①小于或等于 大于或等于
②从小到大 $n \times p\%$ j 平均数

【对点演练】

1. 4.5 5.5 [解析] 由题意得中位数 $m = \frac{4+5}{2} = 4.5$,而 $10 \times 60\% = 6$,则 60% 分位数 $a = \frac{5+6}{2} = 5.5$.
2. 0.004 4 70 [解析] (1)由 $(0.002 4 + 0.003 6 + 0.006 0 + x + 0.002 4 + 0.001 2) \times 50 = 1$,得 $x = 0.004 4$.
(2)所求户数为 $(0.003 6 + 0.006 0 + 0.004 4) \times 50 \times 100 = 70$.
3. 丙 [解析] 从表格中可以看出乙和丙的平均环数最高,即平均成绩最好,又乙、丙两人之间丙的方差较小,所以丙发挥得比乙稳定,故最佳人选应为丙.
4. 7 8.5 [解析] 由题意知,这 10 名学生的得分为 3,6,6,6,6,6,7,8,9,10,其极差是 $10 - 3 = 7$,因为 $10 \times 80\% = 8$,所以 80% 分位数是 $\frac{8+9}{2} = 8.5$.
5. 70 70 68 [解析] 由题意知众数为 $\frac{60+80}{2} = 70$.因为 $0.005 \times 20 + 0.010 \times 20 = 0.3 < 0.5$, $(0.005 + 0.010 + 0.020) \times 20 = 0.7 > 0.5$,所以中位数位于 $[60, 80)$ 内,设中位数为 x ,则 $(0.005 + 0.010) \times 20 + (x - 60) \times 0.020 = 0.5$,解得 $x = 70$.平均数为 $30 \times 0.1 + 50 \times 0.2 + 70 \times 0.4 + 90 \times 0.3 = 68$.
6. 19 4 [解析] $\because x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 10,标准差为 2, $\therefore 2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_n - 1$ 的平均数为 $2 \times 10 - 1 = 19$,标准差为 $\sqrt{2^2 \times 2^2} = 4$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1)对于 A,直接求出中位数;对于 B,分别计算出甲、乙每日行走步数的极差,判断即可;对于 C,通过观察折线图即可判断;对于 D,将乙的每日行走步数从小到大排列,再计算上四分位数即可.(2)横向对比 90 后年龄比例和 90 后行业分布图,来确定各岗位年龄段比例.

- (1)AB (2)D [解析] (1)对于 A,甲的每日行走步数依次为 16 000,7965,12 700,2435,16 800,9500,11 600,从小到大排列为 2435,7965,9500,11 600,12 700,16 000,16 800,则中位数是 11 600,故 A 正确;对于 B,这一星期内甲的每日行走步数的极差为 $16 800 - 2435 = 14 365$,这一星期内乙的每日行走步数的极差为 $14 200 - 5340 = 8860$,因为 $14 365 > 8860$,所以这一星期内甲的每日行走步数的极差大于乙的每日行走步数的极差,故 B 正确;对于 C,由图知甲数据的波动幅度更大,则乙的每日行走步数的方差小于甲的每日行走步数的方差,故 C 错误;对于 D,乙的每日行走步数从小到大排列为 5340,7030,10 060,11 600,12 300,12 970,14 200, $7 \times 75\% = 5.25$,则这一星期内乙的每日行走步数的上四分位数是 12 970,故 D 错误.故选 AB.

(2)由题图可知,快递行业从业人员中,“90后”占总人数的56%,超过一半,A中结论正确;快递行业从业人员中,从事技术岗位的“90后”的人数占总人数的百分比为 $56\% \times 39.6\% = 22.176\%$,超过20%,所以快递行业从业人员中,从事技术岗位的“90后”的人数超过总人数的20%,B中结论正确;快递行业从业人员中,从事运营岗位的“90后”的人数占总人数的百分比为 $56\% \times 17\% = 9.52\%$,超过“80前”的人数占总人数的百分比,C中结论正确;快递行业从业人员中,从事技术岗位的“90后”的人数占总人数的百分比为22.176%,小于“80后”的人数占总人数的百分比,但“80后”从事技术岗位的人数占“80后”人数的百分比未知,D中结论不一定正确,故选D.

变式题 (1)C (2)C **[解析]** (1)对于A,由题中左图知,样本中男性人数多于女性人数,从而男性比女性更关注地铁建设,故A中结论正确;对于B,由题中右图知,女性中35岁以上的人数占多数,则样本中多数女性是35岁以上,所以关注地铁建设的女性多数是35岁以上,故B中结论正确;对于C,由题中左图知,男性人数多于女性人数,由题中右图知,35岁以下的男性占男性总人数的比例比35岁以上的女性占女性总人数的比例小,所以无法判断35岁以下的男性人数与35岁以上的女性人数的多少,故C中结论不一定正确;对于D,由题中右图知,样本中35岁以上的人对地铁建设关注度更高,故D中结论正确,故选C.

(2)对于A,由图可知,2016年至2023年,知识付费用户数量逐年增加,故A中说法正确.对于B和C,2017年知识付费用户数量的逐年增加量为 $0.96 - 0.48 = 0.48$,2018年知识付费用户数量的逐年增加量为 $1.88 - 0.96 = 0.92$,2019年知识付费用户数量的逐年增加量为 $2.95 - 1.88 = 1.07$,2020年知识付费用户数量的逐年增加量为 $3.56 - 2.95 = 0.61$,2021年知识付费用户数量的逐年增加量为 $4.15 - 3.56 = 0.59$,2022年知识付费用户数量的逐年增加量为 $4.77 - 4.15 = 0.62$,2023年知识付费用户数量的逐年增加量为 $5.27 - 4.77 = 0.5$,则知识付费用户数量逐年增加量2019年最多,知识付费用户数量的逐年增加量不是逐年递增,故B中说法正确,C中说法错误.对于D,由 $5.27 > 10 \times 0.48$ 知,2023年知识付费用户数量超过2016年知识付费用户数量的10倍,故D中说法正确,故选C.

例2 [思路点拨] (1)对于A,B,分别计算出前三段频数和低于1100 kg的频数,对于C,D,根据计算公式即可判定.

(2)根据频率分布直方图中,众数、百分位数、均值的概念及计算方法求解.

(3)由所给数据和计算公式可计算统计数据的平均数和方差.

(1)C (2)ABD (3)44 7 **[解析]** (1)对于A,根据频数分布表可知, $6+12+18=36 < 50$,所以亩产量的中位数不小于1050 kg,故A错误;对于B,亩产量不低于1100 kg的频数为 $24+10=34$,所以低于1100 kg的稻田占比为 $\frac{100-34}{100} = 66\%$,故B错误;对于C,稻田亩产量的极差小于 $1200-900=300$,大于 $1150-950=200$,故C正确;对于D,由频数分布表可得,平均值为 $\frac{1}{100} \times (6 \times 925 + 12 \times 975 + 18 \times 1025 + 30 \times 1075 + 24 \times 1125 + 10 \times 1175) = 1067$,故D错误,故选C.

(2)对于A,因为体重在 $[65,70)$ 所占的频率最高,所以估计样本的众数为 $\frac{65+70}{2} = 67.5$,故A正确;对于B,因为 $5 \times (0.03 + 0.05 + 0.06) = 0.70, 5 \times 0.04 = 0.20$,所以样本的80%分位数为 $\frac{10\%}{20\%} = 72.5$,故B正确;对于C,样本的平均数为 $57.5 \times 15\% + 62.5 \times$

$25\% + 67.5 \times 30\% + 72.5 \times 20\% + 77.5 \times 10\% = 66.75$,故C错误;对于D,根据频率分布直方图,体重低于60 kg的学生的频率为 $5 \times 0.03 = 15\%$,所以估计该校男生中体重低于60 kg的学生人数为 $2000 \times 15\% = 300$,故D正确,故选ABD.

(3)由题中的数据可得,平均数为 $\frac{1}{8} \times (40+41+43+43+44+46+47+48) = 44$,方差为 $\frac{1}{8} \times [(40-44)^2 + (41-44)^2 + \dots + (47-44)^2 + (48-44)^2] = 7$.

变式题 (1)AD (2)BCD **[解析]** (1)将原数据按从小到大的顺序排列为12,16,22,24,25,31,33,35,45,其中位数为25,平均数是 $(12+16+22+24+25+31+33+35+45) \div 9 = 27$,方差是 $\frac{1}{9} \times [(-15)^2 + (-11)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 18^2] = \frac{824}{9}$,由 $40\% \times 9 = 3.6$,得原数据的第40百分位数是第4个数24,将原数据去掉12和45,得16,22,24,25,31,33,35,其中位数为25,平均数是 $(16+22+24+25+31+33+35) \div 7 = \frac{186}{7}$,方差是 $\frac{1}{7} \times \left[\left(-\frac{74}{7} \right)^2 + \left(-\frac{32}{7} \right)^2 + \left(-\frac{18}{7} \right)^2 + \left(-\frac{11}{7} \right)^2 + \left(\frac{31}{7} \right)^2 + \left(\frac{45}{7} \right)^2 + \left(\frac{59}{7} \right)^2 \right] = \frac{1916}{49}$,由 $40\% \times 7 = 2.8$,得新数据的第40百分位数是第3个数24,故中位数和第40百分位数不变,平均数和方差改变,故A,D正确,B,C错误,故选AD.

(2)对于A,甲的数据在区间 $[1.5, 7.5]$ 内,极差小于或等于6,乙的数据在区间 $[2.5, 8.5]$ 内,极差小于或等于6,从而甲和乙的极差可能相等,故A说法错误;对于B,根据频率分布直方图可知,甲的众数在区间 $[2.5, 5.5)$ 内,乙的众数在区间 $[5.5, 6.5)$ 内,乙的众数大于甲的众数,故B说法正确;对于C,甲的数据比较分散,乙的数据比较集中,因此乙的方差小于甲的方差,故C说法正确;对于D,甲的各组频率依次为0.15,0.20,0.20,0.20,0.15,0.10,其中位数在区间 $[3.5, 4.5)$ 内,乙的各组频率依次为0.05,0.10,0.15,0.35,0.20,0.15,其中位数在区间 $[5.5, 6.5)$ 内,所以甲的中位数小于乙的中位数,故D说法正确,故选BCD.

例3 [思路点拨] (1)对于A,B,分别计算相应矩形的面积进而可得结论;对于C,验证中位数是否为5h即可;对于D,根据频率分布直方图计算平均数的方法求解即可.(2)①用频率估计概率即可;②分别根据平均数和方差的计算公式求解即可.(1)BD **[解析]** 对于A,该校高中学生平均每周英语训练时间不足4h的人数为 $(0.03 \times 2 + 0.10 \times 2) \times 5000 = 1300$,故A错误;对于B,估计该校高中学生平均每周英语训练时间不少于8h的人数所占比例为 $0.08 \times 2 + 0.03 \times 2 = 0.22 = 22\%$,故B正确;对于C,假设该校高中学生平均每周英语训练时间的中位数为5h,而训练时间小于5h的频率为 $0.03 \times 2 + 0.10 \times 2 + \frac{1}{2} \times 0.14 \times 2 = 0.4$,与频率为0.5矛盾,所以平均每周英语训练时间的中位数不是5h,故C错误;对于D,估计该校高中学生平均每周英语训练时间为 $0.03 \times 2 \times 1 + 0.10 \times 2 \times 3 + 0.14 \times 2 \times 5 + 0.12 \times 2 \times 7 + 0.08 \times 2 \times 9 + 0.03 \times 2 \times 11 = 5.84$ (h),故D正确,故选BD.

(2)解:① $\because (0.004 + 0.008 + 0.016 + 0.034 + m + 0.008 + 0.004 + 0.002) \times 10 = 1, \therefore m = 0.024$,故估计事件A发生的概率为 $(0.024 + 0.008 + 0.004 + 0.002) \times 10 = 0.38$.

②估计本次数学考试成绩的平均数为

$(75 \times 0.004 + 85 \times 0.008 + 95 \times 0.016 + 105 \times 0.034 + 115 \times 0.024 + 125 \times 0.008 + 135 \times 0.004 + 145 \times 0.002) \times 10 = 106.6$,估计本次数学考试成绩的方差为 $(998.56 \times 0.004 + 466.56 \times 0.008 + 134.56 \times 0.016 + 2.56 \times 0.034 + 70.56 \times 0.024 + 338.56 \times 0.008 + 806.56 \times 0.004 + 1474.56 \times 0.002) \times 10 = 205.44$.

变式题 (1)BCD (2)C **[解析]** (1)对于A,由 $(2a+3a+7a+6a+2a) \times 10 = 200a = 1$,解得 $a = 0.005$,故A错误;对于B,前两个矩形的面积之和为 $(2a+3a) \times 10 = 50a = 0.25 < 0.5$,前三个矩形的面积之和为 $(2a+3a+7a) \times 10 = 120a = 0.6 > 0.5$,设该年级学生成绩的中位数为 m ,则 $m \in [70, 80)$,根据中位数的定义可得 $0.25 + (m-70) \times 0.035 = 0.5$,解得 $m \approx 77.14$,所以估计该年级学生成绩的中位数约为77.14,故B正确;对于C,估计成绩在80分及以上的学生成绩的平均数为 $\frac{6a}{6a+2a} \times 85 + \frac{2a}{6a+2a} \times 95 = 87.5$,故C正确;对于D,估计该年级成绩在80分及以上的学生成绩的方差为 $\frac{3}{4} [12 + (87.5-85)^2] + \frac{1}{4} [10 + (87.5-95)^2] = 30.25$,故D正确,故选BCD.

(2)由题意得,年夜饭消费金额在(2400, 3200]内的频率为 $\frac{35}{100} = 0.35 > \frac{1}{3}$,故A中说法正确;若该地区有2000个家庭,则估计年夜饭消费金额超过2400元的家庭个数为 $2000 \times \frac{35+8+4}{100} = 940$,故B中说法正确;估计该地区家庭年夜饭消费金额的平均数为 $400 \times 0.08 + 1200 \times 0.2 + 2000 \times 0.25 + 2800 \times 0.35 + 3600 \times 0.08 + 4400 \times 0.04 = 2216$ (元),故C中说法不正确;估计该地区家庭年夜饭消费金额的中位数为 $1600 + \frac{50-20-8}{25} \times 800 = 2304$ (元),故D中说法正确,故选C.

第59讲 成对数据的统计分析

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

一、1. (2)增加 减小 (3)一条直线

(4)(i)①正相关 负相关 ②强弱

2. (2)(i)小 (ii)横轴 窄 (iii)大

二、2. (1) χ^2 独立

【对点演练】

1. $r_2 < r_4 < r_3 < r_1$ **[解析]** 根据散点图可知,图①③中的样本数据正相关,图②④中的样本数据负相关, $\therefore r_1 > 0, r_2 < 0, r_3 > 0, r_4 < 0$.又图①②中的散点近似在一条直线上,则图①②中的样本数据的线性相关程度比较高,图③④中的散点比较分散,故图③④中的样本数据的线性相关程度比较低,即 $|r_1|$ 与 $|r_2|$ 比较大, $|r_4|$ 与 $|r_3|$ 比较小, $\therefore r_2 < r_4 < r_3 < r_1$.

2. 6.1 **[解析]** 由表格数据知 $\bar{x} = 4$,设亏损的数据为 a ,则 $\bar{y} = \frac{25.4+a}{6}$,

$\therefore \frac{25.4+a}{6} = 1.03 \times 4 + 1.13$,解得 $a = 6.1$,即亏损的数据为6.1.

3. 88 **[解析]** 因为样本中志愿者的总人数为100,所以 $a+b+d+12=100$,解得 $a+b+d=88$.

4. ④ **[解析]** 根据 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$,可知 y 与 x 具有正的线性相关关系,①中结论正确;经验回归直线过点 $(\bar{x}, \bar{y})$,②中结论正确;由经验回归方程知,若该大学某女生身高增加1 cm,则其体重约增加0.85 kg,故③中结论正确;若该大学某女生身高为170 cm,则可预测其体重为58.79 kg,不可断定其体重必为58.79 kg,故④中结论不正确.

5. ① **[解析]** 因为 $\chi^2 \approx 3.918 > 3.841 = x_{0.05}$,所以认为“这种血清能起到预防感

冒的作用”，这种推断犯错误的概率不超过 0.05，故①正确；我们检验的是假设是否成立，与某人患感冒的可能性及该血清预防感冒的有效率没有关系，不是同一个问题，故②③④错误。

6. 有关联 0.01 [解析] $\chi^2 \approx 7.63 > 6.635 = x_{0.01}$ ， $\therefore$ 判断打鼾与患心脏病是有关联的，该推断犯错误的概率不超过 0.01.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 去掉离群点后成对样本数据的线性相关程度更强，新的经验回归方程的拟合效果更好。(2) 根据经验回归方程判断选项 A；写出女性平均受教育年限 $\bar{z}$ 与总和生育率 y 的关系式，从而判断选项 B；根据散点图中点的分布判断选项 C；由经验回归方程可预测未来的趋势，但实际值不一定会继续降低，从而判断选项 D.

(1) AD (2) AB [解析] (1) 去掉离群点后成对样本数据的线性相关程度更强，拟合效果更好，且由题意可知，成对样本数据正相关，所以 $r_1 < r_2$ ， $R_1^2 < R_2^2$ ，A、D 正确，故选 AD.

(2) 由经验回归方程 $\hat{z} = 7.54 + 0.33x$ 可知，人均 GDP 和女性平均受教育年限正相关，A 正确。因为 $\hat{z} = 7.54 + 0.33x$ ， $\hat{y} = 2.89 - 0.21x$ ，所以 $\hat{y} = 2.89 - 0.21 \times \frac{\hat{z} - 7.54}{0.33}$ ，所以女性平均受教育年限和总和生育率负相关，B 正确。由散点图可知，数据 (x_i, y_i) 的线性相关程度比数据 (x_i, z_i) 的线性相关程度弱，所以 $|r_1| < |r_2|$ ，C 错误。根据经验回归方程 $\hat{y} = 2.89 - 0.21x$ 可知，未来三年总和生育率有降低的趋势，但不一定继续降低，D 错误，故选 AB.

变式题 (1) C (2) D [解析] (1) 因为 $r_1 = 0.837$ ， $r_2 = -0.957$ ，所以变量 X 与 Y 正相关，变量 U 与 V 负相关，且 X 与 Y 之间的线性相关程度弱于 U 与 V 之间的线性相关程度，故选 C.

(2) 由题中图可以看出 $D(10, 2)$ 距离其他点较远，且其他点大致分布在一条斜率为正数的直线附近，所以去掉 D 后，成对样本数据的线性相关程度变强。因为成对样本数据正相关，所以去掉 D 后，样本相关系数 r 变大，A、B 错误。去掉 D 后，成对样本数据的线性相关程度变强，所以残差平方和变小，解释变量 x 与响应变量 y 的线性相关程度变强，故 C 错误，D 正确，故选 D.

例 2 [思路点拨] (1) 利用所提供数据求 $\bar{x}$ ， $\bar{y}$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2$ ， $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2$ ，代入参考公式求 r 即可；

(2) 结合公式求 $\hat{b}$ ， $\hat{a}$ ，由此可得经验回归方程，再利用经验回归方程进行预测。

解：(1) $\bar{x} = \frac{-2021 \times 5 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2}{5} = \frac{-10105 - 2 + 1}{5} = \frac{-10106}{5} = -2021.2$

$\bar{y} = \frac{0.40 + 0.70 + 1.10 + 1.50 + 1.80}{5} = 1.10$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10$ ， $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (-0.7)^2 + (-0.4)^2 + 0^2 + 0.4^2 + 0.7^2 = 1.3$ ，所以 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{3.6}{\sqrt{10} \times \sqrt{1.3}} \approx 0.998$ 。

(2) 由(1)知 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{3.6}{10} = 0.36$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 1.10 - 2021 \times 0.36 = -726.46$ ，所以 y 关于 x 的经验回归方程是 $\hat{y} = 0.36x - 726.46$ ，当 $x = 2025$ 时， $\hat{y} = 0.36 \times 2025 - 726.46 = 2.54$ ，所以预测该地区 2025 年新能源汽车购买数量为 2.54 万辆。

变式题 (1) AD [解析] 因为经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 经过点 $(10, m)$ ，所以 $m = 10\hat{b} + \hat{a}$ ， $5m = 11 + 10 + m + 6 + 5$ ，因为相对于点 $(11, 5)$ 的残差为 0.2，所以 $5 - (11\hat{b} + \hat{a}) = 0.2$ ，所以 $m = 8$ ， $\hat{b} = -3.2$ ， $\hat{a} = 40$ ，故 A 正确，B 错误，C 错误； $\hat{y} = -3.2x + 40$ ，当 $x = 9$ 时， $\hat{y} = -3.2 \times 9 + 40 = 11.2$ ，当 $x = 9.5$ 时， $\hat{y} = -3.2 \times 9.5 + 40 = 9.6$ ，当 $x = 10$ 时， $\hat{y} = -3.2 \times 10 + 40 = 8$ ，当 $x = 10.5$ 时， $\hat{y} = -3.2 \times 10.5 + 40 = 6.4$ ，当 $x = 11$ 时， $\hat{y} = -3.2 \times 11 + 40 = 4.8$ ，所以残差和为 $11 - 11.2 + 10 - 9.6 + 8 - 8 + 6 - 6.4 + 5 - 4.8 = 0$ ，故 D 正确，故选 AD.

(2) 解：① 设利润 y 关于原材料投入 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，由已知得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (82 + 84 + 85 + 86 + 88) = 85$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (770 + 800 + 830 + 850 + 900) = 830$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-3) \times (-60) + (-1) \times (-30) + 0 + 1 \times 20 + 3 \times 70 = 440$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 9 + 1 + 0 + 1 + 9 = 20$ ，所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{440}{20} = 22$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 830 - 22 \times 85 = -1040$ ，所以利润 y 关于原材料投入 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 22x - 1040$ 。

② 由(1)知，当 $x = 100$ 时， $\hat{y} = 22 \times 100 - 1040 = 1160$ ，所以当原材料投入为 100 万元时，预测该产品的利润为 1160 万元。

例 3 [思路点拨] (1) 分别将表中数据代入样本相关系数公式求出 r_1 ， r_2 ，比较大小即可判断。

(2) (i) 由 $y = e^{Ax+t}$ 两边取对数，换元得 $v = t + \lambda x$ ，由表中数据分别求 $\hat{\lambda}$ 和 $\hat{t}$ ，得经验回归方程 $\hat{v} = 0.02x + 3.84$ ，利用指数式和对数式的互化，即得 $\hat{y} = e^{0.02x + 3.84}$ ；

(ii) 将 $y = 80$ 代入经验回归方程即可预测下一年的研发资金投入量。

解：(1) 由题意知 $r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{12} (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (u_i - \bar{u})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (u_i - \bar{u})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2}}{\sqrt{3 \ 125 \ 000 \times 200}} = \frac{21 \ 500}{25 \ 000} = 0.86$ ， $r_2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{12} (v_i - \bar{v})^2}} = \frac{14}{\sqrt{770 \times 0.308}} = \frac{14}{15.4} \approx 0.91$ 。

因为 $0.86 < 0.91$ ，所以 $|r_1| < |r_2|$ ，故从样本相关系数的角度，模型 $y = e^{Ax+t}$ 中 y 与 x 的相关性较强。

(2) (i) 由 $y = e^{Ax+t}$ ，得 $\ln y = t + \lambda x$ ，即 $v = t + \lambda x$ 。

因为 $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{14}{770} \approx 0.02$ ，所以 $\hat{v} = 0.02x + 3.84$ ，即 $\ln \hat{y} = 0.02x + 3.84$ ，得 $\hat{y} = e^{0.02x + 3.84}$ ，又 $e^{4.382} \approx 80$ ，所以 $0.02x + 3.84 \approx 4.382$ ，解得 $x \approx 27.1$ ，故预测下一年的研发资金投入量约为 27.1 亿元。

变式题 (1) B [解析] 将 $u = \ln y$ ， $v = (x - 4)^2$ 代入经验回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ 得 $\ln \hat{y} = -0.5(x - 4)^2 + 2$ ，即 $\hat{y} = e^{-0.5(x - 4)^2 + 2}$ 。当 $x = 4$ 时， $-0.5(x - 4)^2 + 2$ 取得最大值 2，则此时 $\hat{y}$ 取得最大值 e^2 ，故选 B.

(2) 解：① 因为 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (4 + 6 + 8 + 10 + 12) = 8$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (27 + 42 + 55 + 56 + 60) = 48$ ，所以 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (4 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (10 - 8)^2 + (12 - 8)^2 = 40$ ， $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (27 - 48)^2 + (42 - 48)^2 + (55 - 48)^2 + (56 - 48)^2 + (60 - 48)^2 = 734$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (4 - 8) \times (27 - 48) + (6 - 8) \times (42 - 48) + (8 - 8) \times (55 - 48) + (10 - 8) \times (56 - 48) + (12 - 8) \times (60 - 48) = 160$ 。模型 (i) 中，样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{160}{\sqrt{40 \times 734}} \approx \frac{160}{171.35} \approx 0.93$ 。

② 因为 $r \approx 0.93 < 0.95$ ，所以选择模型 (ii)。令 $v_i = \sqrt{x_i}$ ，先建立 y 关于 v 的经验回归方程，由于 $\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^5 (v_i - \bar{v})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (v_i - \bar{v})^2} \approx \frac{29.91}{1.33} \approx 22.49$ ， $\hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{v} \approx 48 - 22.49 \times 2.78 \approx -14.52$ ，所以 y 关于 v 的经验回归方程为 $\hat{y} = -14.52 + 22.49v$ ，即 $\hat{y} = -14.52 + 22.49\sqrt{x}$ ，当 $x = 16$ 时， $\hat{y} = -14.52 + 22.49\sqrt{16} = 75.44$ ，所以当 $x = 16$ 时， y 的预测值为 75.44。

例 4 [思路点拨] (1) 利用频率分布估算平均数的方法列式计算即得 t 的值，再补全频率分布表。(2) 由(1)补全联表，计算 χ^2 的观测值，即可回答结论。

解：(1) $(400, 600]$ 组的频率为 $1 - 0.20 - 0.15 - t = 0.65 - t$ ，估计学生与最近食堂间的平均距离 $\bar{d} = 100 \times 0.20 + 300t + 500(0.65 - t) + 700 \times 0.15 = 450 - 200t = 370$ ，解得 $t = 0.40$ ，所以补全频率分布表如下：

因为 $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{14}{770} \approx 0.02$ ，所以 $\hat{v} = \bar{v} + \hat{\lambda}\bar{x} = 4.20 + \frac{14}{770} \times 20 \approx 3.84$ ，故 v 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{v} = 0.02x + 3.84$ ，即 $\ln \hat{y} = 0.02x + 3.84$ ，所以 $\hat{y} = e^{0.02x + 3.84}$ 。

(ii) 将 $y = 80$ 代入 $\hat{y} = e^{0.02x + 3.84}$ ，得 $80 = e^{0.02x + 3.84}$ ，又 $e^{4.382} \approx 80$ ，所以 $0.02x + 3.84 \approx 4.382$ ，解得 $x \approx 27.1$ ，故预测下一年的研发资金投入量约为 27.1 亿元。

变式题 (1) B [解析] 将 $u = \ln y$ ， $v = (x - 4)^2$ 代入经验回归方程 $\hat{u} = -0.5v + 2$ 得 $\ln \hat{y} = -0.5(x - 4)^2 + 2$ ，即 $\hat{y} = e^{-0.5(x - 4)^2 + 2}$ 。当 $x = 4$ 时， $-0.5(x - 4)^2 + 2$ 取得最大值 2，则此时 $\hat{y}$ 取得最大值 e^2 ，故选 B.

(2) 解：① 因为 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (4 + 6 + 8 + 10 + 12) = 8$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (27 + 42 + 55 + 56 + 60) = 48$ ，所以 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (4 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (10 - 8)^2 + (12 - 8)^2 = 40$ ， $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (27 - 48)^2 + (42 - 48)^2 + (55 - 48)^2 + (56 - 48)^2 + (60 - 48)^2 = 734$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (4 - 8) \times (27 - 48) + (6 - 8) \times (42 - 48) + (8 - 8) \times (55 - 48) + (10 - 8) \times (56 - 48) + (12 - 8) \times (60 - 48) = 160$ 。模型 (i) 中，样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{160}{\sqrt{40 \times 734}} \approx \frac{160}{171.35} \approx 0.93$ 。

② 因为 $r \approx 0.93 < 0.95$ ，所以选择模型 (ii)。令 $v_i = \sqrt{x_i}$ ，先建立 y 关于 v 的经验回归方程，由于 $\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^5 (v_i - \bar{v})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (v_i - \bar{v})^2} \approx \frac{29.91}{1.33} \approx 22.49$ ， $\hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{v} \approx 48 - 22.49 \times 2.78 \approx -14.52$ ，所以 y 关于 v 的经验回归方程为 $\hat{y} = -14.52 + 22.49v$ ，即 $\hat{y} = -14.52 + 22.49\sqrt{x}$ ，当 $x = 16$ 时， $\hat{y} = -14.52 + 22.49\sqrt{16} = 75.44$ ，所以当 $x = 16$ 时， y 的预测值为 75.44。

例 4 [思路点拨] (1) 利用频率分布估算平均数的方法列式计算即得 t 的值，再补全频率分布表。(2) 由(1)补全联表，计算 χ^2 的观测值，即可回答结论。

解：(1) $(400, 600]$ 组的频率为 $1 - 0.20 - 0.15 - t = 0.65 - t$ ，估计学生与最近食堂间的平均距离 $\bar{d} = 100 \times 0.20 + 300t + 500(0.65 - t) + 700 \times 0.15 = 450 - 200t = 370$ ，解得 $t = 0.40$ ，所以补全频率分布表如下：

例 4 [思路点拨] (1) 利用频率分布估算平均数的方法列式计算即得 t 的值，再补全频率分布表。(2) 由(1)补全联表，计算 χ^2 的观测值，即可回答结论。

解：(1) $(400, 600]$ 组的频率为 $1 - 0.20 - 0.15 - t = 0.65 - t$ ，估计学生与最近食堂间的平均距离 $\bar{d} = 100 \times 0.20 + 300t + 500(0.65 - t) + 700 \times 0.15 = 450 - 200t = 370$ ，解得 $t = 0.40$ ，所以补全频率分布表如下：

例 4 [思路点拨] (1) 利用频率分布估算平均数的方法列式计算即得 t 的值，再补全频率分布表。(2) 由(1)补全联表，计算 χ^2 的观测值，即可回答结论。

解：(1) $(400, 600]$ 组的频率为 $1 - 0.20 - 0.15 - t = 0.65 - t$ ，估计学生与最近食堂间的平均距离 $\bar{d} = 100 \times 0.20 + 300t + 500(0.65 - t) + 700 \times 0.15 = 450 - 200t = 370$ ，解得 $t = 0.40$ ，所以补全频率分布表如下：

例 4 [思路点拨] (1) 利用频率分布估算平均数的方法列式计算即得 t 的值，再补全频率分布表。(2) 由(1)补全联表，计算 χ^2 的观测值，即可回答结论。

解：(1) $(400, 600]$ 组的频率为 $1 - 0.20 - 0.15 - t = 0.65 - t$ ，估计学生与最近食堂间的平均距离 $\bar{d} = 100 \times 0.20 + 300t + 500(0.65 - t) + 700 \times 0.15 = 450 - 200t = 370$ ，解得 $t = 0.40$ ，所以补全频率分布表如下：

学生与最近食堂间的距离 d (m)	(0, 200]	(200, 400]	(400, 600]	(600, 800]	合计
在食堂就餐频率	0.15	0.20	0.10	0.05	0.50
点外卖频率	0.05	0.20	0.15	0.10	0.50
合计	0.20	0.40	0.25	0.15	1.00

(2)由(1)知,2000名学生中距最近食堂较近的有 $2000 \times 0.6 = 1200$ (名),其中在食堂就餐的有 $2000 \times 0.35 = 700$ (名),距最近食堂较远的学生中,在食堂就餐的有 $2000 \times 0.15 = 300$ (名),因此补全 2×2 列联表如下:

单位:名

用餐方式	学生距最近食堂的远近		合计
	学生距最近食堂较近	学生距最近食堂较远	
在食堂就餐	700	300	1000
点外卖	500	500	1000
合计	1200	800	2000

零假设为 H_0 :学生中午的用餐方式与学生距最近食堂的远近无关联,则 $\chi^2 = \frac{2000 \times (700 \times 500 - 300 \times 500)^2}{1000 \times 1000 \times 1200 \times 800} = \frac{250}{3} >$

$10.828 = x_{0.001}$,根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为学生中午的用餐方式与学生距最近食堂的远近有关联,此推断犯错误的概率不大于0.001.

变式题 (1)有 [解析] 由等高堆积条形图可以看出,喜欢篮球运动的男生比例比喜欢篮球运动的女生比例大很多,因此可以判断性别与对篮球运动的态度有关联.

(2)解:①将表格补充完整为

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

K^2 的观测值 $k =$

$$\frac{150 \times (26 \times 30 - 70 \times 24)^2}{96 \times 54 \times 50 \times 100} \approx 4.688.$$

因为 $4.688 > 3.841$,所以有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差

异.因为 $4.688 < 6.635$,所以没有99%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

②由题意可知,生产线智能化升级改造后,该工厂产品的优级品的频率为 $\frac{96}{150} =$

0.64 ,用频率估计概率可得 $\bar{p} = 0.64$.

又因为升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$,所以 $p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} =$

$$0.5 + 1.65 \sqrt{\frac{0.5 \times (1-0.5)}{150}} \approx 0.5 +$$

$$1.65 \times \frac{0.5}{12.247} \approx 0.567,$$

$$\text{可知 } \bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

所以可以认为生产线智能化升级改造后,该工厂产品的优级品率提高了.

第十单元 计数原理、概率、随机变量及其分布

第60讲 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

$$m+n \quad m \times n$$

【对点演练】

1. 120 [解析] 根据分步乘法计数原理可知,可选择的不同的方案有 $10 \times 12 = 120$ (种).

2. 21 [解析] 依题意知共有 $10 + 8 + 3 = 21$ (种)不同的选法.

3. 32 1024 [解析] 若每位同学限报其中一个小组,则每位同学都有2种报名方法,由分步乘法计数原理知,不同的报名方法共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ (种).若没有任何限制,则每位同学可以都不报,可以报一个,也可以都报,则每位同学有 $1 + 2 + 1 = 4$ (种)报名方法,由分步乘法计数原理知,不同的报名方法共有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ (种).

4. 15 120 [解析] 从书架上任取1本书,有三类方案:第1类,从第1层取1本语文书,有6种方法;第2类,从第2层取1本数学书,有5种方法;第3类,从第3层取1本外语书,有4种方法.根据分类加法计数原理,不同取法的种数为 $6 + 5 + 4 = 15$.从书架的第1层、第2层、第3层各取1本书,可以分三步完成:第1步,从第1层取1本语文书,有6种方法;第2步,从第2层取1本数学书,有5种方法;第3步,从第3层取1本外语书,有4种方法.根据分步乘法计数原理,不同取法的种数为 $6 \times 5 \times 4 = 120$.

5. 20 [解析] 由三位“凸数”的特点知,中间的数字只能是3,4,5,即分三类.第一类,当中间数字为“3”时,此时有2个“凸数”,即132,231;第二类,当中间数字为“4”时,个位数字有3种选择,百位数字有2种选择,则“凸数”有 $2 \times 3 = 6$ (个);第三类,当中间数字为“5”时,个位数字有4种选择,百位数字有3种选择,则“凸数”有 $4 \times 3 = 12$ (个).由分类加法计数原理得,由1,2,3,4,5可以组成无重复数字的三位“凸数”的个数是 $2 + 6 + 12 = 20$.

6. (1)60 (2)125 [解析] (1)从5本不同的书中选出3本分别送给3名同学,对应于从5个不同元素中任取3个元素的一个排列,因此不同送法的种数是 $5 \times 4 \times 3 = 60$.

(2)由于有5种不同的书(每种不少于3本),故每名同学都有5种不同的送法,因此送给3名同学,每人各1本书的不同送法的种数是 $5 \times 5 \times 5 = 125$.

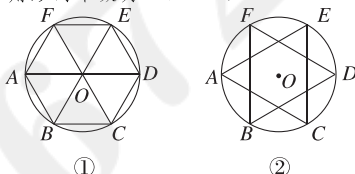
● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1)利用分类加法计数原理,当个位数字分别为9,7,5,3时,考虑数字的组成情况.(2)利用圆的对称性,将等边三角形分两类:相邻2个点和圆心构成的等边三角形、相间隔的3个点构成的等边三角形.根据分类加法计数原理即可

求出结果.

(1)10 (2)8 [解析] (1)要组成十位数字小于个位数字的两位数,可分如下情况:当个位数字为9时,十位上的数字有4种取法,能组成4个十位数字小于个位数字的两位数;当个位数字为7时,十位上的数字有3种取法,能组成3个十位数字小于个位数字的两位数;当个位数字为5时,十位上的数字有2种取法,能组成2个十位数字小于个位数字的两位数;当个位数字为3时,十位上的数字有1种取法,能组成1个十位数字小于个位数字的两位数.所以组成的十位数字小于个位数字的两位数有 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (个).

(2)根据圆的对称性,分两类讨论.如图①,由圆上相邻2个点和圆心可构成等边三角形,这样的等边三角形有6个;如图②,由圆上相间隔的3个点可构成等边三角形,这样的等边三角形有2个.由分类加法计数原理可得,共能构成不同的等边三角形的个数为 $6 + 2 = 8$.



变式题 (1)A (2)B [解析] (1)因为椭圆的焦点在 x 轴上,所以 $m > n$.以 m 的值为标准分类,可分为四类:第一类,当 $m = 5$ 时,使 $m > n$, n 有4种选择;第二类,当 $m = 4$ 时,使 $m > n$, n 有3种选择;第三类,当 $m = 3$ 时,使 $m > n$, n 有2种选择;第四类,当 $m = 2$ 时,使 $m > n$, n 有1种选择.故符合条件的椭圆共有 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (个).故选A.

(2)符合题目要求的分类方法有甲3张乙1张,甲2张乙2张,甲1张乙3张三类.①若甲3张乙1张,则有4种分法;②若甲2张乙2张,则有6种分法;③若甲1张乙3张,则有4种分法.所以不同分法的种数为 $4 + 6 + 4 = 14$.故选B.

例2 [思路点拨] (1)分两步进行分析:第一步选取1种相同课外读物,第二步选取另外两种.(2)先安排男生,再安排女生,在安排女生时,利用间接法分析运算,根据分步乘法计数原理,即可求解.

(1)B (2)C [解析] (1)根据题意,分2步进行分析:首先选取1种相同课外读物的选法有5种,再选取另外两种不同的课外读物,有 $4 \times 3 = 12$ (种).所以这两人选取的课外读物中恰有1种相同的选法共有 $5 \times 12 = 60$ (种).故选B.

(2)先安排2名男生,保证每个小组都有男生,则有2种分配方案;再安排5名女生,若将每名女生随机安排,则有 $2^5 = 32$ (种)分配方案,若5名女生都在同一小组,则有2种分配方案,因为每个小组都有女生,所以女生共有 $2^5 - 2 = 30$ (种)分

配方案.所以共有 $2 \times 30 = 60$ (种)分配方案,故选C.

变式题 (1)B (2)B [解析] (1)完成这个事情需要三步:第1步,在第二、三、四笔选一笔写卧钩,有3种方法;第2步,在前四笔剩下的三笔中写左点、上点、撇,有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (种)方法;第3步,最后一笔写右点,有1种方法.根据分步乘法计数原理可知,共有 $3 \times 6 \times 1 = 18$ (种)笔顺.故选B.

(2)求不同填法需要4步:填中间一列有2种方法,再填1有3种方法,与1同列的只能是3或4,有2种方法,最后两个区域填两个数字,有2种方法,所以不同的填法种数是 $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$.故选B.

例3 [思路点拨] (1)由于0不能为百位数字,故分2种情况讨论:0在个位和0不在个位,再由分类加法计数原理计算可得答案.(2)先考虑居中色块E,由于相邻区域不同色,则可分类讨论C,D同色和C,D不同色,最后考虑A,B.

(1)C (2)A [解析] (1)根据题意,分2种情况讨论:①若0在个位,此时只需从1,2,3,4,5中任取2个数字,作为十位和百位数字即可,有 $5 \times 4 = 20$ (个)没有重复数字的三位偶数;②若0不在个位,此时必须从2和4中任取1个数字作为个位数字,有2种取法,0不能作为百位数字,则百位数字有4种取法,十位数字也有4种取法,此时有 $2 \times 4 \times 4 = 32$ (个)没有重复数字的三位偶数.综上可得,共有 $20 + 32 = 52$ (个)没有重复数字的三位偶数.故选C.

(2)先涂E,有4种选择,接下来涂C,有3种选择,再涂F,有2种选择.①当C,D颜色相同时,涂色方法种数是 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$;②当C,D颜色不同时,涂色方法种数是 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (1 + 2) = 72$.故满足题意的涂色方法种数是 $48 + 72 = 120$.故选A.

变式题 (1)B (2)43 [解析] (1)按照 $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的顺序进行染色,按照A,C是否同色分类:第一类,A,C同色,由分步乘法计数原理,有 $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 180$ (种)不同的染色方法;第二类,A,C不同色,由分步乘法计数原理,有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ (种)不同的染色方法.根据分类加法计数原理,共有 $180 + 240 = 420$ (种)不同的染色方法.故选B.

(2)设直线 $ax + by + c = 0$ 的倾斜角为 θ ,

$$\text{则 } \tan \theta = -\frac{a}{b} > 0. \text{不妨设 } a > 0, \text{则 } b <$$

0.当 $c = 0$ 时, a 有3种取法, b 有3种取法,其中 $3x - 3y = 0, 2x - 2y = 0$ 与 $x - y = 0$ 为同一直线,故符合要求的直线有 $3 \times 3 - 2 = 7$ (条);当 $c \neq 0$ 时, a 有3种取法, b 有3种取法, c 有4种取法,且其中任意两条直线均不重合,故符合要求的直线有 $3 \times 3 \times 4 = 36$ (条).故符合要求的直线有 $7 + 36 = 43$ (条).

第61讲 排列与组合

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 一定的顺序

2. 不同排列 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 1) 不同组合 $\frac{A_n^m}{A_m^m}$

【对点演练】

1. 4 [解析] 4名学生中,来自高一、高二年级的各2名,所以随机选2名学生,来自不同年级的选择方法有 $C_2^1 C_2^1 = 4$ (种).2. 2400 [解析] 安排甲和乙在3日至7日中的两天值班,然后安排其他五人在剩余五天值班,所以不同的安排方法有 $A_5^5 \times A_2^2 = 20 \times 120 = 2400$ (种).3. 20 [解析] A项工作安排3人有 $C_3^3 = 10$ (种)安排方式,B,C两项工作均只安排1人,有 $A_2^2 = 2$ (种)安排方式,则不同的安排方式共有 $10 \times 2 = 20$ (种).4. 5 120 96 [解析] 从5名学生中选出4名去参加学科竞赛,有 $C_5^4 = 5$ (种)选法.若这4名学生分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛,则不同的参赛方案有 $A_4^4 = 120$ (种).由于甲不参加生物竞赛,因此安排甲参加另外三门学科的竞赛或甲不参加任何竞赛.①当甲参加另外三门学科的竞赛时,有 $C_3^3 A_3^3 = 72$ (种)方案;②当甲不参加任何竞赛时,有 $A_1^1 = 24$ (种)方案.故甲不参加生物竞赛的不同参赛方案种数为 $72 + 24 = 96$.5. 720 720 [解析] 要将这7人站成一排,且3个女生排在一起,可以分2个步骤:第1步,将3个女生全排列,有 $A_3^3 = 6$ (种)方法;第2步,将3个女生“捆绑”看作1个整体与男生4人全排列,有 $A_5^5 = 120$ (种)方法.根据分步乘法计数原理,3个女生排在一起共有 $6 \times 120 = 720$ (种)排法.要将这7人站成一排,且甲、乙2人之间恰好有3个人,可以分3个步骤:第1步,甲、乙2人全排列,有 $A_2^2 = 2$ (种)方法;第2步,从其余5个人中选出3个人,在甲、乙2人之间排列,有 $A_3^3 = 60$ (种)方法;第3步,将甲、乙2人及之间的3个人“捆绑”为1个元素,与另外2个人共3个元素全排列,有 $A_3^3 = 6$ (种)方法.根据分步乘法计数原理,甲、乙2人之间恰好有3个人共有 $2 \times 60 \times 6 = 720$ (种)排法.6. 150 [解析] 依题意分两类情况:第一类为(2,2,1),则有 $\frac{C_2^2 C_2^2 A_3^3}{A_2^2} = 90$ (种)参加方式;第二类为(1,1,3),则有 $\frac{C_1^1 C_1^1 A_3^3}{A_2^2} = 60$ (种)参加方式.所以共有 $90 + 60 = 150$ (种)参加方式.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] (1)易知2天相连的情况有4种,再对剩下的全排列即可求解.

(2)思路一:直接考虑喀什的顺序有4种,后面只需考虑剩下的4个城市即可;思路二:根据给定条件,先算不考虑限制条件的排列数,再减去最后目的是喀什的排列数即可.

(1)D (2)D [解析] (1)由题意,从星期一至星期五值班,2天相连的情况有4种,则不同的安排方法共有 $4A_4^4 = 96$ (种).故选D.(2)方法一:先安排喀什的顺序有4种,再安排剩下的四个城市有 $A_4^4 = 24$ (种),所以共有 $4A_4^4 = 96$ (种)顺序.方法二:最后目的地没有限制条件的情况有 A_5^5 种,而最后一个目的城市是喀什的情况有 A_4^4 种,所以最后一个目的城市不是喀什的情况有 $A_5^5 - A_4^4 = 96$ (种).故选D.变式题 (1)C (2)C [解析] (1)3名男医生各去一个区域,有 A_3^3 种派遣方法,2名女医生有 3^2 种派遣方法,共有 $A_3^3 \cdot 3^2 = 54$ (种)派遣方法.(2)先进行分类:①3人到A队伍,考虑3人在A队的排队顺序,此时有 $A_3^3 = 6$ (种)排队方案;②2人到A队伍,同样要考虑2人在A队的排队顺序,此时有 $A_2^2 = 2$ (种)排队方案;③1人到A队伍,要考虑2人在B队的排队顺序,此时有 $A_2^2 = 2$ (种)排队方案;④0人到A队伍,要考虑3人在B队的排队顺序,此时有 $A_3^3 = 6$ (种)排队方案.所以甲、乙、丙三人不同的排队方案共有 $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ (种).故选C.例2 [思路点拨] (1)从平行直线 $x+y-a=0(a=0,1,2,3,4,5)$ 中选2条,再从平行直线 $2x-y+b=0(b=0,1,2,3,4,5)$ 中选2条,即可确定1个平行四边形,从而确定平行四边形的个数.(2)按选修2门或3门课进行分类讨论,结合组合知识求解.(1)D (2)64 [解析] (1)从平行直线 $x+y-a=0(a=0,1,2,3,4,5)$ 中选2条,再从平行直线 $2x-y+b=0(b=0,1,2,3,4,5)$ 中选2条,即可确定1个平行四边形,所以可确定平行四边形的个数为 $C_6^2 C_6^2 = 15 \times 15 = 225$ (个).故选D.(2)若选修2门课,则需要从体育类和艺术类选修课中各选1门,有 $C_1^1 C_1^1 = 16$ (种)方案;若选择3门课,则包含两种情况:选2门体育类,1门艺术类或2门艺术类,1门体育类,有 $C_2^2 C_1^1 + C_1^1 C_2^2 = 48$ (种)方案.故不同的选课方案共有 $16 + 48 = 64$ (种).变式题 (1)AD (2)42 [解析] (1)对于A,若4人中男、女生各2人,则有 $C_2^2 C_2^2 = 6 \times 3 = 18$ (种)选法,故A正确;对于B,若男生甲和女生乙必选,则有 $C_3^3 = 10$ (种)选法,故B错误;对于C,从7名同学中任选4人,共有 $C_7^4 = 35$ (种)选法,而甲、乙都不被选有 $C_5^4 = 5$ (种)选法,故甲、乙至少有1人被选有 $C_7^4 - C_5^4 = 35 - 5 = 30$ (种)选法,故C错误;对于D,若4人中既有男生又有女生,则有 $C_7^4 - C_4^4 = 35 - 1 = 34$ (种)选法,故D正确.故选AD.(2)依题意,问题相当于从1,2,3,...,10这10个数中任取3个,这3个数的和能被3整除,10个数中能被3整除的有3,6,9;除以3余数是1的有1,4,7,10;除以3余数是2的有2,5,8.所以编号之和能被3整除的取法共有 $2C_3^3 + C_4^3 + C_3^3 C_4^1 = 42$ (种).

例3 [思路点拨] (1)根据两个计数原理和排列组合的知识,逐项判断即可.(2)根据给定条件,按甲参加与甲不参加分类,再结合有限制条件的排列问题列式计算即可.

(1)C (2)276 [解析] (1)对于A,从7人中任选3人相互调整位置,其余4人位置不变,则不同的调整方案有 $C_7^3 \times 2 \times 1 = 70$ (种),故A中说法正确;对于B,先排女生,将4名女生全排列,有 A_4^4 种方法,再排男生,由于男生互不相邻,因此可以在女生之间及首尾空出的5个空位中任选3个空位排男生,有 A_5^3 种方法,故共有 $A_4^4 \cdot A_5^3 = 1440$ (种)站法,故B中说法正确;对于C,将女生看成一个整体,考虑女生之间的顺序,有 A_4^4 种情况,再将女生的整体与3名男生进行全排列,有 A_4^4 种情况,故共有 $A_4^4 \cdot A_4^4 = 576$ (种)站法,故C中说法错误;对于D,若甲站在排尾,则有 A_6^6 种站法,若甲不站在排尾,则有 $A_2^1 A_5^5$ 种站法,故共有 $A_6^6 + A_2^1 A_5^5 = 3720$ (种)站法,故D中说法正确.故选C.(2)依题意,由甲、乙至少有一人参加,分甲参加与甲不参加乙必参加两种情况:当甲参加时,有 $C_3^3 A_3^3$ 种选派方法;当甲不参加时,有 $C_4^4 A_4^4$ 种选派方法.所以不同的选派方法种数是 $C_3^3 A_3^3 + C_4^4 A_4^4 = 180 + 96 = 276$.变式题 (1)C (2)864 [解析] (1)若乙担任数学课代表,则不同的安排方式有 $C_2^2 \cdot A_4^4 = 48$ (种);若丙担任数学课代表,则不同的安排方式有 $C_2^2 \cdot C_2^2 \cdot A_3^3 = 24$ (种).所以不同的安排方式共有 $48 + 24 = 72$ (种).故选C.(2)首先从“诗”“酒”“花”“茶”中选“两雅”,有 C_4^2 种选法;“琴”“棋”相邻用捆绑法看作一个整体,与除“书”与“画”外的“两雅”全排列,有 A_3^3 种排法;最后将“书”与“画”插入到所形成的4个空中的2个空,有 A_4^2 种插法.按照分步乘法计数原理可得,共有 $C_4^2 A_3^3 A_2^2 A_4^2 = 864$ (种)排课方法.

例4 [思路点拨] 结合捆绑法与全排列,并消除C和D的顺序即可求解.

C [解析] A,B相邻有 A_2^2 种站法,将A,B看成一个整体与C,D,E,F进行全排列,共有 A_5^5 种站法,则C在D的左边的站法有 $\frac{A_2^2 A_5^5}{A_2^2} = 120$ (种).故选C.变式题 D [解析] 方法一:依题意,7名棋手作全排列为 A_7^7 ,其中原有5名棋手的排列为 A_5^5 ,所以不改变一班棋手出场次序的不同排法种数为 $\frac{A_7^7}{A_5^5} = 7 \times 6 = 42$.方法二:由5名棋手位置固定,有6个空隙,先插入二班的第一名棋手有6种插法,此时有7个空隙,再插入二班的第二名棋手有7种插法,所以不同的排法有 $7 \times 6 = 42$ (种).

例5 [思路点拨] 利用隔板法可得答案.

D [解析] 将8个参赛名额看成8个元素,之间会产生7个空隙,则分配方法共有 $\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$ (种),故选D.变式题 15 [解析] 由于每只羊羔的价格均为300元,因此共有10个购买羊羔的指标,可以看成10个无差别的小球,3种不同的羊羔可以看成3个编号分别为1,2,3的盒子,要求每种羊羔至少买2只,则先取出3个小球放入盒子中,每盒1个,则问题转化为把7个无差别的小球装入3个不同的盒子中,每个盒子至少装1个小球.用隔板法,7个小球之间共有6个空隙,从中选2个插入隔板,则共有 $C_6^2 = 15$ (种)不同的购买方案.

例6 [思路点拨] 先不考虑专家A不能去甲乡镇的情况,将六名农业专家分组,再分配到三个乡镇上,求出总的安排方案种数,最后根据专家A不去甲乡镇所占的比例求解即可.

360 [解析] 由题意,先不考虑专家A不能去甲乡镇的情况,将六名农业专家分成三组,有(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)三种情况.按(1,1,4)分组有 $\frac{C_6^1 C_1^1 C_4^1}{A_2^2} = 15$ (种)方法,按(1,2,3)分组有 $\frac{C_6^1 C_2^2 C_3^1}{A_3^3} = 60$ (种)方法,按(2,2,2)分组有 $\frac{C_6^2 C_2^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ (种)方法.再将三组农业专家分配到甲、乙、丙三个乡镇上,有 A_3^3 种方法.所以共有 $(15 + 60 + 15) A_3^3 = 540$ (种)安排方案.上述安排方案中,专家A去甲乡镇,去乙乡镇和去丙乡镇的安排方案种数相等,故专家A不去甲乡镇的安排方案有 $540 \times \frac{2}{3} = 360$ (种).变式题 B [解析] 将4名同学按2,1,1分组,再分配到4所学校中的3所,共有 $\frac{C_4^2 C_1^1 C_1^1}{A_2^2} A_3^3 = 144$ (种)方法.故选B.

第62讲 二项式定理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $C_n^k a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$ (1) $n+1$ 2. $k+1$ 3. $C_n^k a^{n-k} b^k$ 4. (2) ① $C_n^{\frac{n}{2}}$ ② $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ (3) ① 2^n ② 2^{n-1}

【对点演练】

- 160 [解析] $(1+2x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r 1^{6-r} (2x)^r = C_6^r 2^r x^r$, 令 $r=3$, 则展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3 \times 2^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 8 = 160$.
- 2 [解析] 设 $f(x) = \left(ax^2 - \frac{1}{x}\right)^9$, 则由题意得 $f(1) = (a-1)^9 = 1$, 解得 $a=2$.
- 672 [解析] 由题意得 $2^n = 128$, 则 $n=7$, 则 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r 2^{7-r} C_7^r x^{7-2r}$, 令 $7-2r=3$, 可得 $r=2$, 所以展开式中 x^3 的系数为 $(-1)^2 \times 2^5 C_7^2 = 672$.
- $10^n - 1$ [解析] $C_n^0 \cdot 3^{2n} + C_n^1 \cdot 3^{2n-2} + C_n^2 \cdot 3^{2n-4} + \dots + C_n^{n-1} \cdot 3^2 = C_n^0 \cdot (3^2)^n + C_n^1 \cdot (3^2)^{n-1} + C_n^2 \cdot (3^2)^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} \cdot (3^2)^1 + C_n^n \cdot (3^2)^0 = (3^2 + 1)^n - 1 = 10^n - 1$.
- 6 [解析] $(x + \sqrt{3}y)^{20}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{20}^r x^{20-r} (\sqrt{3}y)^r = C_{20}^r x^{20-r} y^r \cdot 3^{\frac{r}{4}}$, 当 $\frac{r}{4}$ 为整数时, 系数为有理数. 因为 $0 \leq r \leq 20$, 且 $r \in \mathbf{N}$, 所以 $r=0, 4, 8, 12, 16, 20$, 所以展开式中系数为有理数的项共有 6 项.
- 3 [解析] 令 $x=1$, 得展开式各项系数的和为 4^n , 又各二项式系数的和为 2^n , 所以 $4^n - 2^n = 56$, 即 $(2^n)^2 - 2^n - 56 = 0$, 可得 $2^n = 8$, 故 $n=3$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 先求出展开式的通项, 令 x 的指数等于 0, 求得 $r=3$, 即可求解. (2) 写出二项式展开式的通项, 由条件列出方程, 即可得到结果.

- (1) 20 (2) ± 1 [解析] (1) $\left(\frac{3}{x^3} + \frac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{3}{x^3}\right)^{6-r} \left(\frac{x^3}{3}\right)^r = 3^{6-2r} C_6^r x^{6(r-3)}$, $r=0, 1, \dots, 6$, 令 $6(r-3)=0$, 可得 $r=3$, 所以常数项为 $3^0 C_6^3 = 20$.
(2) $(\sqrt{x} + a)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x^{\frac{1}{2}})^{6-r} a^r = C_6^r x^{\frac{6-r}{2}} a^r$, 因为 x 的系数与 x^2 的系数相等, 所以 $a^4 C_6^4 = a^2 C_6^6$, 即 $a^4 = a^2$, 所以 $a^2(a^2 - 1) = 0$, 又 $a \neq 0$, 所以 $a = \pm 1$.

变式题 (1) B (2) D [解析] (1) $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^3$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_3^r (x^2)^{3-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = C_3^r \left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{6-3r}$, 令 $6-3r=0$, 可得 $r=2$, 所以 $T_3 = C_3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 故选 B.
(2) $\left(x^2 - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第 7 项为 $T_7 = C_n^6 (x^2)^{n-6} \left(-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^6 = (-a)^6 C_n^6 x^{2n-14}$, 由题意得 $2n-14=0$, $(-a)^6 C_n^6 = 7(a > 0)$, 所以 $n=7, a=1$, 则展开式的通项为 $T_{k+1} = (-1)^k C_7^k x^{14-2k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = (-1)^k C_7^k x^{\frac{42-7k}{3}}$, $k=0, 1, 2, \dots, 7$, 令 $\frac{42-7k}{3} \in \mathbf{Z}$, 则 $k=0, 3, 6$, 所以展开式中有理项共有 3 项. 故选 D.

例 2 [思路点拨] (1) 根据二项式系数的性质得 $n=7$, 再根据二项展开式的通项即可求得指定项的系数. (2) 根据二项式定理写出展开式的通项, 假设第 $r+1$ 项的系数最大, 利用最大系数大于等于前一项系数和后一项系数建立不等式组求解.

- (1) B (2) 5 [解析] (1) 因为 $(x-2y)^n$ 的展开式中第 4 项与第 5 项的二项式系数相等, 所以 $C_n^3 = C_n^4$, 则 $n=7$. $(x-2y)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r x^{7-r} (-2y)^r$, 令 $r=2$, 则展开式中 $x^5 y^2$ 的系数为 $C_7^2 (-2)^2 = 84$. 故选 B.
(2) 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} x^r$, $0 \leq r \leq 10$, 且 $r \in \mathbf{Z}$, 设展开式中系数最大的项为第 $r+1$ 项, 则需要满足 $\begin{cases} C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \\ C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \end{cases}$ 解得 $\frac{29}{4} \leq r \leq \frac{33}{4}$, 又 $r \in \mathbf{Z}$, 所以 $r=8$, 即展开式中, 各项系数中的最大值为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.

变式题 (1) $240x^6$ (2) $\frac{21}{2}$ [解析] (1) 由题可得 $\frac{n}{2} + 1 = 4$, 解得 $n=6$, 所以 $T_5 = C_6^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 (-2x^2)^4 = 240x^6$.
(2) $\because C_n^1 + C_n^2 = 45, \therefore n=9$. $\left(\frac{1}{2x} + \sqrt{x}\right)^9$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_9^k \left(\frac{1}{2}\right)^{9-k} x^{-(9-k)} x^{\frac{k}{2}} = C_9^k 2^{k-9} x^{\frac{3k-18}{2}}$, 令 $\frac{3k-18}{2} = 0$, 得 $k=6, \therefore$ 展开式中的常数项为 $C_9^6 \cdot 2^{-3} = \frac{21}{2}$.

例 3 [思路点拨] (1) 根据展开式的特点, 令 $x=0, 1$ 或 -1 , 分析各选项即可. (2) 对已知等式求导并赋值构造出式子 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$ 即可.
(1) BCD (2) 240 [解析] (1) 令 $x=0$, 则 $a_0 = 1$, A 选项错误; 令 $x=1$, 则 $(-1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (-1)^5 - a_0 = -2$, B 选项正确; $(1-2x)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \times 1^{5-r} \times (-2x)^r$, 所以 $a_4 = C_5^4 (-2)^4 = 80$, C 选项正确; 令 $x=-1$, 则 $3^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$, 所以 $a_1 + a_3 + a_5 = \frac{1}{2} \times [a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5)] = \frac{(-1)^5 - 3^5}{2} = -122$, D 选项正确. 故选 BCD.
(2) $(3x-4)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + a_5(x-1)^5$, 对式子两边同时求导, 得 $15(3x-4)^4 = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + 4a_4(x-1)^3 + 5a_5(x-1)^4$, 令 $x=2$, 得 $15 \times (3 \times 2 - 4)^4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 240$.

变式题 (1) $\frac{121}{122}$ (2) 0 [解析] (1) 令 $x=1$, 得 $(1+2)^5 = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 243$, 令 $x=-1$, 得 $(-1+2)^5 = -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 1$, 则 $a_5 + a_3 + a_1 = \frac{1}{2} \times [(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) - (-a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)] = \frac{243-1}{2} = 121$, 且 $a_4 + a_2 + a_0 = \frac{1}{2} \times [(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + (-a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0)] = \frac{243+1}{2} = 122$, 故 $a_4 + a_2 + a_0 = 122$.
(2) 令 $x = -\frac{1}{e}$, 可得 $0 = a_0 - \frac{a_1}{e} + \frac{a_2}{e^2} - \frac{a_3}{e^3} + \frac{a_4}{e^4} - \dots - \frac{a_{2025}}{e^{2025}}$.

$a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = \frac{243+1}{2} = 122$, 故 $\frac{a_5 + a_3 + a_1}{a_4 + a_2 + a_0} = \frac{121}{122}$.
(2) 令 $x = -\frac{1}{e}$, 可得 $0 = a_0 - \frac{a_1}{e} + \frac{a_2}{e^2} - \frac{a_3}{e^3} + \frac{a_4}{e^4} - \dots - \frac{a_{2025}}{e^{2025}}$.

例 4 [思路点拨] 根据展开式的特征, 将 $x^4 + (x+1)^7$ 转化为 $[(x+2)-2]^4 + [(x+2)-1]^7$, 利用二项展开式的通项即可求解.

B [解析] 由题意得 $x^4 + (x+1)^7 = [(x+2)-2]^4 + [(x+2)-1]^7 = a_0 + a_1(x+2) + a_2(x+2)^2 + \dots + a_7(x+2)^7$, 故 $a_3 = C_4^1(-2)^1 + C_7^4(-1)^4 = -8 + 35 = 27$, 故选 B.

变式题 78 [解析] 令 $x=0$, 可得 $a_0 = 2$, 令 $x=1$, 可得 $2^7 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7$ ①, 令 $x=-1$, 可得 $2^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ ②, 所以由 ① + ② 可得 $2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) = 2^5 + 2^7 = 160$, 所以 $2 + a_2 + a_4 + a_6 = 80$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 = 78$.

例 5 [思路点拨] (1) $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 可

化为 $(x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$, 结合二项式展开式的通项求解. (2) 根据题意可得, 5 个因式中 3 个因式选择 x , 2 个因式选择常数, 即可求解.

(1) -28 (2) A [解析] (1) 因为 $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8 = (x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$, 所以 $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 $x^2 y^6$ 的项为 $C_8^6 x^2 y^6 - \frac{y}{x} C_8^5 x^3 y^5 = -28x^2 y^6$, $\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 $x^2 y^6$ 的系数为 -28.
(2) 5 个因式中 3 个因式选择 x , 2 个因式选择常数, 则含 x^3 的项的系数是 $(-4) \times 5 + 3 \times 5 + 3 \times (-4) + (-2) \times 5 + (-2) \times 3 + (-2) \times (-4) + 1 \times 5 + 1 \times (-4) + 1 \times 3 + 1 \times (-2) = -23$. 故选 A.

变式题 (1) D (2) C [解析] (1) 根据二项式定理得 $(1-x)(1+2x)^4 = (1-x)(1+8x+24x^2+32x^3+16x^4)$, 所以 $a_0 = 1, a_4 x^4 = -x \cdot 32x^3 + 1 \times 16x^4 = -16x^4$, 则 $a_4 = -16$, 所以 $a_4 - a_0 = -16 - 1 = -17$. 故选 D.
(2) 由题意得 $(2-1) \times (1+a)^3 = 27$, 解得 $a=2$, 所以 $(2-x)(1+2x)^3$ 的展开式中 x^2 的系数为 $2C_3^2 \times 2^2 - C_3^1 \times 2 = 18$. 故选 C.

例 6 [思路点拨] 根据给定的多项式, 分析展开式中含 x^3 的项的构成, 列式计算即可.

C [解析] $\left(x^3 + \frac{1}{x} - 1\right)^5$ 可看作 5 个 $\left(x^3 + \frac{1}{x} - 1\right)$ 相乘, 展开式中含 x^3 的项可由 2 种情况获得: 从 5 个式子中取 2 个式子提供 x^3 , 余下 3 个式子提供 $\frac{1}{x}$, 可得 $C_5^2 (x^3)^2 \cdot C_3^1 \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 10x^3$; 从 5 个式子中取 1 个式子提供 x^3 , 余下 4 个式子提供 -1, 则可得到 $C_5^1 (x^3)^1 \cdot C_4^4 (-1)^4 = 5x^3$. 所以 $\left(x^3 + \frac{1}{x} - 1\right)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 $10 + 5 = 15$. 故选 C.

变式题 (1) A (2) 49 [解析] (1) $(x-2y+3z)^6$ 相当于 6 个因式 $(x-2y+3z)$

相乘,其中1个因式取 x ,有 C_6^1 种取法,余下5个因式中有2个取 $-2y$,有 C_5^2 种取法,最后3个因式全部取 $3z$,有 C_3^3 种取法,故 $(x-2y+3z)^6$ 的展开式中 xy^2z^3 的系数为 $C_6^1 \times 1 \times C_5^2 \times (-2)^2 \times C_3^3 \times 3^3 = 6480$.

(2) $\left(x + \frac{2}{x} - 1\right)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r \left(x + \frac{2}{x}\right)^{4-r} \times (-1)^r = (-1)^r C_4^r C_{4-r}^m x^{4-r-m} \left(\frac{2}{x}\right)^m = (-1)^r 2^m C_4^r C_{4-r}^m x^{4-r-2m}$, 当 $m=0, r=4$ 时,常数项为1;当 $m=1, r=2$ 时,常数项为 $(-1)^2 2^1 C_4^2 C_2^1 = 24$;当 $m=2, r=0$ 时,常数项为 $(-1)^0 2^2 C_4^0 C_4^2 = 24$. 所以 $\left(x + \frac{2}{x} - 1\right)^4$ 的展开式中常数项为 $1+24+24=49$.

第63讲 随机事件与概率、古典概型

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

- (1) 基本结果
- (1) 子集 A 中某个样本点出现
- 一定发生 $B \supseteq A$ $A=B$ 至少有一个同时 不能同时发生
- (1) 有限 相等 (2) $\frac{k}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- $P(A) \geq 0$ $1 - P(A) \leq P(B)$ $1 - P(A) \leq P(B)$ $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (1) 可能性大小 (2) 稳定于

【对点演练】

- $\{yy, yn, ny, nn\}$ [解析] 由题意可知该试验的样本空间 $W = \{yy, yn, ny, nn\}$.
- 3件中最多有2件一级品 [解析] 由题可知,“3件都是一级品”为事件A,则A的对立事件为“3件不都是一级品”,即“3件中至多有2件一级品”.
- 0.58 [解析] 由数表知,取到卡片号码为奇数的次数是 $17+5+6+18+12=58$,所以取到卡片号码为奇数的频率为 $\frac{58}{100} = 0.58$.
- ③ [解析] ①中,硬币质地不均匀,不是等可能事件,所以不是古典概型;②④的样本空间的样本点不是有限个,不是古典概型;③符合古典概型的特点,是古典概型,故填③.
- 3.2 [解析] 三辆车的出车顺序的样本空间 $\Omega = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$.按方案一乘坐到序号为3的车包含的样本点有 $132, 213, 231$,共3个;按方案二乘坐到序号为3的车包含的样本点有 $312, 321$,共2个.
- $\frac{2}{3}$ [解析] 记“朝上一面的数是1,2,3”为事件C,“朝上一面的数是5”为事件D,则 $A+B=C+D$,且C与D两个事件互斥,所以 $P(A+B) = P(C+D) = P(C) + P(D) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

● 课堂考点探究

- 例1 [思路点拨] (1)对每个选项中事件的关系进行分析,选出正确答案.(2)写出事件的全部基本事件,再根据互斥事件、对立事件的定义判断即可.
- (1)D (2)B [解析] (1)对于A,恰好有1件次品和恰好有2件次品互斥,但不是对立事件;对于B,至少有1件次品和全是次品可以同时发生,不是对立事件;对于C,至少有1件正品和至少有1件次品可以同时发生,不是对立事件;对于D,至少有1件次品即存在次品,与全是正品是对立事件,故选D.
- (2)从装有红球、白球和黑球各2个的口袋内一次取出2个球,则样本空间 $\Omega = \{(红, 红), (红, 白), (红, 黑), (白, 白), (白, 黑), (黑, 黑)\}$. 设事件A=“两球都不是白球”,事件B=“两球恰有一个白球”,事件C=“两球至少有一个白球”,事件D=“两球都为白球”,则 $A = \{(红, 红), (红, 黑), (黑, 黑)\}$, $B = \{(红, 白), (白, 黑)\}$, $C = \{(红, 白), (白, 白), (白, 黑)\}$, $D = \{(白, 白)\}$. 由互斥事件及对立事件的定义可知事件A、事件B与事件D均是互斥而非对立的事件,故选B.

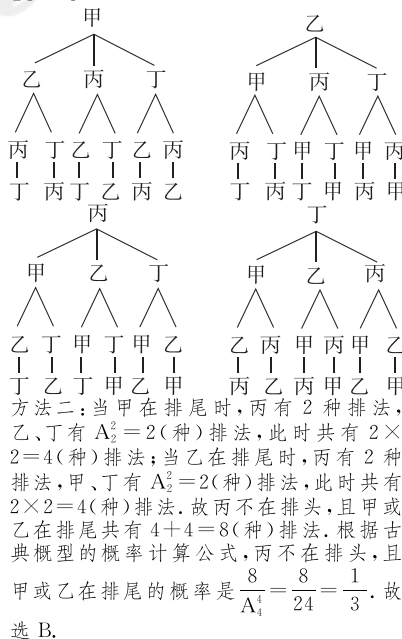
变式题 (1)C (2)CD [解析] (1)事件A、B、C都是随机事件,可能发生,也可能不发生,故A选项不正确;A+B+C不一定发生,故B选项不正确;A、B可能同时发生,故A与B不是互斥事件,故C选项正确;B与C既不是互斥事件也不是对立事件,故D选项不正确,故选C.

(2)对于是否选择崇圣寺三塔与蝴蝶泉这两个景点,可能的结果有:两个景点都不选择,选择一个景点,选择两个景点.事件“至少选择其中一个景点”包括选择一个景点和选择两个景点,事件“至多选择其中一个景点”包括两个景点都不选和选择一个景点.所以事件“至少选择其中一个景点”与事件“至多选择其中一个景点”可能同时发生,故不是互斥事件,A错误;事件“两个景点均未选择”与事件“至多选择其中一个景点”可能同时发生,故不是对立事件,B错误;事件“只选择其中一个景点”与事件“两个景点均选择”不能同时发生,是互斥事件,C正确;事件“两个景点均选择”与事件“至多选择其中一个景点”不能同时发生,并且必有一个发生,是对立事件,D正确,故选CD.

例2 [思路点拨] (1)先求出从7个整数中随机取2个不同的数的情况种数,再求2个数不互质的情况种数,根据对立事件的性质求出2个数互质的情况种数,最后利用古典概型的概率计算公式求解.(2)思路一:画出树状图列出所有结果即可,适合数据较小不复杂的情况;思路二:先考虑排尾,安排甲或乙,再考虑丙的位置,最后安排剩余两人即可.

(1)D (2)B [解析] (1)从2至8的7个整数中随机取2个不同的数,共有 $C_7^2 = 21$ (种)情况,其中不互质的包括从2,4,6,8中取2个不同的数,或取3和6,共有 $C_4^2 + 1 = 7$ (种)情况,所以互质的共有 $21-7=14$ (种)情况,所以所求概率 $P = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$.

(2)方法一:画出树状图,如图,由树状图可得,甲、乙、丙、丁四人排成一列,共有24种排法,其中丙不在排头,且甲或乙在排尾的排法共有8种,故所求概率 $P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. 故选B.



变式题 (1)A (2) $\frac{6}{25}$ [解析] (1)甲、乙从中随机抽取一个主题,共包含36个样本点,甲、乙抽到同一个主题包含6个样本点,所以甲、乙抽到不同主题的概率 $P = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$. 故选A.

(2)把5人分成3个小组有 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{2} = 10$ 两种分法,3,1,1的分法有 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{2} = 10$ (种),甲和乙在一个小组的分法有 $C_3^1 = 3$ (种);2,2,1的分法有 $\frac{C_5^2 C_3^2}{2} = 15$ (种),甲和乙在一个小组的分法有 $C_3^1 = 3$ (种),故所有的分组方法有25种,甲和乙在同一个小组的情况有6种,故所求概率 $P = \frac{6}{25}$.

例3 [思路点拨] (1)由题意,根据交事件的运算,结合概率与事件的关系即可判断.(2)思路一:分别设出取到各色球的概率,由事件的关系和概率的基本性质求出概率即可;思路二:设出红球的个数,根据概率求出各色球的个数,再求出各色球的概率即可.

(1)D (2) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ [解析] (1)由题意,事件 $A \cap B$ 为两个点数都是奇数,事件 $A \cap B$ 的对立事件的概率为 $1 - P(A \cap B)$,而事件 $A \cap B$ 的对立事件为至多有一个点数是奇数,故选D.

(2)方法一:从袋中随机取1个球,记事件“取到红球”“取到黑球”“取到黄球”“取到绿球”分别为A、B、C、D,则事件A、B、C、D彼此互斥且 $A \cup B \cup C \cup D$ 为必然事件.由已知可得, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{5}{12}$, $P(C \cup D) = P(C) + P(D) = \frac{5}{12}$, 则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$, 即 $P(B \cup C \cup D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{2}{3}$, 所以 $P(D) = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$. 故从袋中随机取1个球,取到黑球、黄球和绿球的概率分别是 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$.

方法二:设红球有 n 个,则 $\frac{n}{12} = \frac{1}{3}$, 所以 $n=4$,即红球有4个.因为取到黑球或黄球的概率是 $\frac{5}{12}$,所以黑球和黄球共有5个,所以绿球有 $12-4-5=3$ (个),又取到绿球或黄球的概率也是 $\frac{5}{12}$,所以绿球和黄球共有5个,而绿球有3个,所以黄球有 $5-3=2$ (个),所以黑球有 $12-4-3-2=3$ (个).因此从袋中随机取1个球,取到黑球、黄球和绿球的概率分别是 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

变式题 (1)0.2 (2)ABC [解析] (1)由题意得 $P(A \cup B) = 1 - P(A \cap B) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - (0.3 + 0.5) = 0.2$.

(2)依题意得 $P(A_1) = 0.15, P(A_2) = 0.06, P(A_3) = 0.04$. 因为 A_0, A_1, A_2, A_3 两两互斥,所以 $P(A_0) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)] = 0.75$. 对于A,记事件A为“一年内需要维修”,则 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 所以 $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0.15 + 0.06 + 0.04 = 0.25$, 故A正确;对于B,记事件B为“一年内不需要维修”,则 $B = A_0$, 所以

$P(B) = P(A_0) = 0.75$, 故 B 正确; 对于 C, 记事件 C 为“在一年内维修不超过 1 次”, 则 $C = A_0 \cup A_1$, 所以 $P(C) = P(A_0) + P(A_1) = 0.75 + 0.15 = 0.90$, 故 C 正确; 对于 D, 记事件 D 为“一年内最多需要维修 2 次”, 则 $\bar{D} = A_3$, 所以 $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0.04 = 0.96$, 故 D 错误. 故选 ABC.

例 4 [思路点拨] (1) 根据频率与概率的关系判断. (2) 由题可知 10 组随机数中表示“3 例该心脏手术全部成功”的有 2 组, 由频率得到概率.

(1) AC (2) A [解析] (1) 试验次数相同时, 频率可能不同, 说明随机事件发生的频率具有随机性, 故 A 正确; 试验次数较小时, 频率波动较大, 试验次数较大时, 频率波动较小, 所以试验次数越多越好, 故 B 错误; 随机事件发生的频率会随着试验次数的增加而逐渐稳定在一个固定值附近, 此固定值就是概率, 故 C 正确; 我们要得到某事件发生的概率, 需要进行多次试验才能得到概率的估计值, 故 D 错误. 故选 AC.

(2) 由题意, 表示“3 例该心脏手术全部成功”的随机数有 569, 989, 共 2 组, 故估计“3 例该心脏手术全部成功”的概率为 $\frac{2}{10} = 0.2$, 故选 A.

变式题 $\frac{3}{10}$ [解析] 这 20 组随机数中, 表示恰有两天有强浓雾的是 588, 683, 569, 479, 表示恰有三天有强浓雾的是 779, 978, 所以这三天中至少有两天有强浓雾的概率近似为 $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

第 64 讲 随机事件的相互独立性与条件概率

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $P(A)P(B)$

2. (1) $\frac{P(AB)}{P(A)}$ (2) ① 1

② $P(B|A) + P(C|A)$ ③ 对立事件

(3) ① $P(A)P(B|A)$ ② 相互独立

【对点演练】

1. 0.7 [解析] 由事件 A 与 B 相互独立, 得 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 $0.6 \times P(B) = 0.42$, 所以 $P(B) = 0.7$.

2. $\frac{5}{6}$ [解析] 设“甲独立地破解出该谜题”为事件 A, “乙独立地破解出该谜题”为事件 B, “该谜题被破解”为事件 C, 且事件 A 与 B 相互独立, 则 $P(C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{5}{6}$.

3. $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{4}$ [解析] 由题意可知 $P(A) = \frac{4}{15}$, $P(B) = \frac{2}{15}$, $P(AB) = \frac{1}{10}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}} = \frac{3}{8}$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{15}} = \frac{3}{4}$.

4. $\frac{1}{8}$ [解析] 由事件 A 和事件 B 相互独立, 得事件 A 和事件 $\bar{B}$ 也相互独立, 所以 $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{8}$.

5. $\frac{2}{3}$ [解析] 记事件 A 为“小明选择篮球”, 事件 B 为“小明、小红的选择不同”,

则 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

6. $\frac{1}{5}$ [解析] 设“第 1 次按对”为事件 A_1 , “第 2 次按对”为事件 A_2 , 则不超过 2 次就按对的概率 $P = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] 结合枚举法以及古典概型的概率计算公式, 判断 $P(A)P(B) = P(AB)$ 是否成立.

B [解析] $P(\text{甲}) = \frac{1}{6}$, $P(\text{乙}) = \frac{1}{6}$,

$P(\text{丙}) = \frac{5}{36}$, $P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(\text{甲丙}) =$

$0 \neq P(\text{甲})P(\text{丙})$, $P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36} =$

$P(\text{甲})P(\text{丁})$, $P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36} \neq P(\text{乙})P(\text{丙})$,

$P(\text{丙丁}) = 0 \neq P(\text{丙})P(\text{丁})$, 故选 B.

例 2 [思路点拨] (1) 由题意分析知第一轮比赛选手的对战安排可以为 $\{AB, CD\}$, $\{AC, BD\}$, $\{AD, BC\}$; (2) 设事件 M = “选手 A 与选手 D 相遇”, 以对战情况分类讨论, 进而求解; (3) 设采用方案一、二种子选手夺冠的概率分别为 P_1, P_2 , 由独立事件的乘法公式求出 P_1, P_2 , 比较 P_1, P_2 的大小即可.

解: (1) 第一轮比赛选手的对战安排可以为 $\{AB, CD\}$, $\{AC, BD\}$, $\{AD, BC\}$, 故共有 3 种对战方案.

(2) 设事件 M = “选手 A 与选手 D 相遇”, 当对战安排为 $\{AD, BC\}$ 时, A, D 两选手相遇的概率为 1; 当对战安排为 $\{AB, CD\}$ 时, A, D 两选手相遇的概率为 $\frac{1}{2} \times$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; 当对战安排为 $\{AC, BD\}$ 时, A, D 两选手相遇的概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$. 抽

到三种对战安排的概率均为 $\frac{1}{3}$, 则

$P(M) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{23}{48}$, 即选手 A 与选手 D 相遇的概率为 $\frac{23}{48}$.

(3) 设采用方案一、二种子选手夺冠的概率分别为 P_1, P_2 . 若采用方案一, 假设第一轮对战安排为 $\{AC, BD\}$, 第一轮比赛两种子选手获胜, 则第二轮比赛种子选手一定夺冠, 其概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; 第一

轮比赛选手 A, D 获胜, 第二轮比赛 A 获胜, 其概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$; 第一轮比赛选手 C, B 获胜, 第二轮比赛 B 获胜, 其概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$; 第一

轮比赛选手 C, D 获胜, 则种子选手不能夺冠. 所以 $P_1 = \frac{9}{16} + \frac{9}{64} \times 2 = \frac{27}{32}$. 若采用方案二, 则第一轮对战安排为 $\{AB, CD\}$, 第一轮比赛选手 A, C 获胜, 第二轮比赛 A 获胜, 其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$; 第一

轮比赛选手 A, D 获胜, 第二轮比赛 A 获胜, 其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$; 第一

轮比赛选手 B, C 获胜, 第二轮比赛 B 获

胜, 其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$; 第一轮比赛选手 B, D 获胜, 第二轮比赛 B 获胜, 其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. 所以

$P_2 = \frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{4}$. 因为 $P_1 > P_2$, 所以方案一种子选手夺冠的概率更大.

变式题 (1) ABD [解析] 对于 A, 发送 1, 0, 1, 收到 1, 0, 1 的概率分别为 $1 - \beta, 1 - \alpha, 1 - \beta$, 因为信号传输是相互独立的, 所以由相互独立事件的概率公式得, 所求概率为 $(1 - \alpha)(1 - \beta)^2$, 故 A 正确. 对于 B, 采用三次传输方案, 发送 1, 1, 1, 收到 1, 0, 1 的概率分别为 $1 - \beta, \beta, 1 - \beta$, 由相互独立事件的概率公式得, 所求概率为 $\beta(1 - \beta)^2$, 故 B 正确. 对于 C, 采用三次传输方案, 发送 1, 1, 1, 收到的译码为 1, 则收到的信号可能为 (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), 故所求概率为 $3\beta(1 - \beta)^2 + (1 - \alpha)^3$, 故 C 错误. 对于 D, 若采用三次传输方案, 发送 0, 收到的译码为 0, 则收到的信号可能为 (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), 故所对应的概率 $P_1 = 3\alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3$. 若采用单次传输方案, 发送 0, 则收到信号 0 即为译码, 所对应的概率 $P_2 = 1 - \alpha$, 因为 $0 < \alpha < 0.5$, 所以 $P_1 - P_2 = 3\alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^3 - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)^2(1 + 2\alpha) - (1 - \alpha) = (1 - \alpha)(1 - 2\alpha)\alpha > 0$, 所以 $P_1 > P_2$, 故 D 正确. 故选 ABD.

(2) 解: ① 三人各自独立闯关, 其中甲闯关成功的概率为 $\frac{1}{2}$, 甲、乙都闯关成功的概率为 $\frac{2}{7}$, 甲、丙都闯关成功的概率为 $\frac{3}{10}$, 设乙闯关成功的概率为 P_1 , 丙闯关成功的概率为 P_2 , 根据相互独立事件同时发

生时的概率公式得 $\begin{cases} \frac{1}{2}P_1 = \frac{2}{7}, \\ \frac{1}{2}P_2 = \frac{3}{10}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} P_1 = \frac{4}{7}, \\ P_2 = \frac{3}{5}, \end{cases}$ 即乙闯关成功的概率为 $\frac{4}{7}$, 丙闯关成功的概率为 $\frac{3}{5}$.

② 团体总分为 4 分, 即甲、乙、丙三人中恰有两人闯关成功, 设“团体总分为 4 分”为事件 A, 则 $P(A) = (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{4}{7}) \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{29}{70}$, 即团体总分为 4 分的概率是 $\frac{29}{70}$.

③ 团体总分不小于 4 分, 即团体总分为 4 分或 6 分, 设“团体总分不小于 4 分”为事件 B, 由②可知团体总分为 4 分的概率为 $\frac{29}{70}$, 团体总分为 6 分, 即三人闯关都成功, 其概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$, 则

$P(B) = \frac{29}{70} + \frac{6}{35} = \frac{41}{70}$, 所以该小组参加下一轮比赛的概率为 $\frac{41}{70}$.

例 3 [思路点拨] (1) 由题求出同时喜欢两项运动的概率, 然后利用条件概率的知识求解. (2) 利用乘法公式即可求解.

(1) A (2) C [解析] (1) 设“在该校高二年级的学生中随机调查一名学生, 该学生喜欢打篮球”为事件 A, “在该校高二年级的学生中随机调查一名学生, 该学生喜欢打排球”为事件 B, 则 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8$, 所以 $P(AB) = 0.2$, 则 $P(B|$

$$A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

(2) 设“从1号箱中取到红球”为事件A, “从2号箱中取到红球”为事件B, 由题意知 $P(A) = \frac{4}{2+4} = \frac{2}{3}$, $P(B|A) = \frac{3+1}{8+1} = \frac{4}{9}$, 所以 $P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$. 故选C.

变式题 (1)B (2)0.24 0.36

[解析] (1)方法一: 设“第一次摸出白球”为事件A, “第二次摸出黑球”为事件B, 则“第一次摸出黑球”为事件 $\bar{A}$. $\therefore P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{10}$, $\therefore P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{3}{9}}{\frac{3}{10}} = \frac{7}{9}$.

方法二: 设“第一次摸出白球”为事件A, “第二次摸出黑球”为事件B, 则 $n(B) = 7 \times 3 + 3 \times 2 = 27$, $n(AB) = 7 \times 3 = 21$, $\therefore P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$. 故选B.

(2) 设“第一问做出”为事件A, “第二问做出”为事件B, 由题意可得 $P(A) = \frac{6}{10} = 0.6$, $P(B|\bar{A}) = 0.1$, $P(\bar{B}|A) = 0.6$, 则 $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.9$, $P(B|A) = 0.4$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.24$, $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.36$, 即此题得满分的概率是0.24, 得0分的概率是0.36.

第65讲 全概率公式及应用

● 课前基础巩固

【对点演练】

1. 0.65 [解析] 设 A_1 为“第一天选择一餐厅就餐”, B_1 为“第一天选择二餐厅就餐”, A_2 为“第二天选择一餐厅就餐”, 则 $P(A_1) = P(B_1) = 0.5$, $P(A_2|A_1) = 0.6$, $P(A_2|\bar{A}_1) = 0.7$, 由全概率公式可知 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.7 = 0.65$.

2. 86.4% [解析] 用A表示生产线初始状态良好, B表示第一件产品为合格品, 则 $P(A) = 80\%$, $P(B|A) = 95\%$, $P(B|\bar{A}) = 60\%$, 所以 $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{80\% \times 95\%}{80\% \times 95\% + (1-80\%) \times 60\%} \approx 86.4\%$.

3. 0.25 [解析] 设事件 A_i 为“第i天去2楼阅读”, 事件 B_i 为“第i天去3楼阅读”, $i=1, 2$, 则 $P(A_1) = P(B_1) = 0.5$, $P(B_2|A_1) = 1-0.7=0.3$, $P(B_2|\bar{A}_1) = 1-0.8=0.2$, 所以 $P(B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(B_2|\bar{A}_1) = 0.5 \times 0.3 + 0.5 \times 0.2 = 0.25$.

4. $\frac{1}{5}$ [解析] 分为第一位顾客中奖和没中奖两种情况, 所以第二位顾客中奖的概率为 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

5. 0.323 [解析] 设事件A=“呈阳性反应”, 事件B=“患有此种疾病”, 则 $P(A) = 0.5\% \times 95\% + 99.5\% \times 1\% = 1.47\%$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.5\% \times 95\%}{1.47\%} \approx 0.323$, 则化验结果为阳性, 此人确实患有此病的概率约为0.323.

● 课堂考点探究

例1 [思路点拨] 根据全概率公式计算即可得解.

(1)B (2)B [解析] (1) 因为 $P(A) =$

0.5 , 所以 $P(\bar{A}) = 1 - 0.5 = 0.5$, 所以 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.5 \times P(B|A) + 0.5 \times 0.2 = 0.3$, 解得 $P(B|A) = 0.4$. 故选B.

(2) 由题意可得 $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(\bar{A}) = P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B}) + P(B)P(\bar{A}|B) = \frac{1}{2}[1 - P(B)] + \frac{3}{4}P(B) = \frac{2}{3}$, 解得 $P(B) = \frac{2}{3}$. 故选B.

变式题 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{83}{192}$ [解析] (1) 因为

$P(A) = \frac{1}{3}$, 所以 $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, 由全概率公式得 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$.

(2) 由题意得 $P(A_2|A_1) = 3P(A_1) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{4}$, 则 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{24}$, 则 $P(A_3|A_2) = 3P(A_2) = 3 \times \frac{7}{24} = \frac{7}{8}$, 又 $P(A_3|\bar{A}_2) = \frac{1}{4}$, 所以 $P(A_3) = P(A_2)P(A_3|A_2) + P(\bar{A}_2)P(A_3|\bar{A}_2) = \frac{7}{24} \times \frac{7}{8} + (1 - \frac{7}{24}) \times \frac{1}{4} = \frac{83}{192}$.

例2 [思路点拨] (1) 分别考虑从甲盒中取出两个白球和一白一红的情况, 利用全概率公式计算即可. (2) 任取一个零部件, 来源有甲、乙、丙三种可能, 考虑来自各厂的概率, 利用全概率公式求解.

(1) $\frac{3}{10}$ (2)C [解析] (1) 记“从乙盒中取出的是红球”为事件B, “从甲盒中任取2个球”为事件A, 事件 A_1 为“从甲盒中任取2个球均为白球”, 事件 A_2 为“从甲盒中任取2个球为一白一红”, $A = A_1 \cup A_2$, 且 A_1, A_2 互斥, 所以 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{C_2^4}{C_5^2} \times \frac{2}{8} + \frac{C_1^4}{C_5^2} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{10} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$.

(2) 根据题意, 设任取一个零部件, 来自甲、乙、丙三厂的事件分别为A, B, C, 设任取一个零部件为次品为事件D, 则 $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(C) = \frac{3}{10}$, $P(D|A) = \frac{1}{20}$, $P(D|B) = \frac{1}{15}$, $P(D|C) = \frac{1}{10}$, 所以 $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{20} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = 0.07$, 故选C.

变式题 (1)B (2)0.825 [解析] (1) 设A=“发送的信号为0”, B=“接收的信号为0”, 则 $\bar{A}$ =“发送的信号为1”, $\bar{B}$ =“接收的信号为1”, 则 $P(A) = 0.5$, $P(\bar{A}) = 0.5$, $P(B|A) = 0.9$, $P(\bar{B}|A) = 0.1$, $P(B|\bar{A}) = 0.05$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.95$, 所以接收的信号为0的概率 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.5 \times 0.9 + 0.5 \times 0.05 = 0.475$, 所以接收的信号为1的概率 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.475 = 0.525$. 故选B.

(2) 设事件E=“小明与第一代传播者接触”, 事件F=“小明与第二代传播者接触”, 事件G=“小明与第三代传播者接

触”, 事件D=“小明被感染”, 则 $P(E) = 0.5$, $P(F) = 0.25$, $P(G) = 0.25$, $P(D|E) = 0.9$, $P(D|F) = 0.8$, $P(D|G) = 0.7$, 所以 $P(D) = P(D|E)P(E) + P(D|F)P(F) + P(D|G)P(G) = 0.9 \times 0.5 + 0.8 \times 0.25 + 0.7 \times 0.25 = 0.825$, 所以所求概率为0.825.

例3 [思路点拨] (1) 根据题意, 由贝叶斯公式代入计算, 即可得到结果. (2) 利用全概率公式求得取到一件产品为正品

的概率, 再根据贝叶斯公式求解. (1)C (2)丙 [解析] (1) 记“视频是‘AI’合成的”为事件A, 记“鉴定结果为‘AI’”为事件B, 则 $P(A) = 0.001$, $P(\bar{A}) = 0.999$, $P(B|A) = 0.98$, $P(B|\bar{A}) = 0.04$, 由贝叶斯公式得 $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.001 \times 0.98}{0.001 \times 0.98 + 0.999 \times 0.04} \approx 0.024$, 故选C.

(2) 取到一件产品为正品

的概率为 $0.95 \times \frac{2}{2+3+5} + 0.9 \times \frac{3}{2+3+5} + 0.8 \times \frac{5}{2+3+5} = 0.86$, 则它是由甲厂生产的概率为 $\frac{0.95 \times \frac{2}{2+3+5}}{0.86} = \frac{19}{86}$, 它是由乙厂生

产的

概率为 $\frac{0.9 \times \frac{3}{2+3+5}}{0.86} = \frac{27}{86}$, 它是由

丙厂生产的概率为 $\frac{0.8 \times \frac{5}{2+3+5}}{0.86} = \frac{20}{43}$,

因为 $\frac{20}{43} > \frac{27}{86} > \frac{19}{86}$, 所以它是由丙厂生产的概率最大.

变式题 (1)B (2)D [解析] (1) 记事件A为“从剩下的9箱中随机打开2箱, 结果是1箱语文书, 1箱数学书”, 记事件 B_1 为“丢失的一箱是语文书”, 事件 B_2 为“丢失的一箱是数学书”, 事件 B_3 为“丢失的一箱是英语书”, 则 $P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 3}{C_9^2} + \frac{3}{10} \times \frac{5 \times 2}{C_9^2} + \frac{1}{5} \times \frac{5 \times 3}{C_9^2} = \frac{1}{3}$, 由贝叶斯公

式可得 $P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{5 \times 3}{C_9^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$. 故选B.

(2) 设事件M=“此人参加户外极限运动”, 事件R=“此人来自A地区”, 事件S=“此人来自B地区”. 依题意, $P(R) = \frac{2}{5}$, $P(S) = \frac{3}{5}$, $P(M|R) = \frac{3}{100}$, $P(M|S) = \frac{8}{100}$, 则 $p_1 = P(M) = P(MR) + P(MS) = P(M|R)P(R) + P(M|S)P(S) = \frac{3}{100} \times \frac{2}{5} + \frac{8}{100} \times \frac{3}{5} = \frac{30}{500} = \frac{3}{50}$, $p_2 = P(R|M) = \frac{P(RM)}{P(M)} = \frac{P(M|R)P(R)}{P(M)} = \frac{\frac{3}{100} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{50}} = \frac{1}{5}$, 故选D.

例4 [思路点拨] (1) 记事件A=“从这批产品中任取一件为一级品”, 事件 B_n 为“使用零件n次, 没有发生故障”, 利用全概率公式求出 $P(B_3)$, 再由条件概率公式计算即可得解; (2) 依题意X的所有可能取值为0, 1, 2, 求出所对应的概率, 即可得到X的分布列与数学期望.

解: (1) 记事件A=“从这批产品中任取一件为一级品”, 则 $P(A) = 0.8$, $P(\bar{A}) = 0.2$, 记事件 B_n 为“使用零件n次, 没有发

生故障”，则 $P(B_n|A)=1, P(B_n|\bar{A})=0.9^n$ ，则 $P(B_3)=P(B_3|A)P(A)+P(B_3|\bar{A})P(\bar{A})=1\times 0.8+0.9^3\times 0.2=0.8+0.1458=0.9458$ 。

$$\text{所以 } P(A|B_3)=\frac{P(AB_3)}{P(B_3)}=$$

$$\frac{P(B_3|A)P(A)}{P(B_3)}=\frac{1\times 0.8}{0.9458}=\frac{4000}{4729}.$$

(2)依题意 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$.
 $P(X=0)=P(B_2|A)P(A)+P(B_2|\bar{A})P(\bar{A})=1\times 0.8+0.9^2\times 0.2=0.962$,
 $P(X=1)=P(\bar{A}B_1)[P(A)+P(\bar{A}B_1)]+P[\bar{A}(B_1\bar{B}_2)]=$
 $P(\bar{B}_1|\bar{A})P(\bar{A})[P(A)+P(B_1|\bar{A})P(\bar{A})]+P[(B_1\bar{B}_2)|\bar{A}]P(\bar{A})=$
 $0.1\times 0.2\times (0.8+0.9\times 0.2)+0.9\times 0.1\times 0.2=0.0376$, $P(X=2)=$
 $[P(\bar{A}\bar{B}_1)]^2=(0.2\times 0.1)^2=0.0004$,
 所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.962	0.0376	0.0004

所以 $E(X)=0\times 0.962+1\times 0.0376+2\times 0.0004=0.0384$.

变式题 解：(1)设事件 A_i 为“奖品在第 i 号箱子里 ($i=1, 2, 3$)”，事件 B 为“主持人打开 3 号箱”，由全概率公式，得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{2}$.

$$(2)P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{1}{3}, P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{2}{3},$$

因为 $P(A_1|B)<P(A_2|B)$ ，所以建议抽奖人改选 2 号箱。

增分微课 9 利用数列递推关系解决概率问题

例 1 解：(1)记该顾客第 i ($i\in\mathbf{N}^*$) 次摸球抽中奖品为事件 A_i ，依题意知 $P_1=\frac{2}{7}$, $P_2=P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+(1-\frac{2}{7})\times\frac{1}{2}=\frac{19}{42}$. 当 $n\geq 2$ 时， $P(A_n|A_{n-1})=\frac{1}{3}$, $P(A_n|\bar{A}_{n-1})=\frac{1}{2}$, $P_n=P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\bar{A}_{n-1})P(A_n|\bar{A}_{n-1})$ ，即 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}$ ($n\geq 2$)，所以 $P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}(P_{n-1}-\frac{3}{7})$ ($n\geq 2$)，又因为 $P_1-\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}$ ，所以数列 $\{P_n-\frac{3}{7}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{7}$ ，公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列，

$$\text{所以 } P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

(2)当 n 为奇数时， $P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7\times 6^{n-1}}<\frac{3}{7}$. 当 n 为偶数时， $P_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{7\times 6^{n-1}}$ ，此时 P_n 随着 n 的增大而减小，所以 $P_n\leq P_2=\frac{19}{42}$. 综上，该顾客第二次摸球抽中奖品的概率最大。

变式题 解：(1)依题意，每一个顶点有 3 个相邻的顶点，其中两个在同一底面，所以当点 Q 在下底面时，随机移动一次仍在下底面的概率为 $\frac{2}{3}$ ，当点 Q 在上底面时，

随机移动一次回到下底面的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

$$\text{所以 } P_1=\frac{2}{3}, P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}.$$

$$(2)P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{3}(1-P_n)=\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{3}, \text{ 所以 } P_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}P_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right), \text{ 又因为 } P_1=\frac{2}{3}, \text{ 所以 } P_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\neq 0, \text{ 所以数列 } \left\{P_n-\frac{1}{2}\right\} \text{ 是以 } \frac{1}{6} \text{ 为首项, } \frac{1}{3} \text{ 为公比的等比数列, 所以 } P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2\times 3^n}, \text{ 则 } P_n=\frac{1}{2\times 3^n}+\frac{1}{2}.$$

若 $P_n>\frac{1013}{2024}$ ，则 $\frac{1}{2\times 3^n}+\frac{1}{2}>\frac{1013}{2024}$ ，所以 $3^n<1012$ ，又 $3^6=729, 3^7=2187, n\in\mathbf{N}^*$ ，所以 $n\leq 6$ ，故 n 的最大值为 6.

例 2 解：(1)“跳子”开始在第 1 格为必然事件，则 $P_1=1$ ；第一次掷硬币出现反面，“跳子”前进到第 2 格，其概率为 $\frac{1}{2}$ ，即

$$P_2=\frac{1}{2}; \text{ 第一次掷硬币出现正面或前两次掷硬币均出现反面, “跳子”前进到第 3 格, 其概率为 } \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}, \text{ 即 } P_3=\frac{3}{4}.$$

(2)(i)证明：由 (1) 知， $P_1=1, P_2=\frac{1}{2}$ ，“跳子”前进到第 n ($3\leq n\leq 9$) 格的情况是下面两种，而且只有两种：

①“跳子”先到第 $n-2$ 格，掷硬币掷出正面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$ ；

②“跳子”先到第 $n-1$ 格，掷硬币掷出反面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$. $\therefore P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$ ，则 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$ ，又 $P_2-P_1=-\frac{1}{2}\neq 0$ ， $\therefore$ 数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$ ($2\leq n\leq 9$) 是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项， $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列。

(ii)由 (i) 得， $P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($2\leq n\leq 9$)， $\therefore P_n=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\cdots+(P_2-P_1)+P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$ ($2\leq n\leq 9$)， $\therefore P_8=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right]=\frac{85}{128}$ ， $\therefore P_{10}=\frac{1}{2}P_8=\frac{85}{256}$.

变式题 解：(1)甲每轮游戏的积分可能为 0 分、1 分、2 分，记其每轮积分为 0 分、1 分、2 分的概率分别为 $P'(0), P'(1), P'(2)$ ，则 $P'(0)=\frac{1}{2}, P'(1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}, P'(2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. 经过 4 轮游戏，甲的累计积分为 4 分的所有可能情况如下：4 轮中甲掷 2 轮，且每轮积分均为 2 分；甲掷 3 轮，且 3 轮的积分情况为 2, 1, 1；甲掷 4 轮，且每轮积分均为 1 分. 所以经过 4 轮游戏，甲的累计积分为 4 分的概率 $P=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_4^1C_3^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_4^4\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{289}{1296}$.

(2)(i)证明：记“累计积分之和为 $n+2$ ”为事件 A_{n+2} ，“累计积分之和为 $n+1$ ”为事件 A_{n+1} ，“累计积分之和为 n ”为事件 A_n ，则 $P(n+2)=P(A_n)P(A_{n+2}|A_n)+P(A_{n+1})P(A_{n+2}|A_{n+1})=\frac{2}{3}P(n)+\frac{1}{3}P(n+1)$ ，则 $P(n+2)-P(n+1)=\frac{1}{3}[P(n+1)-P(n)]$ ，又 $P(1)=\frac{1}{3}$ ， $P(2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$ ， $P(2)-P(1)=\frac{4}{9}\neq 0$ ，所以 $\{P(n+1)-P(n)\}$ 是首项为 $\frac{4}{9}$ ，公比为 $-\frac{2}{3}$ 的等比数列.

(ii)由 (i) 得，当 $n\geq 2$ 时， $P(n)-P(n-1)=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ， $P(n-1)-P(n-2)=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \dots$ ， $P(2)-P(1)=\frac{4}{9}$ ，累加得 $P(n)-P(1)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ ，因此 $P(n)=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ ($n\geq 2$)，当 $n\geq 5$ 且 n 为奇数时， $P(n)=\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ 是递增的，且 $P(n)<\frac{3}{5}$ ，当 $n\geq 5$ 且 n 为偶数时， $P(n)=\frac{3}{5}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ 是递减的，且 $P(n)>\frac{3}{5}$ ，则当 $n=6$ 时， $P(n)$ 最大，所以甲选择 6 分对自己最有利.

例 3 解：(1)由题知，随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, $P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}=\frac{A_3^3}{A_3^3}$ ， $P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot 2}{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ ， $P(X=3)=\frac{1}{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}=\frac{1}{15}$ ，所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$

所以 $E(X)=1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{15}$

$$\frac{1}{15} = \frac{23}{15}.$$

(2) 证明:不妨令绳头编号为 1, 2, 3, 4, ..., 2n, 其中 1, 2 是同一根绳子的两个绳头,若这 n 根绳子打结后恰好能围成一个圈,则与绳头 1 打结的绳头有 (2n-2) 种可能,假设绳头 1 与绳头 3 打结,那么相当于对剩下 (n-1) 根绳子进行打结. 设 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 根绳子打结后可围成一个圈的打结方法有 a_n 种,经过一次打结后,剩下 (n-1) 根绳子打结后可围成一个圈的打结方法有 a_{n-1} 种,由此可得, $a_n = (2n-2)a_{n-1}, n \geq 2$,所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2n-2$,以此类推得 $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = 2n-4, \dots, \frac{a_2}{a_1} = 2$,所以

$$\frac{a_n}{a_1} = (2n-2) \times (2n-4) \times \dots \times 2 = 2^{n-1} \cdot (n-1)! \quad (n \geq 2), \text{又 } a_1 = 1, \text{所以 } a_n = 2^{n-1} \cdot (n-1)! \quad (n \geq 2).$$

当 $n=1$ 时,也满足上式,所以 $a_n = 2^{n-1} \cdot (n-1)!$. 在 2n 个绳头中任意取 2 个绳头打结,共有 $N = \frac{C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 C_{2n-4}^2 \cdots C_2^2}{n!} = \frac{2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times 2 \times 1}{2^n \cdot n!}$

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \text{ (种) 打结方法, 所以所求概率 } P = \frac{a_n}{N} = \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)!}{\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}} = \frac{2^{2n-1} \cdot n! \cdot (n-1)!}{(2n)!}.$$

变式题 $\frac{3}{5} \frac{27}{5005}$ [解析] 从 2n 张卡片

中选取 3 张卡片的选法共有 C_n^3 种,手中这 3 张卡片中含有 2 张相同卡片的选法有 $n(2n-2)$ 种,由古典概型的概率计算公式可得手中这 3 张卡片中含有 2 张相同卡片的概率为 $\frac{n(2n-2)}{C_n^3} = \frac{3}{2n-1}$. 书包中 2n 张卡片全部被拿走的概率为 P_n ,将 2 张相同的卡片拿掉以后,相当于从 $n-1$ 对卡片中已拿出一张卡片,事件“书包中 2n 张卡片全部被拿走”发生需保证事件“书包中 2n-2 张卡片全部被拿走”发生,且书包中 2n-2 张卡片全部被拿走的概率为 P_{n-1} ,因而 $P_n = \frac{3}{2n-1} P_{n-1}$,且

$$P_2 = 1, \text{则 } P_3 = \frac{3}{2 \times 3 - 1} P_2 = \frac{3}{5}, P_7 = \frac{3}{13} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5005}.$$

第 66 讲 离散型随机变量的分布列、数字特征

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 有限个
3. (1) $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ 平均水平
(2) $[x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \dots + [x_n - E(X)]^2 p_n$
离散程度 (3) ① $aE(X) + b$
② $a^2 D(X)$

【对点演练】

1. 0.2 [解析] 由离散型随机变量分布列的性质以及已知条件得 $\begin{cases} m+n+0.2=1, \\ m+2n=1.2, \end{cases}$ 解得 $m=n=0.4$, 因此 $m-\frac{n}{2}=0.2$.
2. $\frac{1}{3}$ [解析] 由题意可知 $P(X=0) + P(X=1) = 2a + a = 1$, 解得 $a = \frac{1}{3}$.
3. 10.4 [解析] 因为 $E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.1 = 2.8$, 所以 $E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 2.8 + 2 = 10.4$.
4. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [解析] 因为取到白球时停止操作, 所以最少取球次数为 1, 即第一次就取到了白球; 最多取球次数是

7, 即把所有的黑球取完之后才取到白球. 所以随机变量 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

5. $\frac{3}{7}$ [解析] 因为随机变量 X 的分布列

$$\text{为 } P(X=i) = \frac{k}{2^i} \quad (i=1, 2, 3), \text{ 所以 } \frac{k}{2^1} + \frac{k}{2^2} + \frac{k}{2^3} = 1, \text{ 解得 } k = \frac{8}{7}, \text{ 所以 } P(X \geq$$

$$2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{8}{7} + \frac{8}{8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}.$$

6. $\frac{1}{2} \frac{11}{16}$ [解析] 由题意知 $2c^2 + \frac{1}{2}c +$

$$\frac{1}{2}c = 1, \text{ 即 } 2c^2 + c - 1 = 0, \text{ 即 } (2c -$$

$$1)(c+1) = 0, \text{ 解得 } c = \frac{1}{2} \text{ 或 } c = -1, \text{ 由 } c > 0, \text{ 得 } c = \frac{1}{2}. E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times$$

$$\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \text{ 又 } E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ 所以 } D(X) =$$

$$E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}.$$

7. 0.064 0.096 [解析] 当 $X=0$ 时, 表示前三次都没有命中, 第四次还要射击, 但结果不计, 所以 $P(X=0) = 0.4^3 = 0.064$. 当 $X=1$ 时, 表示前两次都没有命中, 第三次命中, 所以 $P(X=1) = 0.6 \times 0.4^2 = 0.096$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 根据离散型随机变量分布列的性质可得 $a+c = \frac{2}{3}$, 进而可求

$P(|X|=1)$. (2) 根据分布列中的数据计算出 $P(X \leq -2), P(X \leq 0)$ 的值, 然后对照数据得到结果.

(1) C (2) B [解析] (1) 由分布列可知 $a+c = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, 故 $P(|X|=1) =$

$$P(X=1) + P(X=-1) = a+c = \frac{2}{3}, \text{ 故选 C.}$$

(2) 由分布列知 $P(X \leq -2) = 0.2 + 0.1 = 0.3, P(X \leq 0) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$, $\therefore$ 当 $m \in (-2, 0]$ 时, $P(X < m) = 0.3$, 即 m 的取值范围为 $(-2, 0]$. 故选 B.

变式题 (1) 0.6 (2) $\frac{3}{10}$ [解析] (1) 因为

随机变量 X 服从两点分布, 且 $P(X=1) - P(X=0) = 0.2$,

所以 $\begin{cases} P(X=1) - P(X=0) = 0.2, \\ P(X=1) + P(X=0) = 1, \end{cases}$ 解得 $P(X=1) = 0.6$.

(2) $\therefore$ 随机变量 X 的分布列为 $P(X=k) = \frac{m}{k(k+1)} (k=1, 2, 3, 4, 5), \therefore P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) +$

$$P(X=5) = m \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} \right) = 1, \text{ 解得 } m = \frac{6}{5},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{7}{2}\right) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{6}{5} \times \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}\right) = \frac{3}{10}.$$

例 2 [思路点拨] (1) 利用期望与方差公式即可得解. (2) 根据期望公式求得随机变量 X 的期望, 之后利用方差公式求得随机变量 X 的方差, 再根据二次函数的性质求得结果.

(1) D (2) C [解析] (1) 由分布列可得 $E(X) = 0.4a + 0.2(a+1) + 0.4(a+2) = a+1, D(X) = 0.4(a-a-1)^2 +$

$$0.2(a+1-a-1)^2 + 0.4(a+2-a-1)^2 = 0.8, \text{ 故选 D.}$$

(2) 根据题意可得, $E(X) = \frac{0+a+1}{3} =$

$$\frac{a+1}{3}, \text{ 则 } D(X) = \left(0 - \frac{a+1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(a - \frac{a+1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{a+1}{3}\right)^2 \times$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2a^2 - 2a + 2}{9} = \frac{2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}{9}, \text{ 所以}$$

当 a 在 $(0, 1)$ 内逐渐减小时, $D(X)$ 先减小后增大. 故选 C.

变式题 (1) A (2) ABD [解析] (1) XY 的分布列为

XY	1	2	4
P	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$

$$E(XY) = 1 \times p(1-p) + 2 \times [p^2 + (1-p)^2] + 4 \times p(1-p) = -p^2 + p + 2, E(X) = 2-p, E(Y) = p+1, \text{ 则 } \text{Cov}(X, Y) = -p^2 + p + 2 - (2-p)(1+p) = 0. \text{ 故选 A.}$$

(2) 由分布列的性质可得 $\frac{1}{6} + a + b = 1$,

$$\text{得 } a+b = \frac{5}{6} \text{ ①. 因为 } E(X) = 0 \times a + 1 \times$$

$$b + 2 \times \frac{1}{6} = 1, \text{ 所以 } b = \frac{2}{3} \text{ ②, 由 ① ② 得}$$

$$a = \frac{1}{6}, \text{ 所以 } D(X) = (0-1)^2 \times \frac{1}{6} +$$

$$(1-1)^2 \times \frac{2}{3} + (2-1)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \text{ 因为}$$

$$Y = 2X - 1, \text{ 所以 } E(Y) = 2E(X) - 1 = 1, D(Y) = 4D(X) = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \text{ 故}$$

选 ABD.

例 3 [思路点拨] (1) 根据题意一轮比赛中, 甲的得分 X 的所有可能取值为 -1, 0, 1, 分别求解概率即可得分布列; (2) 甲在两轮比赛中的得分 Y 的所有可能取值为 -2, -1, 0, 1, 2, 分别求解概率, 根据均值与方差的定义求解即可.

解: (1) 一轮比赛中, 甲的得分 X 的所有可能取值为 -1, 0, 1, $P(X=-1) = (1-60\%) \times 50\% = \frac{1}{5}, P(X=0) = 60\% \times$

$$50\% + (1-60\%) \times (1-50\%) = \frac{1}{2},$$

$$P(X=1) = (1-50\%) \times 60\% = \frac{3}{10},$$

则 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$

(2) 甲在两轮比赛中的得分 Y 的所有可能取值为 -2, -1, 0, 1, 2, $P(Y=2) = P(X=1) \cdot P(X=1) = \frac{9}{100}, P(Y=1) =$

$$C_2^1 \cdot P(X=1) \cdot P(X=0) = \frac{3}{10}, P(Y=0) = C_2^1 \cdot P(X=-1) \cdot P(X=1) +$$

$$P(X=0) \cdot P(X=0) = \frac{37}{100}, P(Y=-1) = C_2^1 \cdot P(X=-1) \cdot P(X=0) =$$

$$\frac{1}{5}, P(Y=-2) = P(X=-1) \cdot P(X=-1) = \frac{1}{25}, \text{ 所以在两轮比赛中, 甲的得分}$$

$$Y \text{ 的均值 } E(Y) = 2 \times \frac{9}{100} + 1 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{37}{100} + (-1) \times \frac{1}{5} + (-2) \times \frac{1}{25} = \frac{1}{5}, \text{ 方}$$

$$\text{差 } D(Y) = \left(2 - \frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{9}{100} + \left(1 -$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{3}{10} + \left(0 - \frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{37}{100} + \left(-1 - \frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(-2 - \frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{1}{25} = \frac{49}{50}.$$

变式题 解: (1) 记事件 A 为“员工所获得的红包数额不低于 90 元”, 事件 B 为“取到所标面值为 60 元的球”, 因为袋中的球中有 2 个所标面值为 40 元, 1 个为 50 元, 1 个为 60 元, 且 $40+50 \geq 90$, $40+60 \geq 90$, $50+60 \geq 90$, 所以 $P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1 + C_2^2}{C_4^2} = \frac{5}{6}$, 又 $P(AB) = \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}.$$

(2) 设 X 为员工所获得的红包数额, 则 X 的所有可能取值为 80, 90, 100, 110, 所以 $P(X=80) = \frac{1}{C_5^1} = \frac{1}{5}$, $P(X=90) = \frac{1}{C_5^1} = \frac{1}{5}$, $P(X=100) = \frac{2}{C_5^1} = \frac{2}{5}$, $P(X=110) = \frac{1}{C_5^1} = \frac{1}{5}$, 所以 $E(X) = 80 \times \frac{1}{5} + 90 \times \frac{1}{5} + 100 \times \frac{2}{5} + 110 \times \frac{1}{5} = 96$, $D(X) = (80-96)^2 \times \frac{1}{5} + (90-96)^2 \times \frac{1}{5} + (100-96)^2 \times \frac{2}{5} + (110-96)^2 \times \frac{1}{5} = 104$.

例 4 [思路点拨] (1) 根据对立事件的求法和相互独立事件的乘法公式即可得到答案. (2) (i) 首先分别计算出甲、乙参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{\text{甲}}, P_{\text{乙}}$, 再作差因式分解即可判断; (ii) 先分别求出甲、乙参加第一阶段比赛时, 所在队的比赛成绩的所有可能取值, 按步骤列出分布列, 计算出各自的期望, 再作差比较大小即可.

解: (1) 若甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分, 则甲在第一阶段比赛中至少投中 1 次, 乙在第二阶段比赛中也至少投中 1 次, $\therefore$ 甲、乙所在队比赛成绩不少于 5 分的概率 $P = (1-0.6^2) \times (1-0.5^2) = 0.686$.

(2) (i) 若甲参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{\text{甲}} = [1-(1-p)^3]q^3$, 若乙参加第一阶段比赛, 则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{\text{乙}} = [1-(1-q)^3]p^3$.

$P_{\text{甲}} - P_{\text{乙}} = q^3 - (q-pq)^3 - p^3 + (p-pq)^3 = 3pq(p-q)(pq-p-q)$, $\therefore 0 < p < q < 1$, $\therefore pq > 0$, $p-q < 0$, $pq-p-q < 0$, $\therefore P_{\text{甲}} - P_{\text{乙}} > 0$, 得 $P_{\text{甲}} > P_{\text{乙}}$, $\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii) 若甲参加第一阶段比赛, 记甲、乙所在队的比赛成绩为 X , 则 X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15, $P(X=0) = (1-p)^3 + [1-(1-p)^3] \cdot (1-q)^3$, $P(X=5) = [1-(1-p)^3]C_3^1 q \cdot (1-q)^2$, $P(X=10) = [1-(1-p)^3]C_3^2 q^2 \cdot (1-q)$, $P(X=15) = [1-(1-p)^3] \cdot q^3$, $\therefore E(X) = 15[1-(1-p)^3]q = 15(p^3 - 3p^2 + 3p) \cdot q$. 若乙参加第一阶段比赛, 记甲、乙所在队的比赛成绩为 Y , 则 Y 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15, 同理可得 $E(Y) = 15(q^3 - 3q^2 + 3q) \cdot p$. $\therefore E(X) - E(Y) = 15pq(p-q)(p+q-3) > 0$, $\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

变式题 解: (1) 用事件 M 表示“学生甲答此题得 6 分”, 即对于选项 A, C 作出正确的判断, 且对于选项 B, D 作出正确的判断或判断不了, 所以 $P(M) = 0.8 \times (0.7 + 0.1) \times 0.6 \times (0.5 + 0.3) = 0.3072$. (2) ① 记 X 为“从四个选项中随机选择一个选项的得分”, 则 $P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{C_4^1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{C_4^1} = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{8}$, $P(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{C_4^3}{C_4^4} = \frac{1}{8}$. ② 对于方案 I: 记 Y 为“从四个选项中随机选择一个选项的得分”, 则 Y 的所有可能取值为 0, 2, 3, 则 $P(Y=0) = p \times \frac{2}{C_4^1} + (1-p) \times \frac{1}{C_4^1} = \frac{1+p}{4}$, $P(Y=2) = (1-p) \times \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{4}(1-p)$, $P(Y=3) = p \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}p$, 所以 $E(Y) = 0 \times \frac{1+p}{4} + 2 \times \frac{3}{4}(1-p) + 3 \times \frac{1}{2}p = \frac{3}{2}$. 对于方案 II: 记 Z 为“从四个选项中随机选择两个选项的得分”, 则 Z 的所有可能取值为 0, 4, 6, 则 $P(Z=0) = p \times \frac{C_4^1 - 1}{C_4^2} + (1-p) \times \frac{C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}$, $P(Z=4) = (1-p) \times \frac{C_4^1 - C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}(1-p)$, $P(Z=6) = p \times \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}p$, 所以 $E(Z) = 0 \times \left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}\right) + 4 \times \frac{1}{2}(1-p) + 6 \times \frac{1}{6}p = 2-p$. 要使唯独选择方案 I 最好, 则 $\begin{cases} 2-p < \frac{3}{2} \\ 0 < p < 1 \end{cases}$, 解得 $\frac{1}{2} < p < 1$, 故 p 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

第 67 讲 二项分布与超几何分布、正态分布

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (1) $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (2) np $np(1-p)$

3. (1) $\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ (3) $\frac{nM}{N}$

4. (1) 正态密度曲线 (2) ① $x = \mu$ ② $x = \mu$ ④ 1 (3) ① $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ② μ σ^2

【对点演练】

1. 6 [解析] 由随机变量 X 服从正态分布 $N(4, 3)$, 得 $\mu = 4$, $\sigma^2 = 3$, 又 $P(X < a - 5) = P(X > a + 1)$, 所以 $a - 5 + a + 1 = 8$, 解得 $a = 6$.

2. $\frac{3}{7}$ [解析] $\because$ 该班有 50 名学生, $\therefore$ 从该班中任选 2 名学生共有 C_{50}^2 种不同的选法, $\therefore 15$ 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程, $\therefore 2$ 名学生选修不同课程的选法有 $C_{15}^1 C_{35}^1$ 种, 故从该班中任选 2 名学生, 他们选修不同课程的概率 $P = \frac{C_{15}^1 C_{35}^1}{C_{50}^2} = \frac{3}{7}$.

3. $\frac{7}{8}$ [解析] 因为是有放回地取产品, 所以每次取到次品的概率为 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. 任取 3 次, X 表示取得次品的次数, 则 $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$.

4. ③ [解析] 将一枚硬币连抛 3 次, 记正

面向上的次数为 X , 则 X 服从二项分布, ① 不满足题意; 某射手的射击命中率为 0.8, 现对目标射击 1 次, 记命中的次数为 X , 则 X 服从二项分布, ② 不满足题意; 从 7 男 3 女共 10 名学生干部中选出 5 名学生干部, 记选出女生的人数为 X , 则 X 服从超几何分布, ③ 满足题意; 盒中有 4 个白球和 3 个黑球, 每次从中随机摸出 1 个球且不放回, 记第一次摸出黑球时摸取的次数为 X , 则 X 不服从超几何分布, ④ 不满足题意. 故填 ③.

5. 0.14 [解析] 因为 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 所以 $P(X < 2) = P(X > 2) = 0.5$, 因此 $P(X > 2.5) = P(X > 2) - P(2 < X \leq 2.5) = 0.5 - 0.36 = 0.14$.

6. $\frac{4}{25}$ [解析] 若采取放回简单随机抽样, 则每次摸出的 1 个球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$, 所以摸出的 2 个球都是白球的概率 $P_1 = C_2^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$. 若采取不放回简单随机抽样, 则摸出的 2 个球都是白球的概率 $P_2 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

● 课堂考点探究

例 1 [思路点拨] (1) 先求出 1 人参与摸球获奖的概率, 4 人参与摸球, 相当于 4 重伯努利试验, 根据每一次发生的概率, 利用概率公式得到结果. (2) ① 设从该批零件中任取 1 个是合格品的概率为 p , 由对立事件的概率公式可得关于 p 的方程, 求解即可; ② 设这 4 个零件中合格品的个数为 Y , 由题可知 $Y \sim B\left(4, \frac{1}{8}\right)$, $X = 11Y - 4$, 由二项分布的概率可求出 X 的分布列, 从而可得期望, 或根据期望的性质求解.

(1) A [解析] 从袋子中一次性摸出两个球, 共有 $C_5^2 = 10$ (种) 摸法, 摸出的两个号码的和为偶数的有 $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}$, 共 4 种情况, 所以 1 个人摸球, 能够获奖的概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, 所以 4 人参与摸球, 恰有 2 人获奖的概率 $P = C_4^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$, 故选 A.

(2) 解: ① 设从该批零件中任取 1 个是合格品的概率为 p , 事件 A 表示“取出的 3 个零件中至多有 2 个是合格品”, 所以 $P(A) = 1 - p^3 = \frac{511}{512}$.

所以 $p^3 = \frac{1}{512}$, 解得 $p = \frac{1}{8}$.

② 设这 4 个零件中合格品的个数为 Y , 由题可知 $Y \sim B\left(4, \frac{1}{8}\right)$, 因为 $X = 10Y + (-1)(4 - Y) = 11Y - 4$, 所以 $P(X = -4) = P(Y = 0) = C_4^0 \times \left(\frac{1}{8}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)^4 = \frac{2401}{4096}$, $P(X = 7) = P(Y = 1) = C_4^1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{343}{1024}$.

$P(X = 18) = P(Y = 2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{147}{2048}$, $P(X = 29) = P(Y = 3) = C_4^3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{1024}$, $P(X = 40) = P(Y = 4) = C_4^4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{4096}$, 所以 X 的分布列为

X	-4	7	18	29	40
P	$\frac{2401}{4096}$	$\frac{343}{1024}$	$\frac{147}{2048}$	$\frac{7}{1024}$	$\frac{1}{4096}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E(X) &= (-4) \times \frac{2401}{4096} + 7 \times \frac{343}{1024} + 18 \times \frac{147}{2048} + 29 \times \frac{7}{1024} + 40 \times \frac{1}{4096} = \frac{3}{2} \\ &\left(\text{或 } E(X) = E(11Y - 4) = 11E(Y) - 4 = 11 \times 4 \times \frac{1}{8} - 4 = \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

变式题 (1) ACD [解析] 设事件 A = “向右下落”, 则 $\bar{A}$ = “向左下落”, $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, 易知小球最后落入格子的号码 X 与事件 A 发生的次数有关, 设事件 A 发生的次数为 Y , 则 $X = Y$, 因为小球下落的过程中共碰撞小木钉 5 次, 所以 $Y \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$. 对于 A , $P(X=0) = P(Y=0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, 故 A 正确; 对于 B , $P(X=5) = P(Y=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, 故 B 错误; 对于 C , $E(X) = E(Y) = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, 故 C 正确; 对于 D , $D(X) = D(Y) = 5 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, 故 D 正确, 故选 ACD.

(2) 解: ① 记 “射击 1 次获得 ‘优秀射手’ 称号” 为事件 A , “射击 1 次获得一等奖” 为事件 B , “射击 1 次获得二等奖” 为事件 C , 则 $A = B \cup C$, 且 B, C 互斥, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, 所以 $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$. ② 由题意得 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4. 记 “射击 1 次获得三等奖” 为事件 D , 则 $P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 所以 $P(X=0) = C_4^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$, $P(X=1) = C_4^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$, $P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$, $P(X=3) = C_4^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$, $P(X=4) = C_4^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{256}$, 所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

显然 $X \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, 则 $E(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$.

例 2 [思路点拨] (1) 从表格中可以发现甲获胜的场数为 3, 从而得到甲获胜的概率; (2) 从表格中可以发现在 10 场比赛中, 甲得分不低于 10 分的场次有 6 场, 其中乙得分大于丙得分的场数为 4, 则 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 通过超几何分布的知识, 得到 X 的分布列及数学期望 $E(X)$; (3) 由题得每场比赛甲获胜的概率为 $\frac{3}{10}$, 乙获胜的概率为 $\frac{1}{2}$, 丙获胜的概率为 $\frac{1}{5}$, 由甲、乙、丙获胜的场数服从二项分布, 得方差 $D(Y_1), D(Y_2), D(Y_3)$ 的大小关系. 解: (1) 根据三人投篮得分统计数据, 在 10 场比赛中, 甲共获胜 3 场, 分别是第 3

场、第 8 场、第 10 场. 用 A 表示 “从 10 场比赛中随机选择一场, 甲获胜”, 则

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

(2) 根据三人投篮得分统计数据, 在 10 场比赛中, 甲得分不低于 10 分的场次有 6 场, 分别是第 2 场、第 3 场、第 5 场、第 8 场、第 9 场、第 10 场, 其中乙得分大于丙得分的场次有 4 场, 分别是第 2 场、第 5 场、第 8 场、第 9 场, 所以 X 的所有可能取值为 0, 1, 2. $P(X=0) = \frac{C_2^0 C_4^4}{C_6^6} = \frac{1}{15}$,

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^3}{C_6^6} = \frac{8}{15}, P(X=2) = \frac{C_2^2 C_4^2}{C_6^6} = \frac{2}{5}.$$

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{3}.$$

(3) 由题意, 每场比赛甲获胜的概率为 $\frac{3}{10}$, 乙获胜的概率为 $\frac{1}{2}$, 丙获胜的概率为 $\frac{1}{5}$. 由甲、乙、丙还需要进行 6 场比赛, 得甲、乙、丙获胜的场数服从二项分布, 即 $Y_1 \sim B\left(6, \frac{3}{10}\right), Y_2 \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right), Y_3 \sim B\left(6, \frac{1}{5}\right)$, 所以 $D(Y_1) = 6 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{50}, D(Y_2) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, D(Y_3) = 6 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$. 故 $D(Y_2) > D(Y_1) > D(Y_3)$.

变式题 解: (1) 设 “有女教师参加活动” 为事件 A , “恰有一名女教师参加活动” 为事件 B , 则 $P(AB) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(A) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_2^2}{C_6^2} = \frac{3}{5}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{9}$.

(2) 依题意知 X 服从超几何分布, 且 $P(X=k) = \frac{C_2^k C_4^{2-k}}{C_6^2} (k=0, 1, 2), P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}, P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$, 所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$. (3) 设一名女教师参加活动可获得分数为 X_1 , 一名男教师参加活动可获得分数为 X_2 , 则 X_1 的所有可能取值为 3, 6, X_2 的所有可能取值为 6, 9, $P(X_1=3) = P(X_1=6) = \frac{1}{2}, E(X_1) = 3 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, P(X_2=6) = P(X_2=9) = \frac{1}{2}, E(X_2) = 6 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$.

有 X 名女教师参加活动, 则有 $2-X$ 名男教师参加活动, 故 $Y = \frac{9}{2}X + \frac{15}{2}(2-X)$

$$X) = 15 - 3X, \text{ 所以 } E(Y) = E(15 - 3X) = 15 - 3E(X) = 15 - 3 \times \frac{2}{3} = 13.$$

例 3 [思路点拨] (1) 根据给定的正态密度曲线, 结合正态曲线的对称性和性质, 逐项判定即可. (2) ① 根据平均数 $\bar{x} = 110$, 利用方差的计算公式可得方差 $s^2 = 150$, 从而得标准差 s ; ② 由 ① 可得 $X \sim N(110, 150), \sigma \approx 12$, 利用正态分布的性质可得 $P(122 < X \leq 134) \approx 0.1359$, 由 Y 与 X 的关系得 $P(600 < Y \leq 660) \approx 0.1359$, 从而得到最终结果.

(1) C [解析] 对于 A , 随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, 6^2)$, 所以随机变量 X 的方差为 $\sigma^2 = 6^2$, 即 $D(X) = 36$, 所以 A 错误; 对于 B , 根据给定的正态密度曲线, 可得 $\mu_1 = 30, \mu_2 = 34$, 所以 $\mu_1 < \mu_2$, 所以 B 错误; 对于 C , 根据正态密度曲线, 可得当 $X \leq 38$ 时, 随机变量 X 对应的曲线与 x 轴围成的图形面积小于当 $Y \leq 38$ 时随机变量 Y 对应的曲线与 x 轴围成的图形面积, 所以 $P(X \leq 38) < P(Y \leq 38)$, 所以 C 正确; 对于 D , 根据正态密度曲线, 可得 $P(X \leq 34) > \frac{1}{2}, P(Y \leq 34) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(X \leq 34) > P(Y \leq 34)$, 所以 D 错误. 故选 C.

(2) 解: ① 抽取的 200 名考生数学成绩的方差 $s^2 = (80 - 110)^2 \times 0.02 + (90 - 110)^2 \times 0.09 + (100 - 110)^2 \times 0.22 + (110 - 110)^2 \times 0.33 + (120 - 110)^2 \times 0.24 + (130 - 110)^2 \times 0.08 + (140 - 110)^2 \times 0.02 = 150$. 故估计这 20 000 名优秀考生数学成绩的方差为 150, 标准差 $s = \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \approx 5 \times 2.4 = 12$.

② 由 ① 知 $\mu = \bar{x} = 110, \sigma^2 = s^2 = 150$, 故 $X \sim N(110, 150), \sigma \approx 12$. 又 $P(\mu + \sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2} \times [P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)] \approx \frac{1}{2} \times (0.9545 - 0.6827) = 0.1359$, 所以 $P(122 < X \leq 134) \approx 0.1359$. 又 $Y = 5X - 10$, 所以 $P(600 < Y \leq 660) = P(600 < 5X - 10 \leq 660) = P(122 < X \leq 134) \approx 0.1359$. 故这 20 000 名优秀考生中总成绩在 (600, 660] 内的人数约为 $20\,000 \times 0.1359 = 2718$.

变式题 (1) BC (2) ABD [解析] (1) 由题意知 $X \sim N(1.8, 0.1^2), Y \sim N(2.1, 0.1^2)$. 对于 A , $P(X > 2) = P(X > \mu + 2\sigma) < P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$, 故 A 错误; 对于 B , $P(X > 2) < P(X > 1.8) = 0.5$, 故 B 正确; 对于 C , $P(Y > 2) > P(Y > 2.1) = 0.5$, 故 C 正确; 对于 D , $P(Y > 2) = P(Y > \mu - \sigma) = P(Y < \mu + \sigma) \approx 0.8413 > 0.8$, 故 D 错误. 故选 BC.

(2) 由题意可知 $\mu = 100, \sigma^2 = 100$, 故 A, B 正确; 由题意得 $\mu + \sigma = 110, \mu + 3\sigma = 130$, 所以 $P(X > \mu + \sigma) = \frac{1}{2} [1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)] \approx \frac{1}{2} \times 0.3173 \approx 15.87\%$, 故 C 错误; $P(X < \mu + 3\sigma) = 1 - \frac{1}{2} [1 - P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)] \approx 1 - 0.00135 \approx 99.87\%$, 故 D 正确. 故选 ABD.

培优专题 (八) 概率与其他知识的交汇问题

例 1 解: (1) 设事件 A 为 “某一天此款甜品销售量不超过 60 个”, 则 $P(A) = (0.01 + 0.03) \times 10 = 0.4$. (2) 根据题意得 $X \sim B(3, 0.6)$, 则 $P(X=0) = 0.4^3 = 0.064, P(X=1) = C_3^1 \times 0.6 \times 0.4^2 = 0.288, P(X=2) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.432, P(X=3) = 0.6^3 = 0.216$, 所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

所以 $E(X) = 0 \times 0.064 + 1 \times 0.288 + 2 \times 0.432 + 3 \times 0.216 = 1.8$.

(3) 可以认为此款甜品的销售情况发生了变化. 设事件 C 表示“改变制作工艺之前, 日销售量大于 70 个”, 改变制作工艺之前, 30 天内日销售量大于 70 个的天数为随机变量 Y , 由频率分布直方图可得 $P(C) = 0.2$, 又 $Y \sim B(30, 0.2)$, 所以 $E(Y) = 30 \times 0.2 = 6 < 20$, 所以可以认为改变工艺后, 此款甜品的销售情况发生了变化.

【自测题】

解: (1) 由频率分布直方图知, 各小矩形面积从左到右依次为 $0.06, 0.12, 0.18, 0.34, 0.16, 0.08, 0.06$.

样本平均数的估计值 $\mu = 0.06 \times 35 + 0.12 \times 45 + 0.18 \times 55 + 0.34 \times 65 + 0.16 \times 75 + 0.08 \times 85 + 0.06 \times 95 = 64$, 则所有参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $N(64, 15^2)$.

又 $\mu + \sigma = 79$, 所以 $P(X > 79) = P(X > \mu + \sigma) \approx \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865$.

所以参赛学生中成绩超过 79 分的学生人数约为 $0.15865 \times 10\,000 \approx 1587$.

(2) 由 (1) 知, $\mu = 64, P(X \geq 64) = \frac{1}{2}$.

即从所有参赛学生中随机抽取 1 名学生, 该学生竞赛成绩在 64 分及以上的概率为 $\frac{1}{2}$, 因此随机变量 $Y \sim B(3, \frac{1}{2})$, Y 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$.

则 $P(Y=0) = C_3^0 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}, P(Y=$

$1) = C_3^1 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}, P(Y=2) = C_3^2 \times$

$(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}, P(Y=3) = C_3^3 \times (\frac{1}{2})^3 =$

$\frac{1}{8}$, 所以随机变量 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(Y) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times$

$\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

例 2 解: (1) (i) 依题意得 2×2 列联表如下:

软件	是否正确识别音乐		合计
	正确识别	错误识别	
A 组软件	40	20	60
B 组软件	20	20	40
合计	60	40	100

零假设为 H_0 : 是否正确识别音乐与软件无关. 根据列联表中的数据, 经计算得到 $\chi^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 20 \times 20)^2}{60 \times 40 \times 60 \times 40} = \frac{25}{9} \approx 2.778 < 3.841 = x_{0.05}$, 根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为是否正确识别音乐与软件无关.

(ii) 由 (i) 得 $P_1 = \frac{2}{3}, P_2 = \frac{1}{2}$, 故方案二

在一次测试中通过的概率为 $C_2^1 \times \frac{2}{3} \times$

$(1 - \frac{2}{3}) \times C_2^2 \times (\frac{1}{2})^2 + C_2^2 \times$

$(\frac{2}{3})^2 \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) + C_2^2 \times$

$(\frac{2}{3})^2 \times C_2^2 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{4}{9}$.

(2) 方案二每次测试通过的概率 $P = C_2^1 \cdot$

$P_1(1 - P_1) \cdot C_2^2 \cdot P_2^2 + C_2^2 P_1^2 \cdot C_2^1 \cdot$

$P_2(1 - P_2) + C_2^2 P_1^2 \cdot C_2^2 P_2^2 = P_1 P_2 (\frac{8}{3} -$

$3 P_1 P_2) = -3 (P_1 P_2)^2 + \frac{8}{3} P_1 P_2 =$

$-3 (P_1 P_2 - \frac{4}{9})^2 + \frac{16}{27}$, 所以当 $P_1 P_2 =$

$\frac{4}{9}$ 时, P 取得最大值 $\frac{16}{27}$, 又 $P_1 + P_2 =$

$\frac{4}{3}$, 所以此时 $P_1 = P_2 = \frac{2}{3}$.

设 n 次测试中通过的次数为 X , 则 $X \sim$

$B(n, P)$, 则 $E(X) = nP = 16$, 因为 $P \leq$

$\frac{16}{27}$, 所以 $n = \frac{16}{P} \geq 16 \times \frac{27}{16} = 27$, 所以该测

试至少要进行 27 次, 此时 $P_1 = P_2 = \frac{2}{3}$.

例 3 解: (1) 设 y 关于 x 的经验回归方程为

$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 依题意, $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} =$

$3, \bar{y} = \frac{11+13+18+21+27}{5} = 18,$

$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \times 11 + 2 \times 13 + 3 \times 18 + 4 \times$

$21 + 5 \times 27 = 310, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 +$

$4^2 + 5^2 = 55$, 因此 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} =$

$\frac{310 - 5 \times 3 \times 18}{55 - 5 \times 9} = 4, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 18 -$

$4 \times 3 = 6$, 则 y 关于 x 的经验回归方程为

$\hat{y} = 4x + 6$, 令 $\hat{y} = 4x + 6 > 50$, 解得 $x >$

$11, x \in \mathbf{N}^*$, 所以该地区新能源汽车的

销量最早在 2030 年能突破 50 万辆.

(2) 由题知, 抽取的 12 人中有 9 人购置了

传统燃油汽车, 3 人购置了新能源汽车,

X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

$P(X=0) = \frac{C_9^0 C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{21}{55}, P(X=1) =$

$\frac{C_9^1 C_3^2}{C_{12}^3} = \frac{27}{55}, P(X=2) = \frac{C_9^2 C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{27}{220},$

$P(X=3) = \frac{C_9^3 C_3^0}{C_{12}^3} = \frac{1}{220}$, 所以 X 的分布

列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

$E(X) = 0 \times \frac{21}{55} + 1 \times \frac{27}{55} + 2 \times \frac{27}{220} + 3 \times$

$\frac{1}{220} = \frac{3}{4}$.

【自测题】

解: (1) 完善列联表如下:

单位: 人

肥胖	碳水		合计
	不控制碳水摄入	控制碳水摄入	
肥胖	40	60	100
不肥胖	25	75	100
合计	65	135	200

零假设为 H_0 : 不控制碳水摄入与肥胖无

关联, $\chi^2 = \frac{200 \times (40 \times 75 - 60 \times 25)^2}{65 \times 135 \times 100 \times 100} \approx$

$5.128 > 3.841 = x_{0.05}$, 根据小概率值 $\alpha =$

0.05 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为不控制碳水摄入与肥胖有关

联, 此推断犯错误的概率不大于 0.05 . 根据表中的数据计算, 不控制碳水摄入的

人群中肥胖和不肥胖的频率分别为 $\frac{40}{65} \approx$

$0.615, \frac{25}{65} \approx 0.385$, 控制碳水摄入的人群

中肥胖和不肥胖的频率分别为 $\frac{60}{135} \approx$

$0.444, \frac{75}{135} \approx 0.556$, 因为 $\frac{0.615}{0.444} \approx 1.4$,

所以在被调查者中, 不控制碳水摄入的人群

中肥胖的频率是控制碳水摄入的人群

中肥胖的频率的 1.4 倍, 我们可以认为

不控制碳水摄入会增加肥胖的风险.

(2) 从肥胖的学员中任意抽取 1 名, 该学

员不控制碳水摄入的概率 $P = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$,

则 $X \sim B(5, \frac{2}{5}), P(X=0) = (\frac{3}{5})^5 =$

$\frac{243}{3125}, P(X=1) = C_5^1 \times \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^4 =$

$\frac{810}{3125} = \frac{162}{625}, P(X=2) = C_5^2 \times (\frac{2}{5})^2 \times$

$(\frac{3}{5})^3 = \frac{1080}{3125} = \frac{216}{625}, P(X=3) = C_5^3 \times$

$(\frac{2}{5})^3 \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{720}{3125} = \frac{144}{625},$

$P(X=4) = C_5^4 \times (\frac{2}{5})^4 \times \frac{3}{5} = \frac{240}{3125} =$

$\frac{48}{625}, P(X=5) = (\frac{2}{5})^5 = \frac{32}{3125}.$

所以当 $k=2$ 时, $P(X=k)$ 有最大值 $\frac{216}{625}$.

例 4 解: (1) 当 $n=3$ 时, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, 且

$p_2 = 2p_1, p_3 = 2p_2, \therefore p_1 = \frac{1}{7}, p_2 = \frac{2}{7},$

$p_3 = \frac{4}{7}, \therefore H(X) = -(p_1 \ln p_1 +$

$p_2 \ln p_2 + p_3 \ln p_3) = -(\frac{1}{7} \ln \frac{1}{7} +$

$\frac{2}{7} \ln \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \ln \frac{4}{7}) = -\frac{1}{7} \ln \frac{2^{10}}{7^7} =$

$\ln 7 - \frac{10}{7} \ln 2.$

(2) 由题得 $H(X) = -(p_1 \ln p_1 +$

$p_2 \ln p_2 + \dots + p_n \ln p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i =$

$\sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{1}{p_i} \leq \ln \left[\sum_{i=1}^n (p_i \cdot \frac{1}{p_i}) \right] = \ln n,$

当 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ 时, 等号成立.

从数学角度理解, 当 $p_1 = p_2 = \dots = p_n =$

$\frac{1}{n}$ 时, $H(X)$ 取得最大值; 从现实生活理

解, 在没有任何已知信息时, 对于未知信

息, 不加主观臆断, 对每一种可能性都有

所估计, 且等概率地分配是最保险的做法.

【自测题】

解: (1) 设“恰好经过 3 次检验就能把有抗

体的血液样本全部找出来”为事件 A , 事

件 A 分为两种情况, 一是前两次检验

中, 其中一次检验出抗体, 第三次检验出

抗体, 二是前三次检验均无抗体,

所以 $P(A) = \frac{C_3^1 C_2^1 A_2^2 + A_3^3}{A_3^3} = \frac{3}{10}.$

所以恰好经过 3 次检验就能把有抗体的

血液样本全部找出来的概率为 $\frac{3}{10}.$

(2) ①由已知得 $E(X_1) = k, X_2$ 的所有可

能取值为 $1, k+1$, 所以 $P(X_2=1) = (1-p)^k,$

$P(X_2=k+1) = 1 - (1-p)^k$, 所以

$E(X_2) = (1-p)^k + (k+1)[1 - (1-p)^k]$

$= k+1 - k(1-p)^k$, 若 $E(X_1) =$

$E(X_2)$, 则 $k = k+1 - k(1-p)^k$,

所以 $k(1-p)^k = 1, (1-p)^k = \frac{1}{k},$

所以 $1-p = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$, 得 $p = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$, 所以 p 关于 k 的函数关系式为

$$p = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (k \geq 2 \text{ 且 } k \in \mathbf{N}^*).$$

②由①知 $E(X_1) = k, E(X_2) = k+1 - ke^{-\frac{k}{8}}$, 若 $E(X_1) > E(X_2)$, 则 $k > k+1 - ke^{-\frac{k}{8}}$, 所以 $1 - ke^{-\frac{k}{8}} < 0$, 得 $ke^{-\frac{k}{8}} > 1$, 所以 $\ln k - \frac{k}{8} > 0 (k \geq 2 \text{ 且 } k \in \mathbf{N}^*)$.

令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{8} (x \geq 2)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{8} = \frac{8-x}{8x}$, 当 $2 \leq x < 8$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 8$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[2, 8]$ 上单调递增, 在 $(8, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{因为 } f(2) = \ln 2 - \frac{2}{8} \approx 0.693 - 0.25 > 0,$$

$$f(26) = \ln 26 - \frac{26}{8} \approx 3.258 - 3.25 > 0,$$

$$f(27) = \ln 27 - \frac{27}{8} \approx 3.296 - 3.375 < 0,$$

所以当 $k \in [2, 26]$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$ 时, $E(X_1) > E(X_2)$, 此时采用方案二更好,

当 $k \in [27, +\infty)$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$ 时, $E(X_1) < E(X_2)$, 此时采用方案一更好.

例 5 解: (1) 由题意可知, 静态密码为 202, 动态校验码 $x_s = 4$. 若 $s=1$, 则 $M = 2 \times 1^3 + 0 \times 1^2 + 2 \times 1 = 4$, 得 $x_1 = 4$, 符合题意; 若 $s=2$, 则 $M = 2 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 2 \times 2 = 20$, 得 $x_2 = 0$, 不符合题意; 若 $s=3$, 则 $M = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3 = 60$, 得 $x_3 = 0$, 不符合题意; 若 $s=4$, 则 $M = 2 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 2 \times 4 = 136$, 得 $x_4 = 6$, 不符合题意; 若 $s=5$, 则 $M = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5 = 260$, 得 $x_5 = 0$, 不符合题意. 综上可得 $s=1$.

(2) 对于三位静态密码 $a_1 a_2 a_3$, 由 $M = a_1 \cdot 5^3 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5 = 5(a_1 \cdot 5^2 + a_2 \cdot 5 + a_3)$, 可得 M 的个位数字是 0 或 5, 即 x_5 只能是 0 或 5, 又 $M = 125a_1 + 25a_2 + 5a_3 = 10(12a_1 + 2a_2) + 5(a_1 + a_2 + a_3)$, 所以当 $a_1 + a_2 + a_3$ 为奇数时, $x_5 = 5$, 当 $a_1 + a_2 + a_3$ 为偶数时, $x_5 = 0$.

下面计算 $a_1 + a_2 + a_3$ 为奇数时, $a_1 a_2 a_3$ 的个数.

①当 a_1, a_2, a_3 均为奇数时, 有 $5^3 = 125$ (个) $a_1 a_2 a_3$.

②当 a_1, a_2, a_3 一奇两偶时, 有 $C_3^1 \times 5 \times 5^2 = 375$ (个) $a_1 a_2 a_3$, 所以当 $a_1 + a_2 + a_3$ 为奇数时, $a_1 a_2 a_3$ 共有 $125 + 375 = 500$ (个), 所以 $P(x_5 = 5) = \frac{500}{10^3} = \frac{1}{2}$,

$P(x_5 = 0) = 1 - P(x_5 = 5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 因此 x_5 的分布列为

x_5	0	5
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(3) 记事件 A 为“得到的动态校验码 $x_s = 0$ ”, 事件 B 为“得到的动态校验码 $x_s = 1$ ”, 事件 C_i 为“收到动态校验码 $s = i (1 \leq i \leq 5, i \in \mathbf{N})$ ”, 则 $A = AC_1 \cup AC_2 \cup AC_3 \cup AC_4 \cup AC_5$, $B = BC_1 \cup BC_2 \cup BC_3 \cup BC_4 \cup BC_5$, $P(C_i) = p_i$,

$$\text{从而 } Q_0 = P(A) = \sum_{i=1}^5 P(AC_i) =$$

$$\sum_{i=1}^5 P(C_i)P(A|C_i) = \sum_{i=1}^5 p_i P(A|C_i),$$

$$\text{同理可得 } Q_1 = P(B) = \sum_{i=1}^5 P(BC_i) =$$

$$\sum_{i=1}^5 P(C_i)P(B|C_i) = \sum_{i=1}^5 p_i P(B|C_i).$$

①对于事件 C_5 , 由(2)可知 $P(A|C_5) = \frac{1}{2}$, $P(B|C_5) = 0$, 从而 $p_5 \cdot P(A|C_5) > 0$, $p_5 \cdot P(B|C_5) = 0$, 所以 $p_5 \cdot P(A|C_5) > p_5 \cdot P(B|C_5)$.

②对于事件 C_2, C_4 , 静态密码 $a_1 a_2 a_3$ 对应的 $M = a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s$, 当 $s=2$ 或 4 时, M 为偶数, 所以 $x_s \neq 1$, 则 $P(B|C_2) = P(B|C_4) = 0$, 当 $a_1 a_2 a_3 = 000$ 时, $M = 0$, 则 $x_s = 0$, 所以 $P(A|C_2) > 0$, $P(A|C_4) > 0$, 从而 $p_2 \cdot P(A|C_2) > 0$, $p_4 \cdot P(A|C_4) > 0$, $p_2 \cdot P(B|C_2) = 0$, $p_4 \cdot P(B|C_4) = 0$, 所以 $p_2 \cdot P(A|C_2) > p_2 \cdot P(B|C_2)$, $p_4 \cdot P(A|C_4) > p_4 \cdot P(B|C_4)$.

③对于事件 C_1, C_3 , 静态密码 $a_1 a_2 a_3$ 对应的 $M = a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s$,

$$\text{当 } s=1 \text{ 时, } P(A|C_1) = P(B|C_1) = \frac{1}{10},$$

$$\text{从而 } p_1 \cdot P(A|C_1) = p_1 \cdot P(B|C_1),$$

当 $s=3$ 时, 由 a_3 是 $0 \sim 9$ 中的一个, 得 $3a_3$ 的个位数字是 $0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4$,

7, 从而 M 的个位数字也是 $0 \sim 9$ 中的一个, 可知 $P(A|C_3) = P(B|C_3) = \frac{1}{10}$, 从而 $p_3 \cdot P(A|C_3) = p_3 \cdot P(B|C_3)$.

由①②③可知 $\sum_{i=1}^5 p_i P(A|C_i) >$

$$\sum_{i=1}^5 p_i P(B|C_i), \text{ 即 } Q_0 > Q_1.$$

【自测题】

解: (1) a_1, a_2, a_3 的排序共有 $A_3^3 = 6$ (种), 且每种排序等可能, X 的所有可能取值为 $0, 2, 4$, 当 $X=0$ 时, a_1, a_2, a_3 的排序为 $1, 2, 3$, $P(X=0) = \frac{1}{6}$,

当 $X=2$ 时, a_1, a_2, a_3 的排序为 $1, 3, 2$ 或 $2, 1, 3$, $P(X=2) = \frac{1}{3}$,

当 $X=4$ 时, a_1, a_2, a_3 的排序为 $3, 2, 1$ 或 $2, 3, 1$ 或 $3, 1, 2$, $P(X=4) = \frac{1}{2}$,

所以 X 的分布列为

X	0	2	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(2) ① a_1, a_2, a_3, a_4 的排序共有 $A_4^4 = 24$

(种), 且每种排序等可能, 又 $\sum_{i=1}^n (i - a_i) = 0$, 所以 $i - a_i (i=1, 2, 3, 4)$ 中有偶数个奇数, 故 $\sum_{i=1}^n |i - a_i|$ 必为偶数, 当

$X=0$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4 的排序与第一次排序无变化, 此时仅有 1 种排序, 故

$$P(X=0) = \frac{1}{24}, \text{ 当 } X=2 \text{ 时, } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ 的排序与第一次排序相比仅有相邻两个位置变化, 此时有 3 种排序: } (2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3), \text{ 故 } P(X=2) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}, \text{ 所以 } P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=2) = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6}.$$

②因为各轮测试相互独立, 所以连续三轮测试中, 都有 $X \leq 2$ 的概率为 $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} < \frac{5}{1000}$, 所以 $\frac{1}{216}$ 是一个小概率, 这表明仅凭随机猜测得到三轮测试都有 $X \leq 2$ 的结果的可能性很小, 所以认为该品酒师有良好的鉴别能力.